

Jorge Chávez Salvador

*Ejercicios y problemas de
Matemática Básica II*

**Universidad de Lima
Fondo de Desarrollo Editorial
1999**

92732



Colección Textos Universitarios
Primera reimpresión 1999

© Jorge Chávez Salvador
© De esta edición
Fondo de Desarrollo Editorial
Universidad de Lima
Av. Javier Prado Este s/n, Lima 33
Casilla postal 852, Lima 100, Perú
Teléfono 437-6767
Fax 437-8066
E-mail fondo_ed@ulima.edu.pe
Internet www.ulima.edu.pe

Diseño y edición Fondo de Desarrollo Editorial

Impreso en el Perú

Prohibida la reproducción total o parcial de este libro por cualquier medio sin permiso expreso del Fondo de Desarrollo Editorial.

ISBN 9972-45-081-6

Hecho el depósito legal 15014099-2021

Índice

Presentación	IX
El proceso enseñanza-aprendizaje	XI
¿Es difícil la matemática? ¿Cómo se estudia?	XIII
Una metodología para resolver problemas	XVII
Instrucciones	XXI

GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA 1

Conceptos fundamentales	3
Transformación de coordenadas y lugares geométricos	7
Línea recta	10
Circunferencia	23
Parábola	33
Elipse	39
Hipérbola	44
Ecuación general de segundo grado	49

VECTORES 53

Álgebra vectorial	55
Geometría vectorial	58
Plano en el espacio	68
Recta en el espacio	70

MATRICES 79

DETERMINANTES 89

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 97

INDICACIONES Y RESPUESTAS 103

Presentación

La intención al publicar esta colección de *Ejercicios y problemas de Matemática Básica II* es contribuir con la preparación de cientos de estudiantes universitarios, ávidos de encontrar ejercicios y problemas planteados en años anteriores.

Los alumnos siempre buscan conocer qué se propuso como tema de la práctica o examen en años pasados, y muchas veces los que ya aprobaron les afirman que fue fácil. En verdad es fácil cuando se estudia, y para ello buscan, muchas veces sin resultado, los temas que se propusieron en anteriores oportunidades. Precisamente, con la intención de ayudarlos, se ha reunido en esta colección todos los enunciados que se presentaron durante un quinquenio.

Cabe señalar que este volumen solamente contiene los enunciados y las indicaciones necesarias para que los estudiantes puedan desarrollar los ejercicios o problemas y llegar a la respuesta, que sí se proporciona. No somos partidarios de presentar un solucionario porque es el alumno quien debe resolver cada enunciado.

Los enunciados se publican de la misma manera como se presentaron en su oportunidad a los estudiantes que llevaron la asignatura Matemática Básica II en la Universidad de Lima.

Debemos agradecer a los profesores del curso por su constante apoyo, en particular a la profesora Hortensia Sánchez-Dávila, por sus innumerables sugerencias.

Asimismo, anticipamos nuestro reconocimiento a los alumnos que, en forma personal o mediante correo electrónico, hagan llegar sus comentarios, consultas y sugerencias. Para ello pueden dirigirse a la siguiente dirección: Jchavezs@correo.ulima.edu.pe

Jorge Chávez Salvador

EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

El proceso educativo es una labor que realizan profesores y estudiantes en forma conjunta, constituyendo un buen equipo. Los profesores son estudiantes avanzados y *cada estudiante debe aprender a convertirse en su propio instructor* con el fin de poder absorber, por cuenta propia, los futuros avances tecnológicos y generar nuevos. Todo estudiante debe tener como objetivo encontrar la mejor manera de aprender lo que no sabe, es decir, adquirir nuevos conocimientos y poder aplicarlos en forma correcta en el momento en que los necesite.

La misión del profesor puede entenderse en el siguiente párrafo:

Es el profesor el que ilumina y estimula las mentes de los estudiantes para producir nuevas ideas. Es el profesor el que impulsa a los estudiantes a ser los más importantes propulsores de nuestra sociedad y civilización, buscando la innovación, porque sin innovación y originalidad la sociedad se vuelve estática y decadente. Un profesor superior es el que interpreta y conserva nuestro pasado, es el crítico del presente y el soñador de las cosas que vendrán¹.

Los profesores son responsables de proporcionar información clara y precisa, fijar ideas fundamentales y, principalmente, motivar el interés del estudiante por la materia, de tal manera que éste tenga el deseo de aprender.

El estudiante es responsable del aprendizaje, es decir, del desarrollo eficiente y efectivo de los métodos de estudio. Se requiere, por tanto, de un estudiante cultivado y, sobre todo, activo.

Entender el proceso enseñanza-aprendizaje permite que los profesores puedan transmitir mejor los conocimientos y que los estudiantes sean más receptivos. El proceso de aprendizaje tiene tres etapas:

- comprender,
- recordar,
- pensar creativamente.

¹ Doctora Marietta Vogue, profesora de la Facultad de Medicina en la Universidad de California, Los Angeles (UCLA). Del discurso pronunciado en la American Society of Parasitologist. Agosto 1976.

Comprender significa absorber ideas. Para lograr la comprensión de una idea o teoría nueva, el estudiante debe estar motivado (tarea del profesor) y tener el deseo de aprender (responsabilidad del alumno). La comprensión de nuevas ideas requiere de conocimientos previos o prerrequisitos y de objetivos claros y precisos. El estudiante tendrá el deseo de aprender si ve que la materia que estudia le va a ser útil y si observa que va haciendo progresos significativos.

Los objetivos del aprendizaje deben estar siempre en las mentes del profesor y del alumno, y debe ser siempre el profesor quien explique por qué debe estudiarse cada tema y con qué alcance.

Recordar o retener, en el nivel más simple, es el reconocimiento. Sin embargo, por recordar, aquí se quiere dar a entender el conocimiento, esto es, rememorar con eficacia lo que se ha aprendido anteriormente. El conocimiento es la etapa siguiente a la comprensión. El conocimiento puede ser espontáneo, como conocer el teorema de Pitágoras, o deductivo: llegar a conclusiones a partir de una serie de premisas válidas. El conocimiento no es memoria o "paporreteo", así, por ejemplo, se pueden memorizar fórmulas de trigonometría, pero sólo conoce trigonometría quien sabe aplicar correctamente sus fórmulas.

Pensar creativamente es la etapa final del proceso de aprendizaje, y consiste en transferir el conocimiento a nuevas situaciones. El objetivo de la universidad y de los profesores es que sus estudiantes piensen creativamente, es decir, generen nueva información. La sola adquisición y transmisión del conocimiento sirven simplemente para preservar la cultura, mientras que el pensamiento creativo, en todos sus niveles, es lo que impulsa a la sociedad y la civilización hacia el desarrollo.

En consecuencia los objetivos de la enseñanza son:

- impartir entusiasmo por el aprendizaje,
- generar hábitos de estudio eficientes,
- incrementar la capacidad crítica,
- fomentar el deseo de enfrentar problemas nuevos que plantea la vida.

El estudiante debe ser consciente de que la tercera etapa es sumamente importante y evita que lo estudiado se vuelva obsoleto en poco tiempo. Por lo expuesto, el estudiante está obligado a aprender, a adquirir nuevos conocimientos por sí mismo, a valorarlos y usarlos creativamente.

¿ES DIFÍCIL LA MATEMÁTICA? ¿CÓMO SE ESTUDIA?

... las matemáticas tienen el dudoso honor de ser el tema menos popular del plan de estudios... Futuros maestros pasan por las escuelas elementales aprendiendo a detestarlas... Regresan a la escuela elemental a enseñar a nuevas generaciones a detestarlas².

Son muchos los estudiantes que comentan que "las matemáticas" constituyen un problema; tal vez tuvieron maestros que les enseñaron a detestarlas, como señala el epígrafe. Sin embargo, la matemática³ no debe presentar dificultad para el estudiante con orden y disciplina en el estudio, y con un profesor que pone una semilla de entusiasmo por esta ciencia tan necesaria en estos tiempos.

Los estudiantes se preguntan siempre *cómo aprender más con un menor esfuerzo*. En primer lugar, son pocos los que dedican tiempo al desarrollo de hábitos y técnicas eficientes de estudio, y menos aún los que saben que un alumno puede incrementar la eficiencia de su aprendizaje de un 10% a un 60%, según afirman los especialistas en tecnología educativa.

Veamos algunos aspectos importantes:

- Los profesores reconocemos a un estudiante hábil cuando sabe hacer preguntas interesantes y reafirmamos nuestra opinión cuando responde correctamente a nuestras preguntas.
- Un profesor, al dictar una clase, está dando respuesta a una serie de preguntas implícitas o explícitas.
- Un examen contiene una serie de preguntas a las que el estudiante debe dar respuesta.
- Un artículo o monografía está dando respuesta a una o más preguntas.
- Un libro no es sino un conjunto de respuestas a una serie de preguntas.

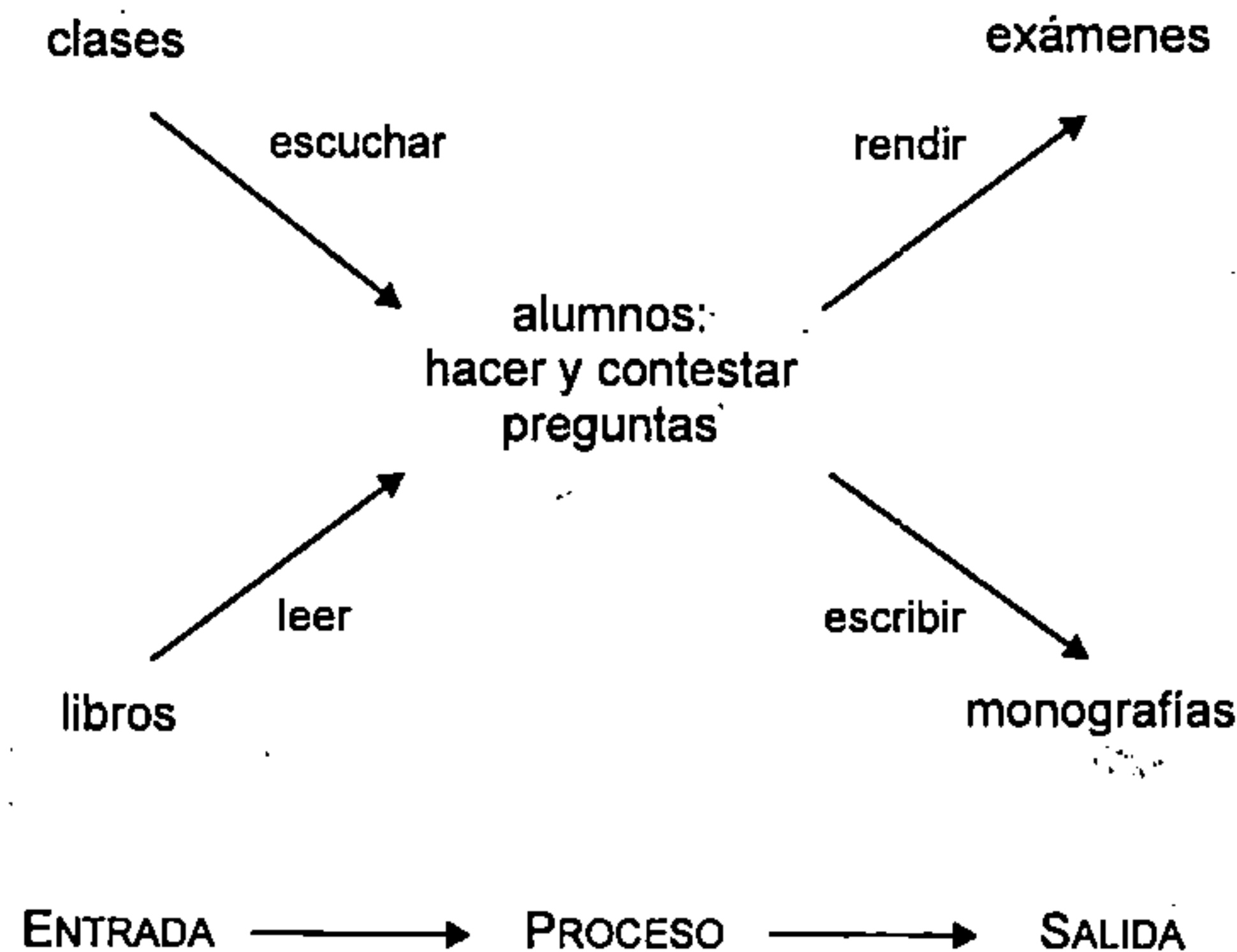
En consecuencia:

UNA TÉCNICA EFICIENTE ES SABER HACER Y CONTESTAR PREGUNTAS

² Educational Testing Service, Princeton, New York, 1956.

³ ¡En singular, la matemática es una! Antiguamente se decía, y aún es frecuente escuchar decir, las matemáticas, entendiéndose por ello la clásica división: aritmética, álgebra, geometría y trigonometría.

Observa el siguiente esquema:



En cada etapa se encuentran preguntas. En unos casos, el profesor hace las preguntas (salida) y en otros debe hacerlas el alumno (entrada y proceso). El propósito principal cuando se lee un material es obtener información para conocer sobre el tema y prepararse para rendir prácticas y exámenes o para preparar monografías, que son una etapa de la formación integral de todo estudiante.

En matemática esta preparación tiene que darse en dos aspectos, el aspecto teórico y el práctico. El estudiante debe conocer perfectamente la teoría del curso y es responsabilidad del profesor presentar la teoría necesaria en forma clara, ordenada y concisa, de manera que el alumno pueda, basado en ella, entender los conceptos de la materia y estar en condiciones de resolver las cuestiones que le sean formuladas.

Si bien el profesor es responsable por la presentación de la teoría, es responsabilidad del alumno estudiarla, conocerla bien y, sobre todo, saber aplicarla. Es en el aspecto práctico o fase de aplicación en el que debe insistirse. En primer lugar, un enunciado en matemática puede ser un ejercicio o un problema.

Un **ejercicio** es la aplicación rutinaria de un procedimiento conocido. Los ejercicios consisten generalmente en trabajar sobre cierto número de ejemplos idénticos o casi idénticos a los resueltos en clase por el profesor o que se encuentran incluidos como ejemplos en los textos teóricos.

Un **problema** es en matemática una pregunta que plantea una situación nueva al alumno, que puede ser resuelta con la teoría que ha recibido, pero que éste, de primera intención, no "ve" la forma de llegar al resultado. Un problema no es de ejecución inmediata como lo es un ejercicio.

Las prácticas calificadas y los exámenes son generalmente para desarrollar, es decir, se proponen de cuatro a seis preguntas, que, dependiendo de la preparación del alumno, pueden ser ejercicios o problemas: a mejor preparación más ejercicios y menos problemas. Por ello se dice: *lo que para un alumno es un problema, para otro es un ejercicio, y para un tercero, un fracaso*; todo depende del empeño y decisión que ponga el estudiante para superar sus propias limitaciones.

El empeño y decisión del alumno deben darse desde el inicio, de allí estas palabras, que aunque pronunciadas ante alumnos que recién ingresan a la universidad, es aplicable a todo alumno que inicia un curso: *Cuidado con celebrar el ingreso hasta la víspera del examen final*. Esta frase es equivalente a otra que pronunciaba frecuentemente el profesor, maestro y gran amigo Santos Geu Rivera: "*No acumular lecciones*".

Muchos alumnos se preguntan el motivo por el cual se les entrega el syllabus o programa analítico de las asignaturas. Se entrega por una sencilla razón: el estudiante debe leer, antes de que el profesor exponga un tema en el aula, la teoría en uno de los libros de la bibliografía. De esta manera, estará en mejores condiciones de efectuar las preguntas que aclaren lo leído y comprender mejor la exposición del profesor.

Demás está decir que los alumnos deben poner *atención total en clase*, con el fin de tomar buenos apuntes y poder intuir, algunas veces por el tono de voz del profesor, las partes más importantes de la asignatura. Al terminar una clase el alumno debe revisar de inmediato sus apuntes, mejor con otro compañero, para comparar los apuntes tomados y, sobre todo, señalar los temas que, de una u otra manera el profesor, en su exposición, señaló como los más importantes, y resolver algunos ejercicios de aplicación directa, con el fin de fijar ideas.

En el *estudio en casa* puede seguirse el siguiente esquema:

- a. Revisión de los apuntes de clase, comparando la teoría presentada en clase con la propuesta en libros de consulta obligatorios y complementarios.
- b. Solución de ejercicios y problemas propuestos en los libros, textos u hojas preparados por los profesores de la asignatura.
- c. Revisión de enunciados propuestos en prácticas y exámenes pasados. Puede consultarse a los alumnos que llevaron la asignatura en semestres pasados, para tomar directamente las experiencias que estos alumnos hayan adquirido al aprobar la asignatura.

Una inquietud en los alumnos es si deben practicar resolviendo *ejercicios o problemas* para una práctica o examen. En realidad se deben trabajar ambos. Al leer un enunciado, se identifica de inmediato si es un ejercicio o un problema. Es evidente que cuantos más problemas se resuelvan, será más simple resolver los siguientes. En matemática un problema nuevo es la reunión de ejercicios y problemas más simples. Por ello, es imprescindible que todo estudiante inicie su preparación con ejercicios simples de aplicación de la teoría expuesta por el profesor.

UNA METODOLOGÍA PARA RESOLVER PROBLEMAS

En la educación primaria se recomienda que un problema debe resolverse en tres etapas:

RACIOCINIO-OPERACIÓN-RESPUESTA

Estas etapas son las fundamentales, sin embargo, en el nivel universitario podemos hablar de una metodología de siete pasos para resolver un problema:

LECTURA - ANÁLISIS - PLAN - EJECUCIÓN - VERIFICACIÓN - RESPUESTA - DISCUSIÓN

1. **Lectura atenta del enunciado** con el fin de entender los datos y determinar qué se quiere obtener o demostrar. El objetivo es comprender el problema, por un lado, identificando las incógnitas y condiciones impuestas por el problema, y por el otro, saber exactamente qué es lo que se pide determinar. La situación es la misma si se trata de un problema literal o numérico, y la misma si se trata de una demostración. Debe recordarse que *quien mal comprende, mal responde*. El estudiante debe hacer el mayor esfuerzo para entender qué datos se proporcionan y qué es lo que se pregunta. Muchas veces un alumno no resuelve un problema por no llegar a entender qué tiene como datos o qué se le está preguntando.

El alumno que tiene respuesta a las preguntas:

¿Cuáles son los datos?

¿Cuál es la incógnita?

tiene gran parte del problema resuelto.

2. **Análisis del problema** es la etapa en la cual se busca la conexión entre datos e incógnitas, o entre la hipótesis y la tesis.

¿Es posible descomponer el problema en partes, de manera que cada parte tenga solución inmediata?

¿Es un problema semejante a uno resuelto previamente?

¿Existe algún teorema o propiedad que tenga que ver con el problema y que se conoce?

Muchas veces será necesario recurrir a las definiciones para encontrar esa conexión, y observe bien los datos:

¿Está utilizando todos los datos proporcionados?

Es probable que un gráfico ayude a visualizar la relación entre los datos y la incógnita. En todo caso:

¿Ayudará más un gráfico usando un sistema de coordenadas o un esquema libre?

En esta etapa, el alumno debe tener claro cómo llegar a la solución, y como resultado del análisis, determinar si el problema tiene una o más de una solución. Igualmente, debe tener claro el procedimiento o procedimientos para llegar a la solución. Finalmente, el alumno debe optar por un procedimiento para llegar a la solución, pero aún no resolverá el problema, antes debe escribir el plan.

3. Planteo o plan para resolver el problema es la etapa en la cual el alumno debe escribir, en pocas líneas, el procedimiento que ha elegido para llegar a la solución del problema, de manera que el propio alumno al efectuar el desarrollo vea qué paso es el siguiente cuando, por lo extenso del problema, se pierde en un desarrollo. Pero esta etapa permite, fundamentalmente, que el profesor que califica el tema siga el razonamiento utilizado por el estudiante para llegar al resultado.

En ciertos casos, cuando la naturaleza del problema lo determine, la sola presentación de esta etapa podría señalar un puntaje, que si bien puede no ser el 100%, podría llegar al 75% del puntaje que tenga la pregunta.

Finalmente, debe indicarse que esta etapa demuestra el razonamiento que hace el alumno ante una situación nueva, es decir, demuestra su pensamiento creativo, que todo profesor debe propiciar, y por lo tanto, asignarle una cierta puntuación, siempre y cuando se trate de una situación nueva.

4. Ejecución del plan, es decir, desarrollar cada etapa, señalando qué se está haciendo mediante instrucciones breves a modo de títulos en cada parte o sección en las que se ha descompuesto el problema, que describan qué se va a obtener y de qué manera. Debe indicarse que en esta etapa sólo bastará presentar las ecuaciones que permitan determinar lo que se está hallando, y no realizar todo el desarrollo algebraico de éstas. Así, por ejemplo, si se debe hallar el ortocentro de un triángulo, bastará determinar las ecuaciones de las tres alturas e indicar los valores de x e y que resuelven el sistema⁴, pero la solución del sistema puede quedar en el borrador. Lo importante es que el alumno muestre qué está obteniendo y cómo lo hace.

Otro aspecto que debe hacerse es rotular correctamente lo que obtiene en cada paso; así, por ejemplo, si calcula la ecuación de la altura correspondiente al lado c de un triángulo, lo correcto será ponerle como título h_c .

4 Se entiende que el objetivo de la evaluación no es la solución de sistemas de ecuaciones.

5. **La verificación** de las operaciones es sumamente importante, y esta etapa debe hacerse en forma interactiva con la etapa previa. Cada vez que se resuelva un sistema de ecuaciones deben reemplazarse los valores obtenidos, con el fin de tener la seguridad de la respuesta parcial obtenida. El no verificar es una de las causales de que el alumno no pueda seguir, al obtener valores no manejables en cierta etapa de la solución. Es mejor verificar cada paso que esperar llegar a una etapa en la que resulte dificultoso, por no decir imposible, detectar el error. Además, la verificación no debe circunscribirse a la aritmética o al álgebra de un procedimiento; puede también efectuarse una verificación de tipo geométrico, en la que, por ejemplo, se puede observar si las coordenadas halladas corresponden al centro de una circunferencia.

6. **La respuesta** debe ser objeto de un doble examen. En primer lugar, determinar si se han hallado todas las soluciones previstas en el análisis inicial, y en segundo lugar, si se ha dado respuesta a todas las interrogantes formuladas en el problema. Otro problema a considerar es el de las unidades de las respuestas, que usualmente omiten los alumnos.

7. Finalmente, es recomendable hacer una **discusión final**, etapa que no es necesaria efectuar cuando se está rindiendo una prueba, pero que es de vital importancia cuando se estudia. Este análisis final permite determinar si el problema contiene una situación nueva que pueda ser utilizada en otro similar, si se puede proponer el problema con datos equivalentes o qué otras respuestas pueden ser determinadas a partir de los datos proporcionados. En este último caso, el alumno está formulándose nuevos problemas, que los profesores piensan cuando preparan una evaluación, sea ésta una práctica o un examen.

En general, el alumno debe preguntarse qué ha ganado con resolver el problema. Tal vez incluía un término que no recordaba, o le permitió practicar la resolución de una ecuación algebraica algo complicada, o tuvo que recurrir a un texto de un curso prerrequisito para poder resolver la cuestión planteada.

INSTRUCCIONES

Ejercicios y problemas de Matemática Básica II se ha organizado de tal manera que los estudiantes puedan realizar la práctica necesaria antes de cada evaluación.

Se recomienda

LEER DETENIDAMENTE LOS ARTÍCULOS:

- El proceso enseñanza-aprendizaje.
- ¿Es difícil la matemática? ¿Cómo se estudia?
- Una metodología para resolver problemas.

Los ejercicios y problemas se han escrito para que los alumnos puedan atender mejor las clases teóricas y estar en disposición de prepararse para ser evaluado.

La forma de utilizar de la mejor manera esta colección de enunciados es la siguiente:

- elegir el tema correspondiente a una evaluación,
- leer cada enunciado hasta comprender qué se tiene como datos y qué es lo que se pide determinar o demostrar,
- desarrollar completamente la pregunta en un máximo de 15 minutos, y luego comparar las respuestas y analizar su solución con la propuesta en la parte final.

NOTAS

El temario de la asignatura Matemática Básica II es el siguiente:

- Geometría analítica plana
- Vectores, plano y recta en el espacio
- Matrices
- Determinantes
- Sistemas de ecuaciones lineales

Todas las preguntas propuestas tienen un valor máximo de 4 puntos en el sistema vigesimal. El tiempo asignado para una prueba de cinco preguntas es de 90 minutos.

*Geometría
analítica
plana*

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1. Colocar verdadero [V] o [F] en los espacios mostrados, según corresponda.
Puntaje: 8 a 10 correctas, 4 puntos; 6 o 7 correctas, 3 puntos; 5 correctas, 2 puntos.

- [F] Los términos recta y eje son equivalentes. A B C
- [V] Dos segmentos orientados opuestos tienen el mismo módulo y sus medidas algebraicas suman cero.
- [] Los módulos de dos segmentos orientados opuestos, suman cero.
- [] Si A, B y M son puntos colineales, son equivalentes las expresiones: $\overline{AM} = 2\overline{MB}$ y $\overline{AB} = 3\overline{BM}$ B A M
- [] Si A(-1), B(4) y C(3) son tres puntos del sistema de coordenadas unidimensional, se cumple: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = -5$
- [] La medida algebraica del segmento AB es -12; si B(-5), entonces la coordenada de A es 7.
- [] Si $2\overline{AP} + \overline{AB} = 0$, entonces: $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -\frac{1}{3}$ B P A
- [] Si $\overline{AB} = -3$ y B(2), entonces la abscisa de A es 5. -5-12 = -17
- [] P(5) es uno de los puntos de trisección del segmento de extremos A(-2) y B(19).
- [] La distancia de P(-7) a Q(-11) es -4. 3

2. Marque en el espacio correspondiente [V] ó [F] según sean verdaderas o falsas las siguientes proposiciones.
Puntaje: 7 u 8 correctas, 4 puntos; 5 ó 6 correctas, 3 puntos; 3 ó 4 correctas, 2 puntos.

- [F] La distancia entre dos puntos situados en un eje es siempre igual a la diferencia de sus abscisas.
- [] El segmento que une las proyecciones del punto P(5; -12) sobre los ejes, mide 13 u.
- [] El área del pentágono de vértices (0; 0), (7; 0), (7; 1), (4; 5) y (0; 5) es 29 u².
- [] La altura de mayor longitud del triángulo A(2; 2), B(2; -1) y C(6; -1), es la que parte del vértice B.
- [] Los puntos (2; -3), (6; -4) y (-6; -1) son colineales.
- [] El triángulo de vértices A(-2; -8), B(10; -8) y C(10; 1) es obtusángulo.
- [] El punto (5; 3) está a tres unidades del eje de ordenadas.
- [] El triángulo de vértices (-4; 3), (-1; -1) y (3; 3) es equilátero.

4 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE MATEMÁTICA BÁSICA II

3. Marque en el espacio correspondiente [V] o [F] según sean verdaderas o falsas las siguientes proposiciones.

Puntaje: 7 correctas, 4 puntos; 5 o 6 correctas, 3 puntos; 3 o 4 correctas, 2 puntos.

- [] Uno de los puntos de trisección del segmento AB, A(12; -7) y B(-3; 5), es el punto (7; -3).
- [] Los puntos (7; 1), (2; 9) y (2; 5) son, respectivamente, dos vértices y su centro de gravedad. Entonces, el tercer vértice es el punto (-3; 5).
- [] Si la pendiente de una recta es negativa, la recta está en el IV cuadrante.
- [] Dos rectas son paralelas si, y sólo si, sus inclinaciones son congruentes.
- [] Los puntos A(3, 2) y B(8, 6) equidistan del punto M(5, 9).
- [] Toda recta tiene pendiente definida.
- [] La altura de mayor longitud del triángulo A(3; 2), B(3; -1) y C(7; -1) es la que parte del vértice B.

4. Resolver cada pregunta (puede ser en el borrador) y colocar la respuesta en el casillero correspondiente.

Puntaje: 5 correctas, 4 puntos; 4 correctas, 3 puntos; 3 correctas, 2 puntos.

- * La proyección del segmento que une los puntos A(-2; 5) y B(7; 3) sobre el eje de ordenadas tiene una longitud de:
- * Los vértices de un triángulo son: (2; 7), (5; 1), (x; 3) y su área es 18 u². Si los vértices, en la forma propuesta, están en el sentido en el que se mueven las agujas de un reloj, entonces x es:
- * El triángulo cuyos vértices son: el origen y los puntos (a; b) y (a + $\sqrt{b}$; b - $\sqrt{a}$) se puede clasificar por sus lados como:
- * Los vértices de un triángulo son los puntos que tienen por coordenadas (-2; 9), (6; 5) y (2; -3), entonces la abscisa del punto de concurso de las medianas del triángulo es:
- * La inclinación de una recta cuya pendiente es $-\sqrt{3}$, en grados sexagesimales, es:

5. Resolver cada pregunta, (puede ser en el borrador) y colocar la respuesta en el casillero correspondiente. Cada respuesta correcta, un punto.

* La tangente del mayor ángulo que forma la recta que pasa por $(2; 7)$ y $(-1; -2)$ con la que pasa por $(6; 4)$ y $(-2; 2)$, es:

* Un cuadrado de lado 8 cm. tiene sus diagonales en los ejes coordenados. Entonces, las coordenadas de sus vértices son:

* El punto P divide al segmento AB en la razón de parte a parte $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = r$ y

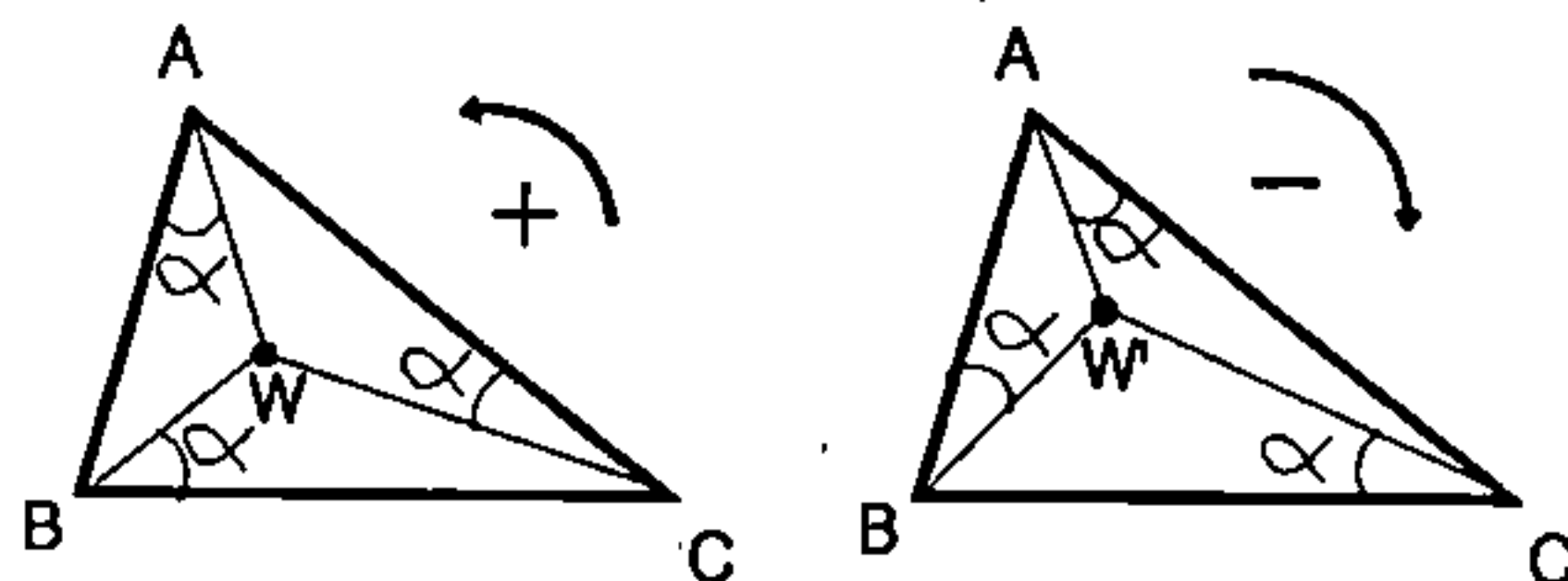
en la razón de parte a todo $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = k$.

Entonces, la relación entre ambas razones, es:

* Dados los puntos $A(2; 3)$ y $B(-1; 5)$; entonces, la proyección del segmento AB sobre el eje de abscisas es:

6. Sobre los lados del triángulo de vértices $A(-2; 4)$, $B(-6; 0)$ y $C(6; 0)$, se construyen los paralelogramos ABGF, ACDE y BCJH, de áreas S_1 , S_2 y S_3 , respectivamente. Hallar la relación existente entre las áreas de los paralelogramos, si $G(-9; 1)$, $D(9; 1)$ y $H(-5; -3)$.

7. W Y W', son respectivamente, el punto positivo y el negativo de Brocard, verificándose siempre:
 $\alpha = \alpha'$, llamado ángulo de Brocard.



Si $A(12; 0)$, $B(0; 0)$, $C(6; 18)$ son vértices de un triángulo ABC y $(8; 4)$, un punto en el interior del triángulo.

- * Verificar que el punto $(8; 4)$ es un punto de Brocard, determinando si es positivo o negativo.
- * Calcular el ángulo de Brocard del triángulo ABC.

8. Un rombo, que está en el primer cuadrante, tiene un ángulo de 150° y los puntos $(0; 0)$ y $(8; 0)$ son dos de sus vértices. Determinar las coordenadas de los otros dos vértices y del punto de intersección de sus diagonales, así como el área de este rombo.
9. Dos vértices de un triángulo son los puntos $(-10; 2)$ y $(6; 4)$. Si las alturas del triángulo se cortan en el punto $(5; 2)$, determinar las coordenadas del tercer vértice.
10. Los vértices de un triángulo son $A(5; 2)$, $B(5; 8)$ y $C(8; 8 + 3\sqrt{3})$.
i) Clasificar el triángulo por sus lados y por sus ángulos.
ii) Determinar la medida del mayor ángulo del triángulo.
iii) Calcular el área del triángulo.
11. Un segmento AB de 16 u. está en el primer cuadrante, con sus extremos apoyados sobre los ejes coordenados, de manera que tiene como mediatriz a la bisectriz del primer cuadrante. Determinar las coordenadas de un punto de la bisectriz que se encuentre a 17 u. de un extremo del segmento.

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS

12. Colocar verdadero [V] o [F] en los espacios mostrados, según corresponda.
Puntaje: 8 correctas, 4 puntos; 6 o 7 correctas, 3 puntos; 5 correctas, 2 puntos.

- ☐ [] La traslación de ejes modifica la gráfica de una ecuación.
- ☐ [] Si los ejes coordenados se trasladan al punto (2; 5), la gráfica de la ecuación $xy = 7$ cambia de forma.
- ☐ [] Si los ejes coordenados se trasladan al punto (h; h + 3), la ecuación $y = 3$ se transforma en $y' = -h$.
- ☐ [] Las ecuaciones $x - 3y + 8 = 0 \wedge 2x' - 6y' + 7 = 0$, representan la misma recta en dos sistemas de coordenadas cuyos ejes son, respectivamente, paralelos.
- ☐ [] La recta $x = -2$ es paralela al eje de abscisas.
- ☐ [] La gráfica de la relación: $y^2 = 2x - 1$, es simétrica con respecto al eje de ordenadas.
- ☐ [] La gráfica de la función: $xy = 5$, tiene dos asíntotas.
- ☐ [] La gráfica de $xy = 1$ tiene dos asíntotas.

13. Colocar verdadero [V] o [F] en los espacios mostrados, según corresponda.
Puntaje: 8 correctas, 4 puntos; 6 o 7 correctas, 3 puntos; 5 correctas, 2 puntos.

- ☐ [] La relación $y = 3x^2 + 1$ es simétrica con respecto al eje de abscisas.
- ☐ [] La gráfica de la ecuación $3x^2 + 4y^2 = 12$ es simétrica con respecto al origen.
- ☐ [] El punto simétrico del punto (4; -2), con respecto a la recta $x - y = 0$, es el punto (-4; 2).
- ☐ [] La ecuación $xy + 2x - y - 2 = 0$, es simétrica con respecto al origen de coordenadas.
- ☐ [] La ecuación $y + x^3 = 0$ tiene una gráfica en los cuadrantes en los cuales $xy < 0$.
- ☐ [] La ecuación $x^2 - y^2 = 0$ es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los ejes coordenados.
- ☐ [] La recta cuyas abscisas son siempre el cuádruplo de sus ordenadas tiene pendiente igual a 4.
- ☐ [] El lugar geométrico de los puntos que equidistan de A(0; 3) y B(0; -1) es $x = 1$.

14. — Mediante una traslación de ejes, la ecuación: $x^2y + 2xy + y - 2 = 0$, se transforma en otra que no contiene términos de primer grado, ni de segundo grado. Determinar el nuevo origen y la ecuación transformada.
15. — La ecuación de una recta es $3x - y + 9 = 0$, y la ecuación de la misma recta con respecto a los ejes $X'Y'$ es $3x' - y' - 3 = 0$.
¿Cuáles son las coordenadas del origen del nuevo sistema de coordenadas con relación a los ejes originales? Presente además el gráfico correspondiente.
16. — ¿Es posible que la ecuación $xy^2 + 5y^2 - 4xy + 4x - 20y + 17 = 0$, tenga la misma gráfica que $x'^2y'^2 = \text{constante}$, siendo los sistemas de coordenadas XOY y $X'O'Y'$ paralelos? En caso afirmativo, presente un gráfico mostrando las coordenadas de O' .
17. — ¿Es posible que la ecuación $x^2y + 4x^2 - 12xy - 48x + qy + 140 = 0$, tenga la misma gráfica que $x'^2y' = \text{constante}$, siendo paralelos los sistemas XOY y $X'O'Y'$? En caso afirmativo, ¿qué valor tendría q y la constante?
18. — Dada la recta $Ax + By + C = 0$, demostrar, justificando cada paso, que si los ejes se trasladan de manera que el nuevo origen sea el punto $(h; k)$ de la recta, la ecuación transformada será de la forma: $Ax' + By' = 0$.
19. — Se tienen las rectas
 $L_1: 3x - y = 0$
 $L_2: x - 2y = 0$
referidas a un mismo sistema de coordenadas XOY . Si los ejes se trasladan, manteniendo el nuevo origen sobre la recta: $x - y = 0$, se forma un triángulo, dos de cuyos lados están sobre las rectas dadas, y el tercero, sobre el eje de abscisas del nuevo sistema. Determinar las coordenadas del nuevo origen, si el área del triángulo es 30 u^2 .
20. — Dada la ecuación $2x^2 - 12x - y + 16 = 0$, mediante una traslación de ejes transformarla en otra que contenga sólo dos términos. Discutir y hacer el gráfico de la ecuación en el nuevo sistema de coordenadas.
21. — Dadas las ecuaciones:
 $x + y - 7 = 0$
 $xy - x + 2y - 10 = 0$
¿A qué punto deben trasladarse los ejes coordenados de manera que estas ecuaciones, en el nuevo sistema, tengan -8 como término independiente?

22. Dos rectas perpendiculares se cortan en $P(4; 6)$ y determinan en el eje de ordenadas un segmento de 10 u. ¿A qué punto deben trasladarse los ejes coordenados de manera que la ecuación de pendiente negativa pase por el nuevo origen y la de pendiente positiva tenga, en el nuevo sistema una ordenada igual a 10 u? (La pendiente positiva es < 1).
23. La ecuación de una recta es tal que la razón de abscisa a ordenada de cada uno de sus puntos es siempre igual a cuatro. ¿Cómo será su ecuación si los ejes se trasladan a un nuevo origen $O'(8; 2)$? Fundamente sus respuestas.
24. Los puntos $A(4; 0)$ y $B(-4; 0)$ son extremos de la base de un triángulo ABC. El tercer vértice C es un punto móvil de manera que se verifique:
 $\text{tg}A \cdot \text{tg}B = 2$.
 * Hallar la ecuación del lugar geométrico que describe el punto C.
 * Discutir y graficar la ecuación del lugar geométrico hallado.
25. Un segmento AB de longitud constante k se mueve, apoyando sus extremos en los ejes cartesianos rectangulares. Verificar que:
 $(x^2 + y^2)^3 = k^2 x^2 y^2$
 es la ecuación del lugar geométrico de la proyección del origen sobre este segmento.

LÍNEA RECTA

26. Marque en el espacio correspondiente [V] o [F] según sean verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Puntaje: 7 u 8 correctas, 4 puntos; 5 ó 6 correctas, 3 puntos; 3 ó 4 correctas, 2 puntos.

☐ El punto A(4; 4) está en la recta:

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{6} = 1$$

☐ De las rectas: $l_1: y = -x + 2$; $l_2: y = x + 2$; $l_3: y = -0,5x + 2$, la de mayor inclinación es l_3 .

☐ La ecuación $x^2 - 6x + 16 = 0$, representa dos rectas verticales.

☐ El lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas: $2x - y = 0 \wedge 2x - y + 2 = 0$, es $2x - y + 1 = 0$.

☐ Las rectas $Mx + Ny + Q = 0$ y $Rx + Sy + P = 0$, son perpendiculares si: $MS - SR = 0$. $MS - SR = 0$

☐ Los puntos (9,5; 8), (-4,5; 16) y (21; 9), son colineales.

☐ La proyección del punto (10; 4) sobre la recta $x - 2y + 14 = 0$, tiene como abscisa 6,8.

☐ La recta $y = 4x + 1$ pertenece a la familia: $(x + 2y - 1) + k(x - y) = 0$.

27. Marque en el espacio correspondiente [V] o [F] según sean verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Puntaje: 7 u 8 correctas, 4 puntos; 5 ó 6 correctas, 3 puntos; 3 ó 4 correctas, 2 puntos.

☐ De las rectas: $l_1: x + y - 2 = 0$; $l_2: x + y + 2 = 0$; $l_3: x + 2y - 1 = 0$, la de mayor inclinación es l_2 .

☐ El lugar geométrico de los puntos que equidistan de $x - 3y + 5 = 0 \wedge x - 3y - 2 = 0$, es la recta: $x - 3y - 2 = 0$.

☐ La ecuación $y^2 - 6y + 10 = 0$, representa dos rectas perpendiculares.

☐ La recta $y = 4x - 1$ pertenece a la familia $(x + 2y - 1) + k(x - y) = 0$.

☐ El punto M(3; -3) pertenece a la recta: $x = 1 + t$ y $y = -7 + 2t$

☐ Dos rectas son perpendiculares, si y sólo si, el producto de sus pendientes es igual a -1.

☐ La ecuación $20y^2 + 9xy - 20x^2 = 0$, representa dos rectas perpendiculares.

☐ El triángulo que tiene por lados: $3x - y - 8 = 0$, $x - 3y - 25 = 0$ y $3x + y - 15 = 0$, tiene como incentro el punto (4; -3).

28. Responder en los espacios que se proporcionan; las operaciones necesarias se pueden realizar en el borrador (cara izquierda del cuadernillo)
Puntaje: 0,5 puntos por cada respuesta correcta.

- * Al trasladar los ejes coordenados de tal manera que el nuevo origen sea el punto $(0; 2)$, la ecuación de la recta $2x + 3y - 6 = 0$, se transforma en:

$2x' + 3y' = 0$

- * El valor de k para el cual las rectas $7x - 2y - 5 = 0$, $x + 7y - 8 = 0$
 $\wedge kx + ky - 8 = 0$ son concurrentes, es:

$k = -1$

- * La ecuación de la recta que pasa por el punto $(4; -1)$ y es paralela a la recta:
 $2x - 3y + 6 = 0$.

$2x - 3y - 14 = 0$

- * La ecuación de la recta perpendicular a: $x - 2y + 5 = 0$, que pasa por el punto $(-2; -1)$ es:

$x + 2y + 3 = 0$

- * El lado de un triángulo equilátero mide $6\sqrt{3}$ u. Si sus medianas se cortan en el origen y uno de sus lados es paralelo al eje de abscisas, la ordenada del vértice que se encuentra el cuarto cuadrante es:

-6

- * El punto de intersección de las rectas
 $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + t \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 + s \\ y = 1 + 2s \end{cases}$
tiene como primera coordenada:

-2

- * La ecuación de la recta que pasa por el punto $A(a; b)$ y que forma con la recta: $x + y - 5 = 0$ un ángulo de 45° , es:

$x + y - 5 = 0$ o $x - y + 5 = 0$

- * La ecuación $20y^2 + 9xy - 20x^2 = 0$, representa dos rectas:

$y = \frac{4}{5}x$ o $y = -\frac{5}{4}x$

29. Responder en los espacios que se proporcionan; las operaciones necesarias se pueden realizar en el borrador (cara izquierda del cuadernillo)

Puntaje: 5 0 6 correctas, 4 puntos; 4 correctas, 3 puntos; 3 correctas, 2 puntos.

* La ecuación general de la perpendicular a la recta determinada por las ecuaciones:

$$x = 1 + 2t$$

$$y = -1 + 3t,$$

que pasa por el punto (4; 5), es:

* La paralela media de las rectas:

$$2x - 3y + 5 = 0$$

$$6x - 9y + 15 = 0, \text{ es:}$$

* La inclinación de la recta:

$$x \cos 60^\circ + y \sin 60^\circ - 5 = 0, \text{ es:}$$

* La distancia dirigida del punto $A(-2; -2)$ a la recta

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-5} = 1$$

, es:

* La distancia entre las rectas paralelas:

$$5x - 12y + 10 = 0$$

$$10x - 24y + 5 = 0, \text{ es:}$$

* La recta que pasa por los puntos (2; 3) y (4; 1), determina con los ejes coordenados un triángulo de área:

30. Demostrar que los puntos (7; 5), (-2; 6) y (25; 3) son colineales, comprobando que uno de los puntos satisface la ecuación de la recta que pasa por los otros dos. Además, describir otras dos maneras para demostrar que estos puntos son colineales.

31. Dado el triángulo de vértices $A(a; 0)$, $B(b; 0)$ y $C(0; c)$, donde $b > a > 0$ y $c > 0$, determinar:

- el área de triángulo ABC,
- las coordenadas de baricentro del triángulo ABC,
- las ecuaciones de las alturas y el ortocentro del triángulo.

32.

Dados los puntos $A(-15; 0)$ y $B(-5; 5)$.

- a) Determinar la ecuación de la recta que pasa por A y B , expresándola en las formas pendiente-ordenada, segmentaria y general.
- b) Hallar las coordenadas de un punto C , colineal con A y B , tal que sus distancias a los puntos A y B estén en la relación de 2 a 3.

33.

Un triángulo tiene por vértices $A(2; 2)$, $B(-2; -1)$ y $C(-1; 6)$. Determinar la medida del ángulo B y el área del triángulo.

34.

Dados los triángulos ABC y $A'B'C'$, de vértices $A(-3; 5)$, $B(-4; 2)$, $C(3; -5)$, $A'(3; 9)$, $B'(11; 5)$ y $C'(5,4; -6,2)$. Verificar que las rectas $L_{AA'}$, $L_{BB'}$ y $L_{CC'}$, son concurrentes en un punto P , calculando las coordenadas de dicho punto.

35.

Dado el triángulo $A(-6; 4)$, $B(3; -5)$ y $C(6; 10)$, determinar las coordenadas de su ortocentro H y de su baricentro G .
Determinar además, la distancia HG y la ecuación de la recta que pasa por H y G .

36.

Por $D(a; k)$, $a > 0$ y $k > 0$, pasa una recta de pendiente m , que corta a la recta vertical que pasa por $A(2a; 0)$ en B y al eje de ordenadas en C . Demostrar que el área del trapecio $OABC$ es independiente de la pendiente m . Además, calcular la abscisa del punto de intersección de las diagonales del trapecio.

37.

Por el vértice A de un triángulo ABC , $A(10; 20)$, $B(-14; 12)$ y $C(16; 2)$, se traza una recta que corta al lado AC en Q . Si los triángulos ABQ y ACQ tienen el mismo perímetro, determinar:

- * las coordenadas del punto Q y la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y Q ,
- * el área de los triángulos ABQ y ACQ .

38.

Dado el cuadrilátero $A(6; 11)$, $B(-6; 3)$, $C(6; -3)$ y $D(10; 3)$.

- * Verificar que es inscriptible, determinando el centro y el radio de la circunferencia circunscrita.
- * Determinar las coordenadas de un punto que equidiste de los puntos medios de los lados del cuadrilátero $ABCD$.

39. Los puntos $A(2; 8)$, $B(2; -2)$ y $P(5; 7)$ son, respectivamente, los extremos de un diámetro y un punto de una circunferencia. Si los puntos R , S y T , están sobre la recta que contiene al diámetro perpendicular a AB , siendo colineales las ternas APR y BPS , se trata de averiguar el valor de la razón $\frac{\overline{ST}}{\overline{TR}}$, siendo T un punto de la tangente en P .
40. Un segmento AB de longitud $16\sqrt{2}$ u., tiene sus extremos sobre los semiejes positivos (A sobre el eje X^+ , y B sobre y^+), y el ángulo OAB es de 45° . Con centro en A y radio igual a $17\sqrt{2}$ u., se marca un punto P sobre la bisectriz del primer cuadrante. Calcular las coordenadas de los puntos A , B y P .
41. Los vértices de un triángulo ABC son $A(-3; 7)$, $B(4; 14)$ y $C(-3; 12)$. Si el triángulo $A'B'C'$ es simétrico al triángulo ABC con respecto a la recta: $x - y + 4 = 0$, determinar:
- * los vértices del triángulo $A'B'C'$,
 - * las coordenadas del circuncentro del triángulo $A'B'C'$.
42. El punto P de intersección de las medianas de un triángulo está situado en el eje de abscisas; dos de sus vértices son los puntos $A(2; -3)$ y $B(-5; 1)$; el tercer vértice C está en el eje de ordenadas. Determinar:
- i) las coordenadas de los puntos P y C ,
 - ii) el área del triángulo.
43. De un triángulo ABC se conocen el ortocentro $H(-4; 2)$ y los puntos $D(-7; 3)$ y $E(-3; -5)$, pies de las alturas trazadas desde los vértices A y B , respectivamente. Determinar:
- * los vértices del triángulo,
 - * el pie de la altura que parte del vértice C .
44. Se tienen sobre dos rectas l_1 y l_2 , dos ternas de puntos colineales: $A(3; 2)$, $B(4; 2)$, $C(8; 2)$ sobre l_1 , $D(6; 8)$, $E(4; 6)$ y $F(2; 4)$ sobre l_2 . Se une A con F , y C con E , cuya intersección es el punto P . Se une B con F , y C con D , cuya intersección es el punto Q . Finalmente, se une B con E , y A con D , cuya intersección es el punto R . Se pide determinar las ecuaciones de las rectas l_1 y l_2 . Además, verificar que los puntos P , Q y R son colineales.

45. Los puntos $A(5; 8)$, $B(-7; 0)$, $C(-6; 5)$ y $D(2; -7)$ determinan los segmentos AB y CD , que se cortan en P .
- Verificar que AB y CD son cuerdas de una circunferencia con centro en $Q(1; 1)$.
 - Determinar las coordenadas del punto P y la medida del ángulo que forman las cuerdas.

46. Determinar las ecuaciones de dos paralelas a las rectas:
 $2x - 3y + 18 = 0$ $2x - 3y - 36 = 0$,
 situados entre ellas, de manera que las cuatro determinen en cualquier secante, segmentos iguales.

47. Dos rectas perpendiculares se cortan en $P(4; 6)$ y determinan en el eje de ordenadas un segmento de 10 u. *se refiere a distancia o valor absoluto de la*
 ¿Cuál es el área del cuadrilátero cuyos lados son los ejes coordenados y las rectas descritas? *longitud del segmento rectilíneo.*

48. Las bases de un trapecio isósceles son de 20 u. y de 10 u., cada uno de sus lados iguales es de 13 u. La base menor está sobre la recta: $x - 5 = 0$, estando bisecada por el eje de abscisas. Determinar los vértices y el área del trapecio.

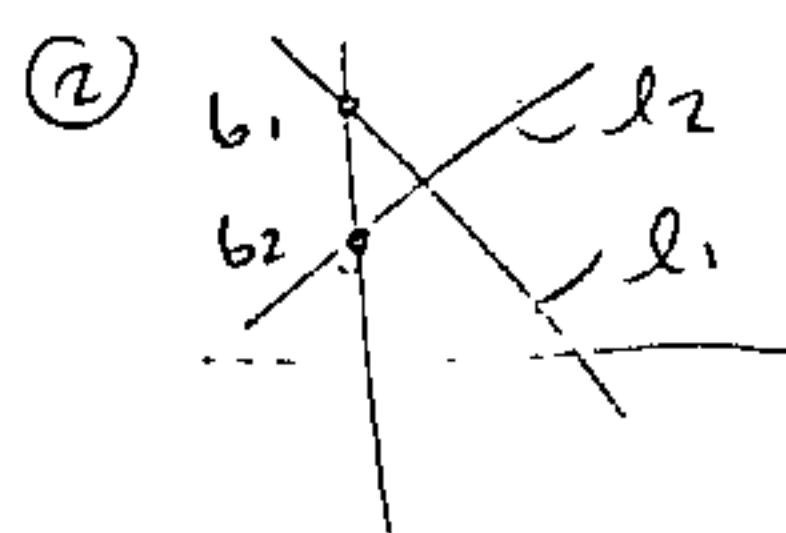
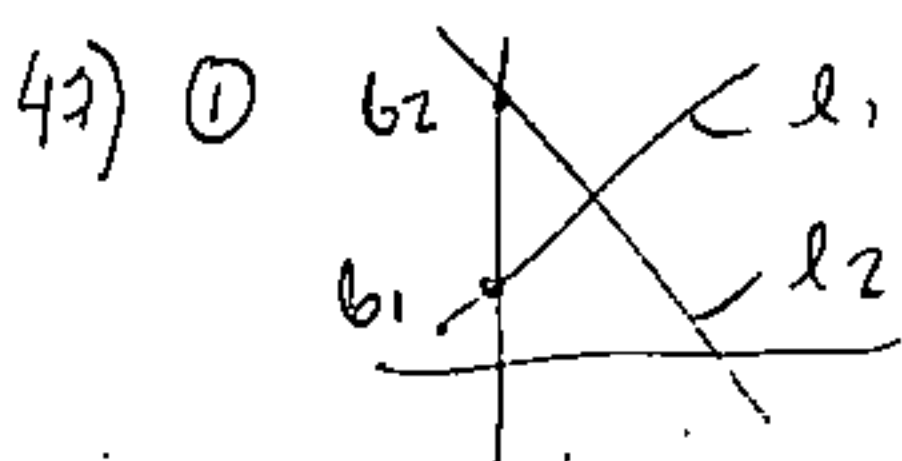
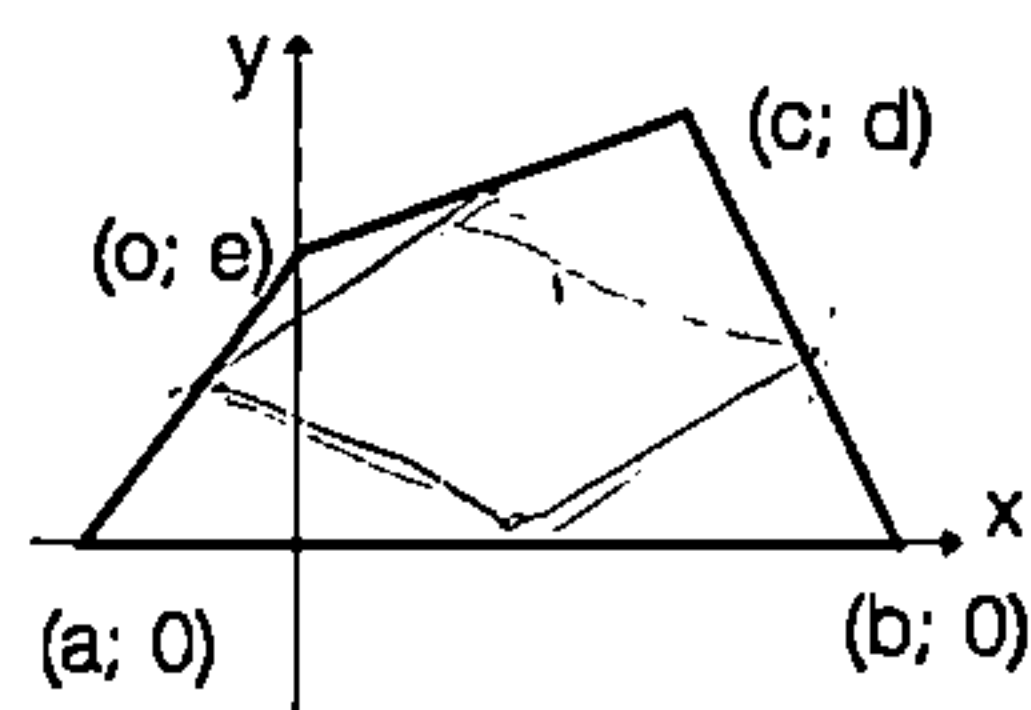
49. Determinar el vértice B de un rectángulo $ABCD$, sabiendo que los vértices A y C tienen por coordenadas $(-4; 3)$ y $(7; 1)$, y que el vértice buscado está sobre la recta

$$x + 2y + 7 = 0.$$

50. Demuestre que la ecuación: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$, $AC \neq 0$, representa dos rectas diferentes o coincidentes que pasan por el origen de coordenadas o ningún lugar geométrico. (Se sugiere despejar la variable "y" en función de la variable "x" y luego hacer la discusión).

Determinar además, cuándo estas rectas son perpendiculares.

51. Demuestre que las rectas que unen los puntos medios de los lados adyacentes del cuadrilátero mostrado, forman un paralelogramo.



52.

El punto $E(1; -1)$ es el centro de un cuadrado, uno de cuyos lados está en la recta

$$x - 2y + 12 = 0$$

Hallar las ecuaciones de las rectas en las que están los otros lados del cuadrado.

53.

Una recta de pendiente $-\frac{2}{3}$ corta a las rectas

$$x - y + 4 = 0$$

$$6x - y - 26 = 0$$

$$8x + y - 66 = 0$$

en los puntos P , Q y R respectivamente, tales que P y R sean puntos simétricos con respecto al punto Q . Determine dicha ecuación.

54.

Hallar las ecuaciones de los lados del triángulo ABC , si se dan uno de sus vértices $A(1; 3)$ y las ecuaciones de las medianas:

$$x - 2y + 1 = 0$$

$$y - 1 = 0.$$

55.

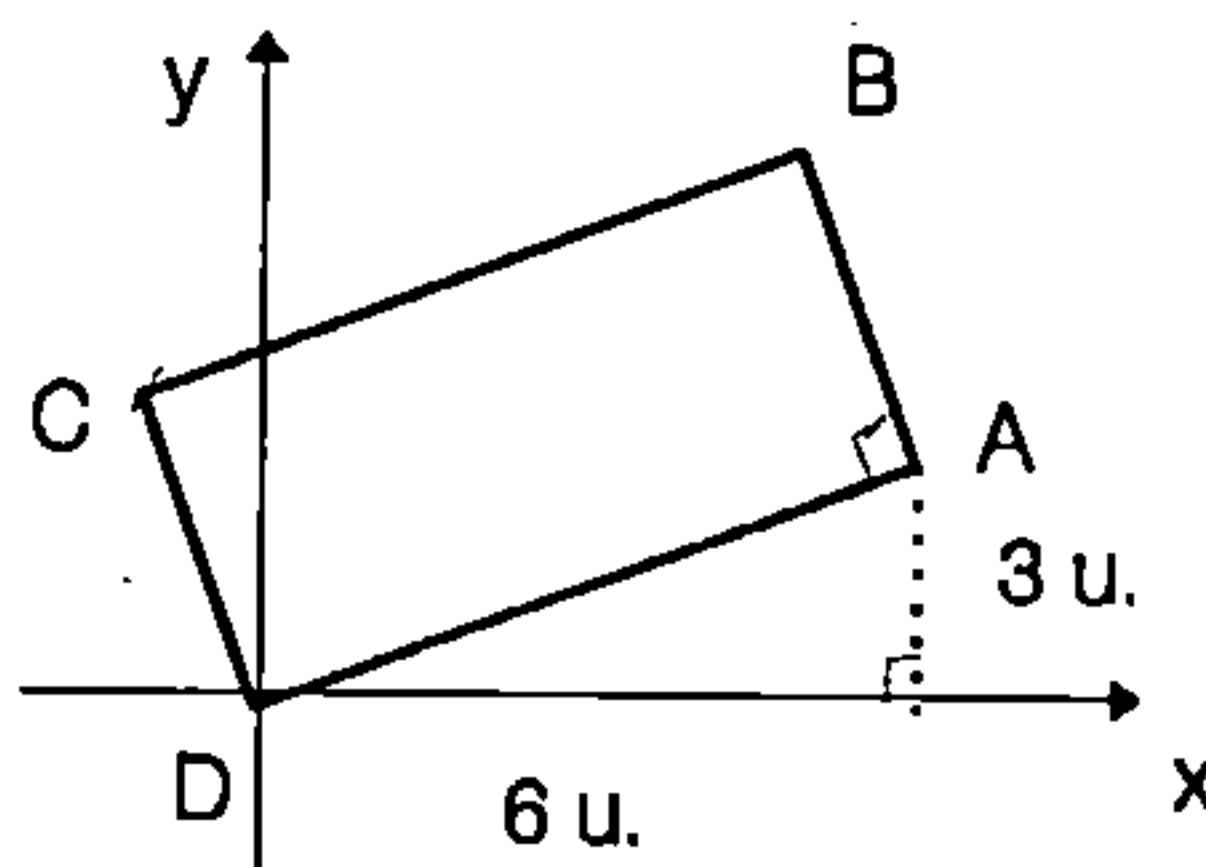
Un punto P está sobre una recta paralela al eje de abscisas y a dos unidades abajo de él. Un móvil, a velocidad constante, llega del punto P al origen en la mitad del tiempo que al punto $A(6; 2)$. Hallar las coordenadas del punto P .

56.

La placa rectangular $OABC$, de dimensiones $OA = 3\sqrt{5}$ u. y $AB = \sqrt{5}$ u., tiene la posición mostrada.

Determinar:

- * la ecuación de la recta que pasa por el origen y el punto B ,
- * las coordenadas de los puntos B y C .



57.

Para qué valores de p y q las rectas:

$$px - 2y - 1 = 0$$

$$6x - 4y - q = 0$$

- i) tienen un punto común,
- ii) son paralelas,
- iii) son perpendiculares,
- iv) coinciden.

58.

Determinar las coordenadas de los vértices de un triángulo si los puntos medios de sus lados son $(2; -1)$, $(3; 4)$ y $(-1; 2)$. Escribir además la ecuación del lado de menor pendiente del triángulo.

59. La ecuación de una recta es tal que la razón de abscisa a ordenada de cada uno de sus puntos es siempre cuatro.
- * ¿Pasa siempre esta recta por el origen?
 - * ¿Cómo será su ecuación si ejes se trasladan al punto $O'(8, 2)$?

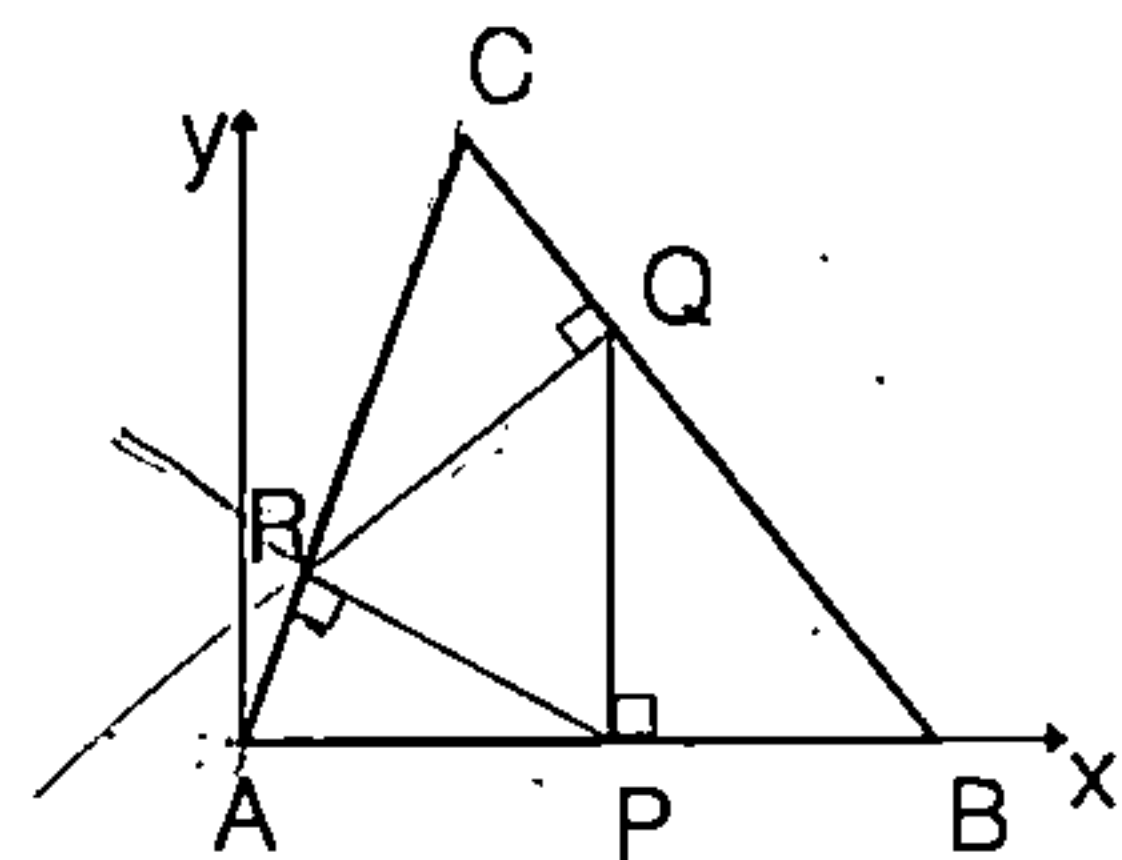
60. Dados los puntos $A(1; 3)$, $B(4; 6)$, $C(10; -1)$ y $D(14; -3)$. y la recta:

$$x - y - 14 = 0,$$
determinar las coordenadas de un punto P de la recta de manera que los triángulos APB y CPD sean equivalentes.
 NOTA: Dos triángulos son equivalentes cuando tienen la misma área.

61. Determinar las ecuaciones de los lados de un triángulo, conociendo uno de sus vértices $(1; 6)$ y las ecuaciones de la altura: $3x - 2y = 0$, y de la mediana: $x - y = 0$, trazadas desde un vértice.

62. Dada la ecuación $Ax + By + C = 0$, determinar la relación entre sus coeficientes de manera que:
- * la abscisa y la ordenada en el origen sean iguales,
 - * la inclinación de la recta sea 135° ,
 - * la recta pase por el punto $(1; 2)$,
 - * la recta pase por el origen.

63. En el triángulo de vértices $A(0; 0)$, $B(132; 0)$ y $C(44; 88)$, se inscribe el triángulo PQR , cuyos lados son perpendiculares a los lados del triángulo ABC , tal como se muestra. Determinar las coordenadas de los vértices y el área del triángulo PQR .



64. En el cuadrilátero $ABCD$, de vértices $A(-10; 15)$, $B(-4; 7)$, $C(2; 9)$ y $D(4; 13)$, los lados AB y DC se encuentran en E y los lados AD y BC , en F , formándose el cuadrilátero $AECFA$, denominado completo. Demostrar que los puntos medios de las diagonales AC , BD y EF del cuadrilátero están sobre una recta, llamada de Gauss o de Newton, cuya ecuación se desea conocer.

65. Hallar la ecuación de una recta que pase por el punto $Q(-1; 2)$ y que forme con la recta $x + 3y - 4 = 0$ un ángulo $\theta = \sin^{-1} 0,6$.

NOTA: $\theta = \sin^{-1} 0,6$ equivale a $\sin \theta = 0,6$; $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$$\therefore \sin^{-1} 0,6 = \arcsin 0,6.$$

66. Un segmento AB se apoya sobre los ejes coordenados: A está sobre el eje de abscisas y B sobre el eje de ordenadas. Si el punto $P(-3; 1)$ pertenece al segmento AB y se cumple:

$$\overline{PA} + 2\overline{PB} = 0$$

determinar la ecuación general y las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene al segmento AB.

67. Determinar las coordenadas del vértice C de un triángulo ABC, si se conocen el ortocentro $H(5; 2)$ y los vértices $A(6; -6)$ y $B(6; 4)$.

68. Demostrar que si A, B y $C \in \mathbb{R}$, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ representa dos rectas que pasan por el origen y estas rectas son reales y diferentes; reales y coincidentes o imaginarias según sea $B^2 - 4AC$ positivo, cero o negativo. ¿Qué condición deben satisfacer los coeficientes A, B y C para que la ecuación: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ represente dos rectas perpendiculares?

69. Sea l_1 una recta vertical que intersecta a otra l_2 en el punto $Q(3; 5)$. Hallar la ecuación de la recta l_2 , sabiendo que su pendiente es menor que la unidad y que el área del triángulo formado por las rectas l_1, l_2 y el eje X es 10 u^2 .

70. Entre las diversas formas de la ecuación de la recta, se tienen:

$$y = mx + b$$

Forma pendiente-ordenada

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Forma segmentaria

$$\begin{cases} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + a_2 t \end{cases}$$

Forma paramétrica

Nombre e interprete geoméricamente los parámetros m, a, b, a_1 y a_2 . Además, indique qué representa el par ordenado $(x_1; x_2)$ y cómo a partir de los parámetros a_1 y a_2 es posible determinar la pendiente de la recta definida por las ecuaciones paramétricas.

71. Demostrar que el cuadrilátero de vértices $A(-3; -4)$, $B(-2; 1)$, $C(2; 3)$ y $D(5; 0)$ es un trapecio. Además, determinar el punto de intersección P de los lados no paralelos y proyectar P sobre la mediana del trapecio.

72. Si $A(2; 3)$ y $B(11; 6)$ son los extremos de un segmento. Determinar el valor de k de modo que la recta:

$$L: 8x - ky - 43 = 0$$

divida al segmento AB en la razón $\frac{2}{7}$.

73. Los vértices de un triángulo son $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$ y $C(3; 5)$. Determinar la ecuación segmentaria, las ecuaciones paramétricas y la ecuación general de la recta que contiene a la perpendicular trazada por el vértice A a la mediana que parte del vértice B.

74. Hallar las coordenadas de los vértices y las ecuaciones de los lados de un triángulo ABC si se conocen las coordenadas de uno de sus vértices $B(-4; -5)$ y las ecuaciones de dos de sus alturas:

$$5x + 3y - 4 = 0$$

$$3x + 8y + 13 = 0$$

75. Qué representa y qué gráfica tiene cada una de las ecuaciones cartesianas siguientes:

a) $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 13 = 0$

b) $x^2 - xy + 6y^2 = 0$

c) $y^2 + 8y + 16 = 0$

d) $2x^2 + 3y^2 - 20x + 12y + 62 = 0$.

76. Los catetos de un triángulo rectángulo tienen por longitudes $3u$ y $4u$. La hipotenusa está sobre la recta: $y - 1 = 0$ y un vértice sobre el eje de ordenadas. Se desea conocer las coordenadas del vértice que corresponde al ángulo recto, si se encuentra en el primer cuadrante. $h = cte$.

77. Dos rectas pasan por el punto $P(5; 4)$ de manera que la suma de las coordenadas en el origen es -3 . Hallar la ecuación de mayor pendiente en las formas segmentaria, general, explícita y normal.

78. En el triángulo de vértices $A(9; -9)$, $B(6; 12)$ y $C(-6; -4)$, verificar la siguiente propiedad:

"En todo triángulo el ortocentro divide cada altura en dos segmentos, cuyo producto es constante."

79. Demostrar que la distancia del punto $(b; a)$ a la recta cuya abscisa y ordenada al origen son respectivamente a y b , puede expresarse en la forma:

$$\frac{|a^2 + b^2 - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

80. Si la distancia entre las rectas paralelas:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= p \\ 6x + qy &= r, \end{aligned}$$

es $\frac{\sqrt{13}}{13}$ unidades, determinar:

- el valor de q ,
- los valores de p y r , si se sabe que $\frac{r}{p} = 1,5$.

81. Determinar los puntos de la recta $3x + 4y - 50 = 0$ que equidisten de las rectas:

$$\begin{aligned} 2x + 11y - 25 &= 0 \\ x - 2y - 5 &= 0. \end{aligned}$$

82. Los vértices de un triángulo ABC son $A(-5; 2)$, $B(8; -5)$ y $C(-2; 5)$. Se traza la bisectriz exterior del ángulo C, la cual corta a la prolongación del lado AB en el punto Q. Determinar:

- las ecuaciones de los lados del triángulo,
- la ecuación de la bisectriz exterior del ángulo C,
- las coordenadas del punto Q.

83. En el triángulo de vértices $A(4; 7)$, $B(-1; -8)$ y $C(8; -5)$, determinar las ecuaciones de la altura, mediana y mediatriz correspondientes al lado AC, y la ecuación de la bisectriz del ángulo B.

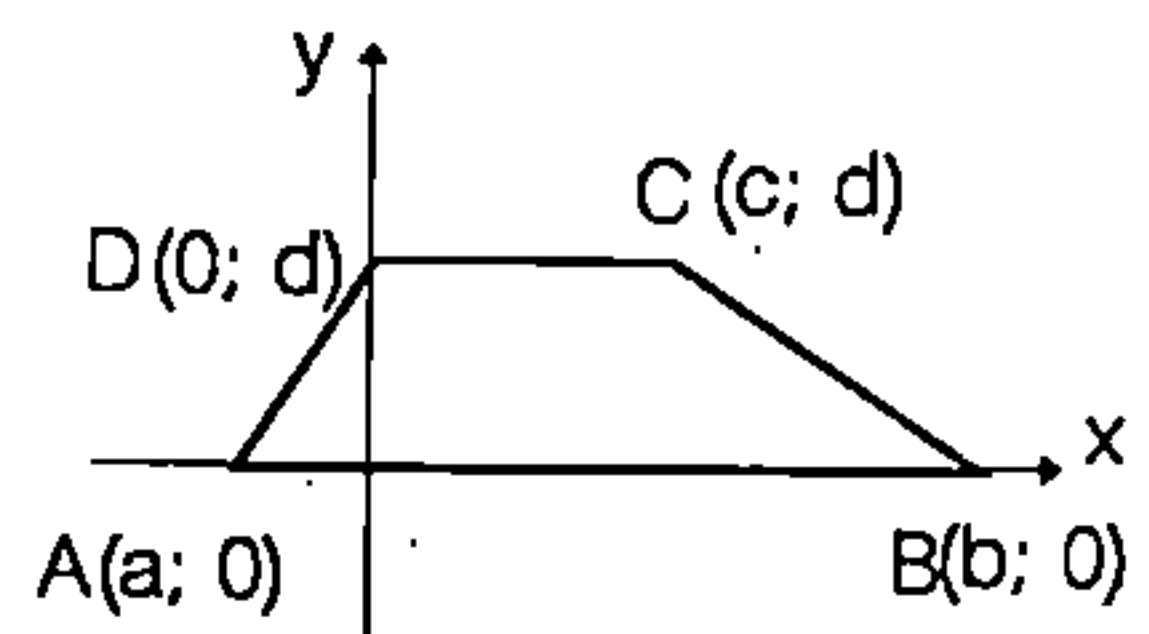
84. Sea el triángulo de vértices $A(3; 6)$, $B(-2; -9)$ y $C(7; -6)$. Determinar:

- las ecuaciones de sus lados,
- el incentro del triángulo,
- el área del triángulo mediano del triángulo dado.

85. En el triángulo de vértices $A(6; 1)$, $B(6; 7)$ y $C(-2; 1)$, verifique el siguiente teorema:

"Si los lados de un triángulo están en progresión aritmética, el segmento que une el circuncentro Q y el incentro I es perpendicular a la bisectriz del ángulo formado por el lado mayor y por el menor"

86. Dados los vértices $A(3; -14)$, $B(13; 6)$ y $C(-17; 6)$ de un triángulo ABC , determinar las coordenadas de:
- los vértices de su triángulo órtico,
 - el incentro del triángulo órtico.
- NOTA: El triángulo órtico es el que resulta al unir los pies de las tres alturas de un triángulo.
87. La recta $14x - 5y + 33 = 0$ es bisectriz de uno de los ángulos formados por las rectas: $12x + 5y + 19 = 0 \wedge 8x - 15y + 31 = 0$
Con centro en dicha bisectriz se traza la circunferencia de radio igual a 10 u. y tangente a los lados del ángulo. Determinar las coordenadas del centro de la circunferencia.
88. ¿Existen puntos de la recta $x - y - 63 = 0$, que equidisten de las rectas:
 $3x - 4y + 2 = 0$
 $5x + 12y - 34 = 0$?
 En caso afirmativo, encuentre sus coordenadas.
89. En un triángulo de vértices $A(5; 10)$, $B(-7; 6)$ y $C(8; 1)$, hallar la ecuación de la perpendicular trazada desde el vértice C a la bisectriz del ángulo externo del vértice A .
90. Determinar, sobre la recta $x + y - 8 = 0$, las coordenadas de un punto que equidiste de los segmentos AB y CD . Si $A(2; 9)$, $B(5; 8)$, $C(-1; 0)$ y $D(5; 2)$.
91. Determinar, si existen, el valor o valores de la constante C , de manera que la recta $l: 4x - 3y + C = 0$ no pertenezca a la familia de rectas:
 $\alpha(5x + 3y - 7) + \beta(3x + 10y + 4) = 0$
92. Determinar la familia de rectas cuyos interceptos en el eje de ordenadas sean iguales al valor negativo de su intercepto en el eje de abscisas. Determinar además, una recta de dicha familia cuya distancia al origen sea $5\sqrt{2}$ u.
93. Hallar la ecuación del conjunto de rectas que forman un ángulo de 45° con la recta de pendiente $\frac{2}{3}$ y ordenada en el origen igual a $-\frac{10}{3}$.
94. Hallar las ecuaciones de las rectas l_{AC} , l_{BD} y l_{MN} , donde M y N son los puntos medios de las bases del trapecio mostrado. Además, verifique que estas rectas son concurrentes.



95. Determinar e identificar el lugar geométrico de un punto móvil $P(x; y)$ tal que sus distancias a los segmentos AB y CD , sean inversamente proporcionales a las longitudes de éstas. Datos: $A(2; 5)$, $B(5; 9)$, $C(11; 12)$ y $D(6; 0)$.
96. Un terreno $ABCDE$, $A(50; 100)$, $B(-70; -10)$, $C(-10; -30)$, $D(70; 10)$ y $E(70; 150)$, sufre un proceso de expropiación a fin de construir una carretera de 20 metros de ancho, uno de cuyos bordes es el lado AB del terreno. Se pide determinar:
- * el área del terreno antes de la expropiación,
 - * las coordenadas del terreno luego de la expropiación,
 - * la ecuación del eje de la carretera por construir.
- El eje de la carretera es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los bordes de ella.
97. Determinar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias de radio igual a $5u$. y tangentes a la recta: $12x + 5y + 1 = 0$.
98. Una recta móvil AB pasa siempre por el punto fijo $A(0; 12)$ y determina con los ejes coordenados, el triángulo rectángulo AOB , donde B es un punto variable sobre el semieje positivo X y el ángulo OAB pertenece al intervalo $(0^\circ, 90^\circ)$. Determinar las ecuaciones cartesianas de los lugares geométricos que describen los puntos notables ortocentro y circuncentro de este triángulo variable. Además, presente en un mismo sistema de coordenadas, los gráficos de ambos lugares geométricos.
99. Un móvil $M(x; y)$ se mueve de tal modo que la suma de los cuadrados de sus distancias a dos vértices de un triángulo equilátero es igual al doble del cuadrado de su distancia al tercer vértice. Si los vértices del triángulo son $A(-\sqrt{3}; 0)$, $B(\sqrt{3}; 0)$ y $C(0; 3)$:
- * Verificar que el triángulo ABC es equilátero.
 - * Determinar el lugar geométrico que describe el punto M .
 - * Identificar el lugar geométrico del punto M y determinar su relación con el baricentro del triángulo ABC .
100. Un punto $Q(x; y)$ se mueve en un plano de manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(-2; 5)$ y $B(3; -7)$ es constante e igual a 8. (dos casos). Describa el lugar geométrico del punto Q y luego determinar su ecuación. ¿Tiene este lugar geométrico relación con la mediatriz del segmento AB ?
101. Desde el punto $(6; -8)$ se trazan todos los segmentos posibles con extremo en el eje de abscisas. Hallar la ecuación y la gráfica del lugar geométrico de los puntos medios de estos segmentos.

CIRCUNFERENCIA

102. Colocar verdadero [V] o [F] en los espacios mostrados, según corresponda.
PUNTAJE: 5 correctas, 4 puntos; 4 correctas, 3 puntos; 3 correctas, 2 puntos.

- [] ☒ La menor distancia entre las circunferencias:
 $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 9 \wedge (x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 1$, es 8 unidades.
- [] ☒ La recta $y = 6$ es tangente a la circunferencia
 $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$.
- [] ☒ La ecuación $(x + y)(x - y) + 2y^2 = 0$ representa una circunferencia punto.
- [] La recta $3x - 2y + 13 = 0$ es tangente a la línea
 $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$.
- [☒] La recta $ax + by = c$, es tangente a la circunferencia:
 $x^2 + y^2 = c$, si $a^2 + b^2 = c$.

103.

Responder en los espacios que se proporcionan; las operaciones necesarias se pueden realizar en el borrador (cara izquierda del cuadernillo). Puntaje: un punto por cada respuesta correcta.

- * La ecuación de la circunferencia que pasa por la intersección de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 96 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 18x - 8y + 48 = 0$$

y por el origen, es:

* La ecuación que contiene al diámetro de la circunferencia

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, que es perpendicular a la recta

$5x + 2y - 13 = 0$, es:

* Son dos las circunferencias tangentes a los ejes coordenados que pasan por $P(-11; 0)$. Las ecuaciones generales de estas circunferencias son:

- * La tangente a la circunferencia:

$x^2 + y^2 = c$, en el punto $P(a; b)$ de ella, es:

104. En algunos textos se encuentra el siguiente teorema:
 "Toda ecuación de segundo grado, con dos variables x e y y sin término en xy , de la forma: $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$, representa una circunferencia".
- El enunciado del teorema es incompleto en razón a que una ecuación de esta naturaleza puede ser una circunferencia, un punto o representar un conjunto vacío. ¿Podría el alumno completar el enunciado con las restricciones necesarias?
105. Dado el cuadrilátero ABCD, de vértices $A(-5; 5)$, $B(11; -3)$, $C(17; 9)$ y $D(1; 17)$. Determinar:
- si el cuadrilátero es cíclico o no,
 - las ecuaciones de las circunferencias inscritas en los triángulos ABD y ACD.
- NOTA: Cuadrilátero cíclico es el cuadrilátero inscrito en una circunferencia. De ser cíclico el cuadrilátero se debe indicar el centro y la longitud del radio de la circunferencia.
106. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro sobre la recta: $3x + y + 5 = 0$, si se sabe que es tangente a las circunferencias:
- $$C_1: x^2 + y^2 - 3x - 6y + 10 = 0$$
- $$C_2: x^2 + y^2 - 5 = 0,$$
- en su punto común.
107. Determinar la menor y la mayor distancia de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 2x$ al eje radical de las circunferencias:
- $$C_1: x^2 + y^2 + 5x - 8y + 1 = 0$$
- $$C_2: x^2 + y^2 - 3x + 7y - 25 = 0.$$
108. Los puntos $A(2; 3)$, $B(6; 7)$ y $C(10; 11)$ determinan los segmentos AB y BC, los cuales son diagonales de dos cuadrados. Determinar las ecuaciones de las circunferencias inscritas en los cuadrados y las ecuaciones de las cuatro tangentes comunes a las circunferencias.
109. Se trazan a una circunferencia con centro en $D(0; 0)$ y radio $\sqrt{65}$ u., dos tangentes en los puntos $A(-8; 1)$ y $C(7; 4)$, las cuales se cortan en B. Determinar el área del cuadrilátero ABCD.

110. Determinar la ecuación de una circunferencia que pasa por el punto $P(9; 12)$ y es tangente a la recta $2x - 3y - 8 = 0$, en el punto $Q(7; 2)$.
111. En el triángulo isósceles de vértices $A(4; 27)$, $B(1; 3)$ y $C(16; 6)$:
- 1.1 Determinar la ecuación de la circunferencia tangente a los lados iguales en los vértices de la base.
 - 1.2 Verificar que el punto $P(10; 10)$ pertenece a la circunferencia hallada y que su distancia a la base del triángulo isósceles es media proporcional entre las distancias del punto P a los lados iguales.
112. Determinar el centro $Q(h; k)$, h y $k \in \mathbb{Z}$, de una circunferencia de radio $\sqrt{10}$ u., que pasa por el punto $P(7; 5)$ y es tangente a la recta cuya ecuación es: $x - 3y + 4 = 0$.
113. En el triángulo de vértices $A(9; 3)$, $B(5; 15)$ y $C(0; 0)$, comprobar que el punto medio del lado BC , el pie de la altura trazada por el vértice A y las proyecciones de los vértices B y C sobre la bisectriz del ángulo A son cuatro puntos concíclicos. Para ello, determinar la ecuación general de la circunferencia que pasa por dichos puntos.
114. Determinar el centro de una circunferencia tangente exteriormente al cuadrilátero $A(0; 6)$, $B(4; -6)$, $C(0; -\frac{22}{7})$ y $D(-4; -6)$.
- Nota: La circunferencia buscada es tangente a las prolongaciones de los cuatro lados.
115. Determinar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $A(7; 17)$, $B(9; 11)$ y $C(-7; 3)$. Además, encuentre los puntos de la circunferencia de abscisa máxima y ordenada mínima.
116. Las rectas
- $$\begin{aligned} l_1: x - 3y + 1 &= 0 \\ l_2: 3x - y + 3 &= 0 \\ l_3: 3x - y - 17 &= 0 \\ l_4: x - 3y + 21 &= 0 \end{aligned}$$
- son tangentes a una circunferencia, cuya ecuación general se desea conocer.
117. En un triángulo de vértices $A(-1; 2)$, $B(5; 4)$ y $C(3; -2)$, verificar la siguiente propiedad:
- "El ortocentro H de un triángulo coincide con el centro radical R de las circunferencias cuyos diámetros son los lados del triángulo."
- NOTA: El centro radical es el punto de concurrencia de los ejes radicales de las circunferencias tomadas de dos en dos.

118. Determinar el centro de una circunferencia de radio igual a $3u.$, tangente a las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 14x - 16y + 64 = 0$$

119. Dadas las circunferencias

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$$

Determinar la ecuación de la cuerda común de las circunferencias, y la distancia entre el punto de ordenada máxima de la segunda circunferencia y el centro de la primera.

120. Determinar las ecuaciones de una circunferencia que pasa por la intersección de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y - 15 = 0,$$

cuyo centro esté sobre la recta a 45° que pasa por $(0; 0)$.

121. Determinar las ecuaciones de la circunferencia inscrita y de las exinscritas al triángulo de vértices $A(3; 6)$, $B(-2; -9)$ y $C(7; -6)$.

122. Determinar la ecuación de una circunferencia tangente al eje de abscisas, al eje de ordenadas y a la recta, cuya ordenada y abscisa en el origen son, respectivamente, 3 y 4 unidades.

123. Comprobar que los puntos $A(6; 4)$, $B(3; 7)$, $C(-5; 7)$ y $D(0; 8)$ son concíclicos, determinando el centro y el radio de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero ABCD.

124. Dadas la circunferencia $C: x^2 + y^2 - 2x - 14y + 25 = 0$, y la recta $l: 3x + y - 45 = 0$.

¿Existe algún punto de la circunferencia C cuya distancia a la recta l sea $2\sqrt{10}$ u.? ¿Existe algún punto de la recta l cuya distancia a la circunferencia C sea 30 u.? En caso afirmativo, dé sus coordenadas.

125. De un triángulo se conocen el vértice $A(-4; -1)$ y las ecuaciones de las circunferencias circunscrita: $(x - 1)^2 + (y - 9)^2 = 125$, e inscrita: $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 20$.
Determinar las coordenadas de los vértices B y C del triángulo.

126. Si $P_0(x_0, y_0)$ es un punto exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, demostrar que: $x_0x + y_0y = r^2$ es la ecuación de la secante que pasa por los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde el punto P_0 .

127. Desde el punto $P(-5; 3)$ se han trazado tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 10y = 0$,

formando un cuadrilátero PT_1QT_2 , donde T_1 y T_2 son los puntos de tangencia y Q el centro de la circunferencia.

Determinar:

- * las ecuaciones de las diagonales PQ y T_1T_2 ,
- * las coordenadas del centro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero PT_1QT_2 .

128. Si las prolongaciones de los lados opuestos de un cuadrilátero inscriptible determinan los puntos P y Q , comprobar que la longitud del segmento PQ y las longitudes de las tangentes trazadas desde P y Q a la circunferencia circunscrita, forman un rectángulo.

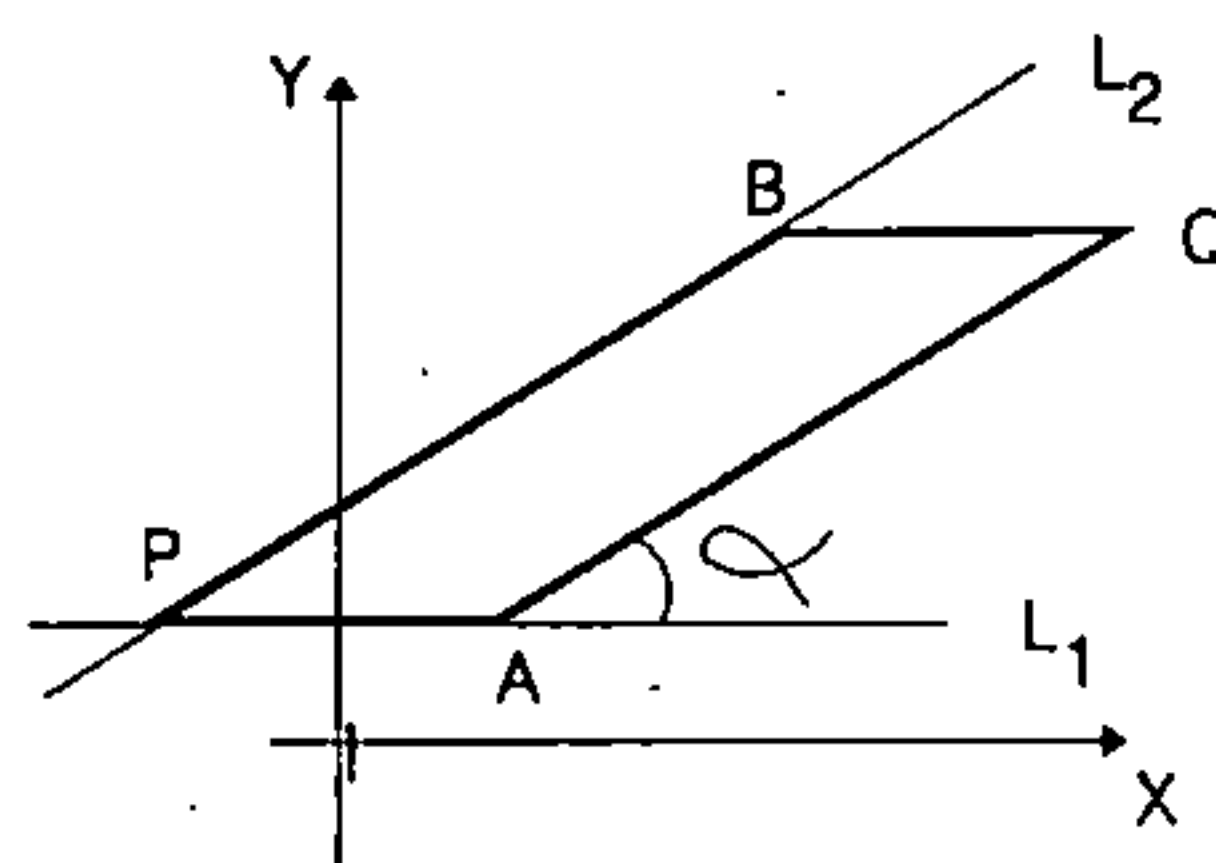
Tome como datos para la comprobación el cuadrilátero de vértices $A(1; -5)$, $B(-3; 3)$, $C(-11; 3)$ y $D(-11; -11)$, inscrito en la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 14x + 8y = 0.$$

129. Dos móviles parten de un punto P , siguiendo los recorridos PAQ y PBQ , tal como se muestra:

Datos: $P(-3; 4)$
 $l_1: y - 4 = 0$
 $l_2: 3x - 4y + 25 = 0$
 $\alpha = 45^\circ$
 $PA = PB = 10u$.

Determinar las coordenadas del punto Q y calcule la longitud de los recorridos PAQ y PBQ , sabiendo que $APBQ$ es un paralelogramo.



130. Una circunferencia pasa por los puntos $A(0; 1)$ y $B(1; 0)$, y su centro está sobre la recta $x + y = 4$. Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia y las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia paralelas a AB .

131. Verificar para $P(-7; -4)$, $Q(7; 4)$, $R(-1; 8)$ y $S(-7; 4)$, la siguiente propiedad:

"Sea PQ el diámetro de una circunferencia y, PR y QS dos cuerdas que se cortan en T, pudiendo estar T dentro o fuera del círculo de diámetro PQ. La circunferencia que pasa por R, S y T es ortogonal a la de diámetro PQ".

132. Las diagonales de un cuadrilátero inscriptible ABCD son perpendiculares. Si $A(2; 10)$, $B(-3; 9)$ y $C(-7; 1)$, determinar las coordenadas del punto D.

133. Los vértices de un triángulo ABC son $A(3; 10)$, $B(0; 1)$ y $C(15; 6)$. Determinar las coordenadas del punto de contacto, sobre el lado BC, de la circunferencia inscrita al triángulo.

134. Verifique que el cuadrilátero de vértices $A(60; -10)$, $B(0; 35)$, $C(-20; 20)$ y $D(-20; 10)$ es circunscriptible. Determine además, la ecuación general de la circunferencia correspondiente.

135. Determinar las coordenadas de los puntos en los cuales la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$$

corta a los ejes coordenados. Además, hallar las ecuaciones de las tangentes en esos puntos y el área de la figura que ellas determinan.

136. El problema de determinar la ecuación de una circunferencia tangente al eje x, que pase por el punto $(5; 4)$, y que su centro se encuentra sobre la recta

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 7 - t \end{aligned}$$

da dos respuestas. Se pide determinar la ecuación de la cuerda común y su longitud.

137. "En todo cuadrilátero inscriptible, los baricentros de los cuatro triángulos formados por dos lados y una diagonal, son vértices de un cuadrilátero semejante al dado, cuyos lados son la tercera parte de los respectivos lados homólogos"

Verifique la propiedad enunciada para los puntos: $A(9; 45)$, $B(-12; 24)$, $C(33; 9)$ y $D(33; 33)$, vértices de un cuadrilátero inscrito en la circunferencia:

$$(x - 12)^2 + (y - 21)^2 = 585$$

138. Determinar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia con centro en el origen y radio $r = \sqrt{A^2 + B^2}$.

139. Dadas las circunferencias

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 6x + 8y - 1 &= 0 \\x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 &= 0\end{aligned}$$

de diámetros AD y CD, demostrar que los puntos A, B y C son colineales, siendo B y D puntos comunes de las circunferencias (D en el primer cuadrante).

140. Desde el punto A(8; -2) se trazan dos rectas tangentes perpendiculares entre sí a una circunferencias de radio 5 u., cuya ecuación se desea determinar, sabiendo que su centro Q es un punto de la recta: $3x + y = 0$.

141. Determinar la ecuación general de la ecuación de la circunferencia tangente al eje de ordenadas y que pase por el punto (4; -5), si su centro está sobre la recta:

$$\begin{cases} x = 6 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

142. Escribir las ecuaciones ordinarias (canónicas) de las circunferencias de radio unitario tangentes a las rectas:

$$x = 2 \quad \text{e} \quad y = -3.$$

Además, determinar las ecuaciones generales (normales) de las circunferencias tangentes a las cuatro primeras. Presente las gráficas de todas las circunferencias en un mismo sistema de coordenadas.

143. Dadas las circunferencias:

$$C_1: x^2 + y^2 - 12y + 32 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$$

$$C_3: x^2 + y^2 + 10y + 24 = 0$$

$$C_4: x^2 + y^2 - 16 = 0,$$

verificar, haciendo las comprobaciones necesarias, que la circunferencia C_4 es tangente externamente a las circunferencias C_1 y C_3 , e internamente a C_2 .

144. Describa, en un máximo de dos líneas, la propiedad común que caracteriza a cada una de las siguientes familias mono paramétricas, de parámetro $k \in \mathbb{R}$. Además indique, de existir, la interpretación geométrica del parámetro.
- ** $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = K^2$
- ** $x \cos 48^\circ + y \sin 48^\circ - k = 0$, donde $k > 0$
- ** $kx - y + 7 = 0$
- ** $\begin{cases} x = k + 2t \\ y = 2k - 3t \end{cases}$
145. Dada la circunferencia: $C: x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$,
- Determinar la ecuación de la circunferencia simétrica a C , con respecto al origen de coordenadas, e indicar la posición relativa de estas dos circunferencias.
 - Definir el eje radical de dos circunferencias, y determinar la ecuación de dicho eje en el problema propuesto.
146. Hallar la ecuación de una circunferencia con centro en el punto $Q(3; -1)$, si determina en la recta $2x - 5y + 18 = 0$, una cuerda de 6 u. de longitud.
147. Determinar la ecuación de una circunferencia de radio 5 u. tangente a la recta $x - 12 = 0$, si intercepta en la recta $x - 4 = 0$ una cuerda de 8 u. de longitud, y se sabe además que las coordenadas de su centro difieren en 2 u.
148. Los vértices de un cuadrado son los puntos: $A(a; a)$, $B(-a; a)$, $C(-a; -a)$ y $D(a; -a)$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto $Q(x; y)$ que se mueve en el plano de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los lados de este cuadrado es constante e igual a $6a^2$.
149. Dos móviles A y B, con velocidades de 10 m/seg y 5 m/seg, respectivamente, parten simultáneamente: A desde el origen de coordenadas hacia la derecha, sobre el eje X y B(x; y) desde un punto que se pide determinar, de tal manera que, siguiendo una trayectoria rectilínea, encuentre al primer móvil a 60 m. del origen.
150. Un segmento AB, de longitud igual a 18 u., desliza sus extremos a lo largo de los ejes coordenadas formando un triángulo variable AOB. Qué lugar geométrico describe cada uno de los siguientes puntos notables del triángulo AOB:
- a) ortocentro b) baricentro c) circuncentro.

151. Se tiene un segmento de extremos $A(9; 0)$ y $B(-1; 0)$ y un punto de él, $C(1; 0)$. Una circunferencia de radio " r " pasa por los puntos A y C , y otra, de igual radio, por los puntos B y C . Estas circunferencias tienen en común los puntos C y D . Se quiere determinar e identificar el lugar geométrico que describe el punto D , cuando varía el valor de " r ".

NOTA: En este problema tenga presente la siguiente propiedad geométrica: "En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, cuerdas iguales subtienden arcos iguales".

152. Dados los puntos $A(0; 0)$, $B(4; 0)$ y $C(12; 0)$, determinar el lugar geométrico de los puntos $P(x; y)$ desde los cuales se ven los segmentos AB y BC bajo ángulos iguales.

Además, identifique, discuta y grafique la ecuación del lugar geométrico hallado.

153. Determinar e identificar el lugar geométrico del vértice C de un triángulo ABC , conociendo dos de sus vértices: $A(3; 0)$ y $B(-3; 0)$, si se sabe que la mediana que parte del vértice B tiene una longitud constante e igual a 5 u.

154. Dado el triángulo de vértices $A(\frac{a}{2}; 0)$, $B(-\frac{a}{2}; 0)$ y $C(0; \frac{a\sqrt{3}}{2})$, $a > 0$.

- Clasificar el triángulo por sus lados y ángulos.
- Comprobar que el lugar geométrico que describe un punto móvil $M(x; y)$, cuando:

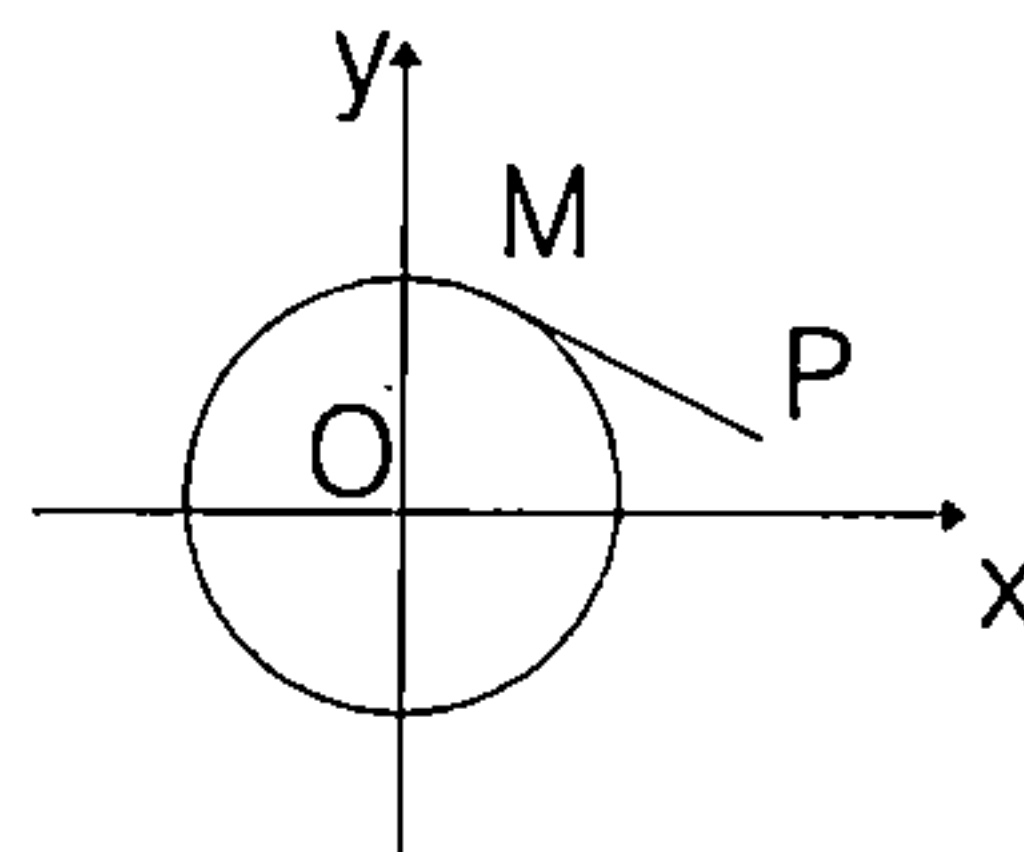
$$d_{MA}^2 + d_{MB}^2 + d_{MC}^2 = 2a^2,$$

es la circunferencia: $x^2 + (y - \frac{R}{2})^2 = R^2$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

155. Los griegos resolvieron geoméricamente el siguiente problema:
"Sean A y B dos puntos dados en el plano; encontrar el lugar geométrico de los puntos M , cuyas distancias al punto A sean k veces sus distancias al punto B ."

- * Determinar e identificar la ecuación del lugar geométrico si $A(0; 0)$, $B(3; -6)$ y $k = 2$.
- * ¿Existe o no un valor de k de manera que el lugar geométrico sea una recta? De existir, cuál es ese valor, y cuál es la ecuación de la recta para $A(2; 0)$ y $B(4; 0)$.

156. Dados los puntos $A(0; 0)$, $B(4; 0)$ y $C(12; 0)$, encontrar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $M(x; y)$ desde los cuales se ven los segmentos AB y BC bajo el mismo ángulo.
157. Determinar e identificar el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de manera que el segmento de extremos $A(-2; 0)$ y $B(2; 0)$ se vea desde ese punto bajo un ángulo cuya tangente es siempre igual a 2. Además, analizar si los puntos $(1; 3)$ y $(1; -3)$ satisfacen la condición, si es así, ¿están ellos en su solución? Graficar el lugar geométrico.
158. Una rueda de centro O y radio r gira en un plano vertical. En un punto M de la circunferencia se tiene una varilla MP de longitud " l ", rígidamente unida a la rueda de manera que OM y MP son perpendiculares.
- Determinar el lugar geométrico que describe el extremo P .



PARÁBOLA

159. Marque en el espacio correspondiente [V] o [F] según sean verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. PUNTAJE: 5 ó 6 correctas, 4 puntos; 4 correctas, 3 puntos; 3 correctas, 2 puntos.
- [F] El foco de la parábola $y^2 + 4x = 0$ es el punto (0; 1).
 [F] La directriz de la parábola: $y^2 - 16x = 0$, es $y = -4$
 [] Si la recta $2x + y + 17 = 0$ es directriz de una parábola, y el punto F(2; -1) es su foco, su vértice es el punto V(1; -2).
 [] Las tangentes en el vértice y en cualquier otro punto de una misma parábola, son concurrentes.
 [] La cuerda de una parábola con un extremo en el vértice y el otro, en un extremo de su "latus rectum", tiene una longitud igual a $\sqrt{5}$ veces la distancia entre el vértice y el foco.
 [] La ecuación de la directriz de una parábola con extremos de su "latus rectum" en los puntos (3; 1) y (3; 5), que se abre hacia la derecha, es: $x = 1$.
160. Hallar la ecuación de la parábola de eje vertical que pasa por los puntos (0; 0), (1; 0) y (3; 6). Además, encontrar la longitud del segmento que la parábola determina en la bisectriz del primer cuadrante.
161. Los puntos L(7; 5), R(3; -3) y H(1; 3) son respectivamente, los extremos del "latus rectum" y el punto de intersección del eje y la directriz de una parábola. Determinar:
- * el vértice y la ecuación de la directriz,
 - * las abscisas de los puntos donde la parábola corta al eje x.
162. Sean $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ los puntos extremos de una cuerda focal de una parábola $y^2 = 4px$. Trazar una figura y demostrar los siguientes enunciados:
- * La longitud de esta cuerda es $x_1 + x_2 + 2p$.
 - * Una circunferencia trazada con la cuerda focal como diámetro es tangente a la directriz.
163. Determinar e identificar el lugar geométrico de los puntos medios de los radios vectores de la parábola: $y^2 - 16x = 0$.
 NOTA: Radio vector es el segmento que une el foco de la parábola con un punto de ella.

164. El foco de una parábola es el punto $(-6; -1)$ y la recta: $2x - y - 9 = 0$, es su directriz.
Determinar:
- * el punto de la directriz más próximo a la parábola,
 - * la ecuación general de la parábola.
165. Un punto $P(x; y)$ se mueve en un plano de manera que sus distancias mínimas a las líneas: $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0 \wedge x + 2 = 0$, son iguales entre sí.
- i) Determinar la ecuación del lugar geométrico del punto P.
 - ii) Discutir, graficar e identificar el lugar geométrico.
166. Una parábola de eje vertical tiene 16 cm. de ancho a una distancia de 6 cm. del vértice. ¿Qué ancho tiene a la altura del foco?
167. Compare la longitud del "latus rectum" de una parábola con la longitud del radio vector que forma con el eje focal un ángulo de 60° (Parábola: $y^2 = 4px$, $p > 0$).
168. La normal en el punto $T(-1; -19)$ de una parábola es la recta:

$$x - 3y - 56 = 0,$$
y su eje focal, la recta:

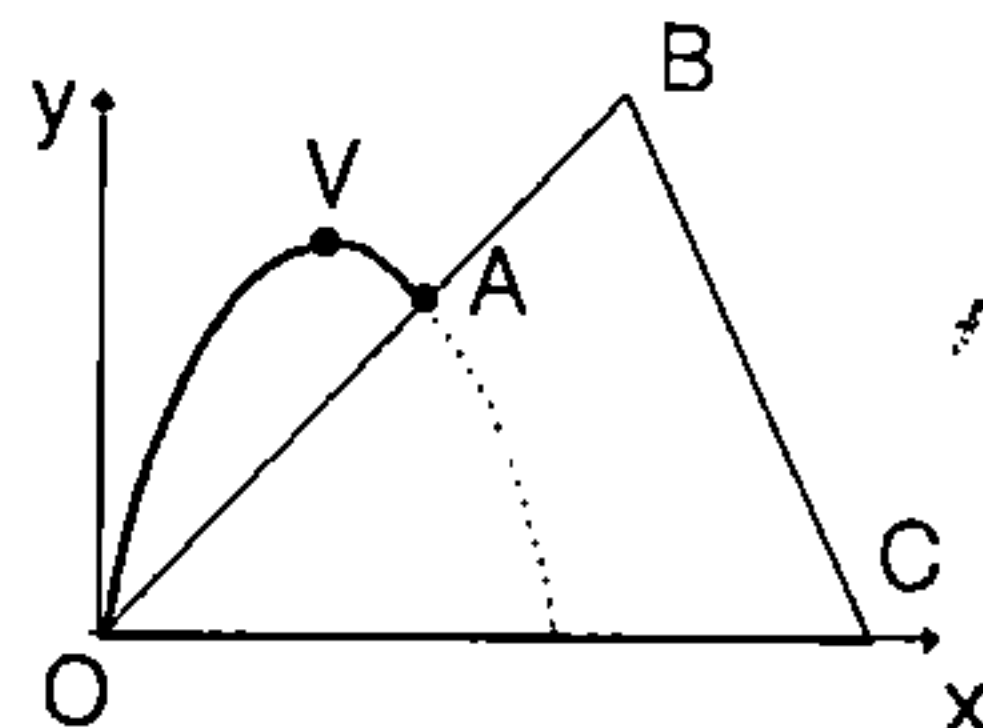
$$x + y + 4 = 0.$$
Determinar las coordenadas del foco de la parábola.
NOTA: La normal en T es la perpendicular a la tangente de la parábola en el punto de contacto T.
169. Dos tangentes a la parábola $y^2 = 4x$ tienen pendientes 1 y $-\frac{1}{2}$ respectivamente. Encontrar las coordenadas del punto de intersección de las tangentes.
170. Por un punto fijo $A(5; 2)$ se traza el segmento AB, donde B es un punto de abscisa uno. Si por A se traza una perpendicular al segmento AB, y por B la perpendicular al eje de ordenadas, ambas perpendiculares se cortan en un punto P. Determinar e identificar el lugar geométrico que describe el punto P, si B es un punto cuya abscisa es siempre igual a uno.
171. Determinar la ecuación de la cuerda común a las parábolas:

$$P_1: y^2 - 2x - 12 = 0$$

$$P_2: y^2 - 4x + 2y = 0$$
Además, calcular el área del triángulo cuyos vértices son los vértices de las parábolas dadas y el punto medio de la cuerda común.

172. Los puntos $L(-1; 8)$ y $R(3; -4)$ son los extremos del "latus rectum" de una parábola cuyo vértice está en el segundo cuadrante. Determinar:
- * las coordenadas del foco,
 - * la ecuación de la directriz,
 - * la ecuación de la parábola.
173. Un arco de puente tiene la forma de una parábola, la luz es de 12 metros y la altura máxima es de 3 metros. Hallar la altura del arco a intervalos de 1,50 metros, desde un extremo hasta el centro.
174. Si desde el punto $P(3; 7)$ se trazan las tangentes PT_1 y PT_2 a la parábola: $y^2 = 8x$, verificar:
- * La recta que pasa por P y H , punto medio de la cuerda T_1T_2 , es un diámetro de la curva.
 - * La recta RS que pasa por los puntos medios de los segmentos PT_1 y PT_2 es también tangente a la curva, en su punto medio T_3 .
- NOTA: R y S son los puntos medios de los segmentos PT_1 y PT_2 .
175. Es necesario encerrar un campo rectangular mediante una cerca de 120 metros de longitud. Determinar e identificar la relación existente entre el área "y" del campo, cuando uno de sus lados es "x". Trace la gráfica para $0 \leq x \leq 60$. ¿Para qué valor de x el área es máxima?
176. Los extremos de una cuerda de 24 cm. de longitud se fijan en el origen de coordenadas. Manteniendo la cuerda tensa, se forma un triángulo isósceles variable AOB , el cual tiene siempre su base AB paralela al eje X . Si AB varía de longitud, demostrar que tanto A como B se desplazan sobre parábolas, cuyas ecuaciones se desea conocer.
177. Determinar la distancia del vértice a la directriz de la parábola:
 $x^2 + ax + by + c = 0$.
178. La directriz de una parábola, cuya ecuación se pide, es $x + y - 2 = 0$, y su foco es el punto $F(-5; -1)$. Además, determinar la abscisa del punto de la parábola más próximo al eje de ordenadas.
179. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y los extremos del "latus rectum" de la parábola: $y^2 - 8y - 8x + 32 = 0$. Verifique que el área de este círculo es cinco veces el área del círculo cuyo diámetro es el segmento que une el vértice y un extremo del "latus rectum".

180. Existen dos parábolas que tienen por foco el punto $F(-7; -3)$, pasan por el punto $P(-16; 9)$ y sus directrices pasan por el punto $(-1; 24)$. Determinar las ecuaciones de las directrices.
181. Dos rectas perpendiculares son tangentes a la parábola $y^2 = -12x$ y la pendiente de una de ellas es $-\frac{3}{2}$. Hallar las coordenadas del punto de intersección de dichas perpendiculares.
182. Una parábola de eje focal horizontal pasa por los puntos $A(0; 1)$, $B(3; 3)$ y $C(8; 5)$. Determinar la ecuación ordinaria de la parábola y el área del triángulo que tiene como lados cuerdas de la parábola, cuyos extremos están sobre los ejes coordenados.
183. Un punto $P(x; y)$ se mueve en un plano de manera que sus distancias mínimas a las líneas: $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0 \wedge x + 2 = 0$, son iguales entre sí.
- * Determinar la ecuación del lugar geométrico.
 - * Discutir, graficar e identificar el lugar geométrico hallado.
184. Dada la parábola $x^2 - 6x + 8y + 41 = 0$, determinar:
- * "m", si la recta $y = mx + 2$, es tangente a ella,
 - * la ecuación de una recta horizontal que intercepte en la parábola un segmento de 8 u. de longitud.
185. Un móvil $P(k; 0)$ recorre el lado OA de un triángulo OAB de vértices $O(0; 0)$, $A(10; 0)$ y $B(8; 10)$. Si por P se trazan las paralelas PQ y PR a los otros dos lados, expresar el área S del triángulo PQR en función de k . Determinar además, el máximo valor que puede tomar el área S .
186. Explicar qué entiende por diámetro de una parábola. Además, determinar la ecuación de una cuerda de la parábola $y^2 = 12x$, que pase por el punto $P(4; 6)$ de manera que P sea punto medio de la cuerda.
187. La gráfica muestra la trayectoria de un proyectil, el cual describe una parábola de eje vertical. El proyectil alcanza su máxima altura en $V(600; 800)$ e impacta en la ladera de la colina OBC en el punto A . Hallar la ecuación de la trayectoria y las coordenadas del punto de impacto, si $B(1000; 1000)$.

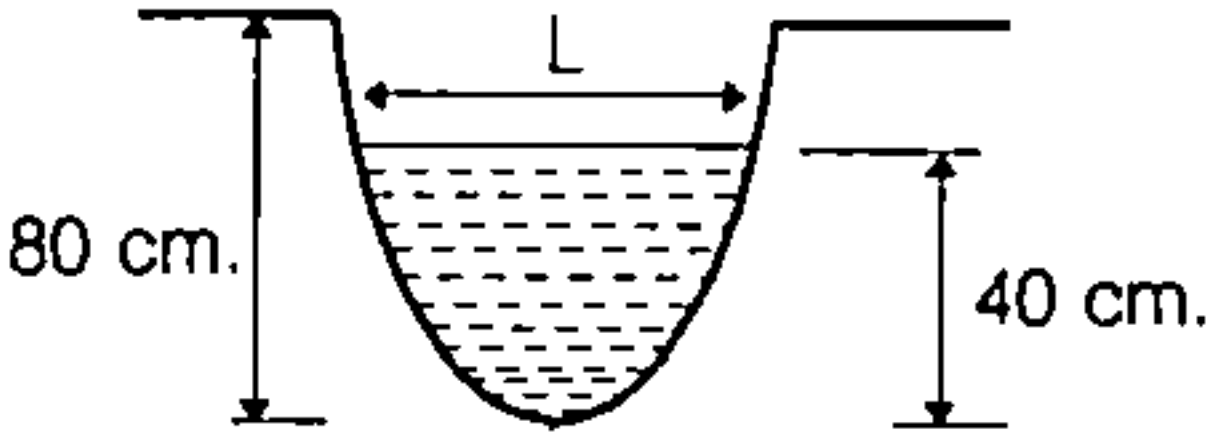


188. En la parábola $y^2 - 8x - 4y + 12 = 0$, la tangente en el punto $T(9; 10)$ corta a la directriz en D y la normal en T corta al eje focal en N . Si F es el foco de la parábola.
- * Determinar la medida del ángulo DFT .
 - * Demostrar que el triángulo TFN es isósceles.
189. Un móvil se desplaza por la rama superior de la parábola:
 $P: y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$, y otro móvil, por la recta $l: x - 2y + 18 = 0$. En un instante, ambos están sobre el eje de ordenadas y sus movimientos son tales que, en cada segundo sucesivo, ambos están sobre una misma vertical. Se desea conocer el instante en que ambos están lo más próximo posible.
190. Hallar la ecuación del diámetro de la parábola $P: (y - 4)^2 = -8(x - 2)$ que corresponde a un sistema de cuerdas paralelas de pendiente igual a 2.
191. Determinar la ecuación del lugar geométrico que describe el centro de una circunferencia móvil de radio variable tangente a las líneas:
 $x^2 + y^2 = 16 \wedge x = 8$. Además, encuentre el dominio de la relación.
192. Calcular la longitud de la cuerda común a las parábolas:
 $P_1: x^2 - 2y - 12 = 0$
 $P_2: x^2 + 2y - 4y = 0$
 Además, calcular el área del triángulo que resulta al unir los extremos de la cuerda común con el origen de coordenadas.
193. Las ecuaciones:
 I) $x^2 + y^2 - 2kx - 2ky + k^2 = 0, \quad k > 0$
 II) $y^2 + 8kx + 2ky + k^2 = 0, \quad k > 0$,
 representan: una familia de circunferencias de parámetro k , y la otra, representa una familia de parábolas, también de parámetro k . Interprete geométricamente el valor del parámetro k en cada caso y enuncie la propiedad que caracteriza cada familia, de manera que los enunciados describan el conjunto de líneas que cada familia representa.
194. En la parábola $P: y^2 = 8x$ y cuerda focal de pendiente $\frac{4}{3}$, verificar la siguiente propiedad:
 "En toda parábola, la longitud de una cuerda focal cualquiera es el cuádruplo del radio vector que va al punto de contacto de la tangente paralela a dicha cuerda."

195. Una parábola tiene su foco en $F(8; 5)$ y su directriz es la recta $l_d: x + y - 5 = 0$.
- Hacer un bosquejo de la gráfica de la parábola.
 - Determinar la ecuación de la parábola.
 - ¿Qué abscisa tiene el punto de la parábola que equidista de los ejes coordenados?
196. El foco de una parábola es el punto $F(4; 0)$ y su directriz es la recta de ecuación: $2x - y - 2 = 0$.
- Hacer un bosquejo de la gráfica sobre un sistema de coordenadas y encontrar su ecuación.
 - Determinar el punto de ordenada máxima de la parábola.
197. Hallar el ángulo que forman las tangentes comunes a las cónicas:
- $$x^2 + y^2 = 4$$
- $$3x^2 - 16y = 0.$$
198. Dada la familia:
- $$\alpha(y^2 - 4x) + \beta(x^2 - 4y) = 0$$
- ¿Qué representa esta familia si $\alpha = \beta$, pero diferentes de cero?
 - ¿Qué representa la familia en los siguientes casos:
 - $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$
 - $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$
 - Determinar si las líneas determinadas por las ecuaciones del acápite anterior son secantes, tangentes o representan conjuntos disjuntos.

202. Por el punto $(3; 2)$ y por los extremos del eje mayor de la elipse: $4x^2 + 9y^2 = 72$, se trazan tres tangentes a la elipse, las que determinan con su eje mayor, un trapecio. Calcular el producto de las bases de dicho trapecio.
203. Una elipse de eje focal paralelo al eje x pasa por el punto $(0; 0)$ y tiene sus vértices en la circunferencia: $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$, y es concéntrica con ella. Determinar la ecuación general de la elipse.
204. Se inscribe un cuadrado en la elipse $16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$. Se pide determinar las coordenadas de los vértices del cuadrado y el perímetro del rombo cuyos lados son tangentes a la elipse en los vértices del cuadrado.
205. Determinar las tangentes a la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$, que tienen una inclinación de 45° . Además, determinar el área del cuadrilátero formado por las tangentes a la elipse de pendientes 1 y 0.
206. El eje normal de una elipse tiene por ecuación $x - 6 = 0$, y uno de sus vértices es el punto $(14; 5)$. Determinar la ecuación general de esta elipse si su eje menor se ve desde uno de los focos bajo un ángulo de 90° .
207. De una elipse con centro en $Q(2; -3)$, se conoce uno de sus focos $F(2; -1)$ y una de sus directrices: $y + 11 = 0$.
Determinar:
- * la ecuación de la elipse,
 - * la longitud de uno de sus diámetros que pase por extremos de los "latus rectum".
208. Una parábola simétrica con respecto al eje OY y con vértice en el origen de coordenadas, corta a la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$ en puntos situados en las cuerdas, perpendiculares al eje mayor, que pasan por los focos. Determinar la ecuación general de la parábola.
209. Demostrar que las tangentes a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ y a su circunferencia principal mayor en los puntos de abscisa x_1 , $0 < x_1 < a$, concurren sobre el eje de abscisas, en el punto $(\frac{a^2}{x_1}; 0)$.
- NOTA: La circunferencia principal mayor es la circunferencia circunscrita a la elipse.

210. La parábola y la elipse de ecuaciones:
 $3y^2 + 32x = 0 \quad \wedge \quad 4x^2 + 9y^2 = 72$
tienen dos tangentes comunes de la forma $y = mx + b$.
Determinar las ecuaciones de las tangentes y los puntos de contacto con la parábola.
211. Los focos de una elipse son los puntos $F_1(12; 5)$ y $F_2(-8; 15)$, y la longitud de su eje mayor es 30 u. ¿En qué puntos la elipse corta el eje de ordenadas?
212. Determinar las longitudes de los diámetros de las cónicas:
 $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$
 $2x^2 + y^2 - 12x - 8y + 28 = 0$
si se sabe que están sobre una misma recta.
213. Una elipse con centro en $Q(1; 2)$ es de eje focal horizontal, pasa por el punto $P(3; 5)$ y su eje mayor tiene una longitud de 8 u. Determinar su ecuación general y las ecuaciones de las tangentes en los extremos del diámetro de pendiente $-\frac{3}{2}$.
214. De una elipse se conocen uno de sus focos $F_1(8; 6)$, un punto de ella $P(4; 9)$, y el punto de intersección $H(4; 5)$ del eje de la elipse y de la normal a la elipse que pasa por el punto P . Determinar:
* la ecuación de la tangente a la elipse en P ,
* las coordenadas del otro foco,
* la longitud de su eje mayor.
215. Un punto ficticio P se desplaza sobre una elipse. Si las distancias menor y mayor del punto P a uno de los focos son 10 cm. y 30 cm. Determinar la excentricidad de la elipse, la distancia entre sus directrices y el área del rectángulo que resulta al unir los extremos de sus "latus rectum".
216. El "latus rectum" de una elipse se ve desde su centro bajo un ángulo recto. ¿Cuál es la excentricidad de tal elipse?
217. Los focos de una elipse son los puntos $F_1(3; 6)$ y $F_2(-5; -2)$, y la longitud de la mayor cuerda de esta elipse es $10\sqrt{2}$ u. Determinar las ecuaciones de los ejes focal y normal de la elipse, así como las ecuaciones de sus directrices.

218. La órbita de la Tierra es una elipse con semieje mayor de longitud 150×10^6 km. y una excentricidad $e = 0,017$. Si se sabe que el Sol se encuentra en un foco de esta elipse, determinar en cuánto excede la mayor distancia de la Tierra al Sol (afelio) de la menor (perihelio).
219. Hallar la ecuación canónica de una elipse de eje vertical que pasa por el punto $P(1; 4)$, si se sabe que la longitud de su "latus rectum" es $\sqrt{2}$ veces su semidistancia focal.
220. La figura muestra la sección transversal de un canal semielíptico de 60 cm. de boca y 80 cm. de profundidad.
- Se desea conocer el ancho de la superficie "L", cuando el canal lleve agua con una profundidad de 40 cm.
- 
221. Si la recta de ecuación $x - 2y + 1 = 0$ es el eje focal de una elipse y el punto $(3; 7)$ es uno de sus covértices, determinar las ecuaciones del eje normal y de las directrices, así como la excentricidad de la elipse, si se sabe además que un foco equidista del centro y de la directriz correspondiente.
222. Los focos de una elipse E_1 de excentricidad $e = 0,5$ son los puntos $F_1(3; 2)$ y $F_2(3; 6)$. Determinar la ecuación de otra elipse E_2 simétrica a E_1 con respecto a la recta: $l: x - y - 6 = 0$.
223. ¿Es posible ver un "latus rectum" de una elipse bajo un ángulo de 90° desde el vértice correspondiente? Justifique su respuesta.
224. En una elipse, cuyos ejes se confunden con los coordenados, las rectas:
 $x + 2y - 12 = 0$ $x - 8y + 12 = 0$
 son cuerdas suplementarias que pasan por los extremos de su eje mayor. Hallar la excentricidad de la elipse, su ecuación y las ecuaciones de sus directrices.
 NOTA: Dos cuerdas son suplementarias cuando parten de un mismo punto de una elipse y pasan por los extremos de un diámetro.
225. Determinar los valores de k para los cuales la recta: $x + y = k$, corta, es tangente, o es exterior a la cónica de ecuación: $x^2 + 4y^2 = 20$.

226. Los puntos $F_1(1; -1)$ y $F_2(-1; -3)$ son los focos de una cónica, y como dato adicional se debe utilizar sólo uno de los siguientes:

- i) $P(7; 10)$ es un punto de una directriz.
- ii) $Q(0; -2)$ es un punto de la recta perpendicular al eje focal, que pasa por el centro de la cónica (eje normal).

Se pide identificar la cónica y determinar su excentricidad en uno o en los dos casos, según corresponda y sea posible.

✓ 227. En la elipse: $16x^2 + 25y^2 = 1600$, verificar la siguiente propiedad:

"La circunferencia que tiene por diámetro la porción de tangente a una elipse, comprendida entre las tangentes en los vértices de ella, pasa por los focos de la elipse."

Haga uso del punto $T(8; 4,8)$, como punto de contacto de la tangente a la elipse dada.

228. Una circunferencia es tangente interiormente a una elipse. Si la circunferencia pasa por los focos de la elipse, determinar su excentricidad.

229. Los radios focales de un punto de una elipse son iguales a 2,6 u. y a 7,4 u. La cuerda que parte de este punto, perpendicular al eje mayor de la elipse es igual a 4,8 u., y está sobre la recta de ecuación: $3x + 4y - 12 = 0$. Se sabe además que el centro de la elipse es el punto $Q(-1; 0)$ y que la distancia entre los focos es mayor que 6 u. Se pide determinar:

- * la excentricidad de la elipse,
- * la ecuación de su eje focal,
- * las coordenadas de los focos de la elipse.

230. Demostrar que $\frac{2b^2}{a}$ es la longitud del "latus rectum" de la elipse

$$\frac{(y - k)^2}{b^2} + \frac{(x - h)^2}{a^2} = 1$$

HIPÉRBOLA

231. Para cada una de las ecuaciones dadas, identifique la cónica, señalando si es caso degenerado o no:

a) $4y^2 - 5x^2 - 8y - 10x - 21 = 0$

b) $x^2 + 4y^2 = 0$

c) $x^2 - 4y^2 - 4x - 8y = 0.$

232.

Un punto $P(x; y)$ se mueve de tal modo que su distancia al punto $Q(0; 2)$ es el doble de su distancia a la recta: $y + 1 = 0$.

- Encontrar la ecuación del lugar geométrico que describe el punto P .
- Identificar el lugar geométrico, hallar sus elementos y esbozar su gráfica.

233.

Las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola son:

$13x - 9y - 38 = 0 \wedge x + 3y - 14 = 0$, y el punto $(8; 4)$ es uno de sus vértices. Determinar el centro de la cónica, la ecuación del eje focal, y su excentricidad.

234.

Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de la hipérbola: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, a sus asíntotas es una cantidad constante, igual a

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

235.

Dada la ecuación $9x^2 - 16y^2 = 144$, verificar en ella, la siguiente propiedad: "Una asíntota, una directriz y la recta que pasa por el foco perpendicular a la asíntota, son concurrentes."

236.

Una propiedad de la hipérbola es:

"El producto de las distancias de un punto cualquiera de una hipérbola a sus asíntotas es constante."

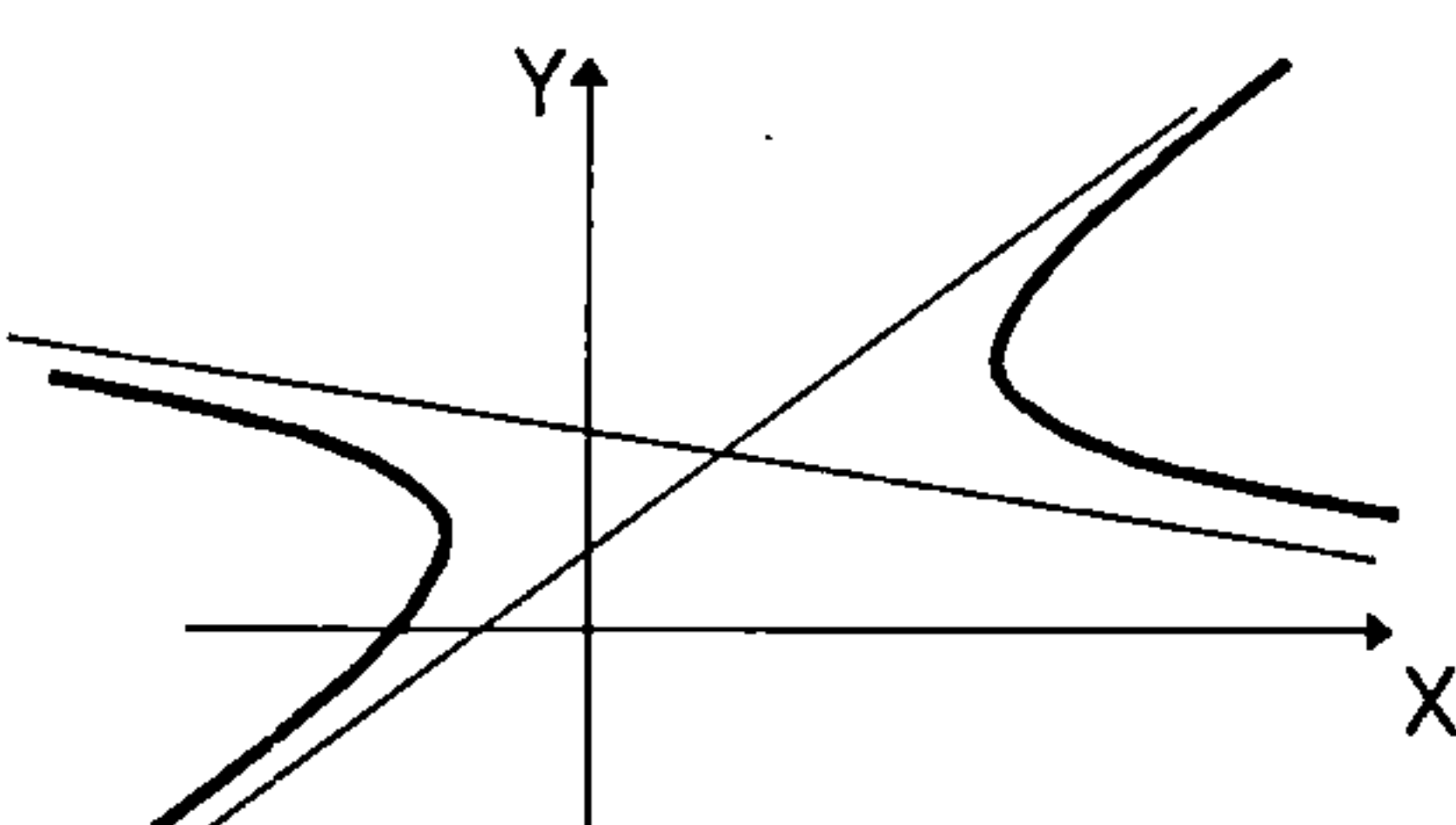
Haciendo uso de la propiedad enunciada, determinar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(2; 2)$ y sus asíntotas son:

$13x - 9y - 38 = 0 \wedge x + 3y - 14 = 0.$

Encuentre además, los siguientes elementos de la hipérbola:

- * longitudes de los semiejes,
- * coordenadas del centro, vértices y focos,
- * las ecuaciones del eje real, eje imaginario y de las directrices.

237. Qué representan las ecuaciones:
 $f_1: x^2 + y^2 + 6x - 8y + 74 = 0$
 $f_2: y^2 - 6y + 9 = 0$
 $f_3: 3x^2 + 4y^2 - 18x + 16y + 43 = 0$
 $f_4: x^2 - y^2 - 4x - 6y - 5 = 0.$
238. Dada la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 256$, y un punto de ella $T(-5; 4)$. Verificar las siguientes propiedades:
 * El segmento de tangente comprendido entre las asíntotas tiene como punto medio el punto de contacto.
 * El producto de las distancias de los focos a una tangente es igual al cuadrado del semieje imaginario.
239. En la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$, hay un punto P cuya distancia al foco izquierdo es el doble que al derecho.
 * Explique por qué hay dos puntos solución.
 * Determine la distancia de P al foco izquierdo.
240. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola que tenga focos comunes con la elipse: $x^2 + 2y^2 - 2x - 17 = 0$, si se sabe que el cociente de sus excentricidades es $3\sqrt{2}$.
241. Hallar en la hipérbola $3x^2 - 4y^2 - 72 = 0$ el punto más próximo a la recta $3x + 2y + 1 = 0$, y el punto más próximo al origen de coordenadas.
242. Dada la ecuación de la hipérbola: $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$, hallar su excentricidad, las ecuaciones de sus asíntotas y la distancia entre sus directrices.
243. Determinar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los centros de las circunferencias que son tangentes al eje de abscisas y que al cortar el eje de ordenadas, determinan un segmento de longitud constante igual a 2 u.
244. Identificar las cónicas cuyas ecuaciones son:
 $9x^2 + 25y^2 = 225$ $x^2 - y^2 = 8$
 Además, verifique que son homofocales y que se cortan ortogonalmente.
245. Determinar en la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$, los puntos cuyas distancias al foco izquierdo son iguales a 7 u. Además, calcular la medida del ángulo que forman las asíntotas de la hipérbola, que contiene un foco.

246. Una hipérbola con centro en $(2; 3)$ y eje transverso vertical es tal que la distancia entre sus vértices es 10. Determinar la forma general de su ecuación, si el segmento interceptado por las asíntotas sobre una directriz es de longitud igual a la distancia entre las directrices.
247. Una circunferencia de radio variable es tangente a la circunferencia: $x^2 + y^2 + 8x = 0$, y pasa por $A(4; 0)$. ¿Qué lugar geométrico describe su centro?
248. Determinar la ecuación general de la elipse cuyo eje menor tiene por extremos los focos de la hipérbola: $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$, y cuya excentricidad es recíproca de la que tiene la hipérbola. Además, presentar la gráfica de las dos cónicas.
249. Por un foco F de una hipérbola equilátera de centro O se traza una paralela a una de sus asíntotas, la cual corta a la otra asíntota en P . Determinar el área del triángulo OFP , si se sabe que la longitud del eje real es $8u$.
250. Las rectas:
 $l_1: x - 2y + 2 = 0$
 $l_2: 2x + 11y - 41 = 0$
son asíntotas de una hipérbola como se muestra.
Al no contar con más datos, no es posible determinar su ecuación, pero sí algunos elementos.
Determinar tres elementos de esta hipérbola, uno de los cuales debe ser la excentricidad.
- 
251. Una hipérbola con centro en el origen de coordenadas y focos sobre el eje de abscisas pasa por el punto $P(1; 2)$. Si la diferencia entre las distancias del punto P a las directrices es $\frac{\sqrt{30}}{15}$ u., determinar las ecuaciones generales de la hipérbola y de sus asíntotas.
252. Demostrar que la longitud del segmento que une el centro de una hipérbola equilátera a un punto de ella, es media proporcional entre las longitudes de los radios vectores del punto.

253. Si por $N(0; a)$ se traza una recta l perpendicular al segmento NF_2 , donde F_2 es el foco izquierdo de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que la recta " l " intercepta al eje focal en P , punto de la directriz unilateral con el foco derecho F_1 . Además probar que la recta " l " es tangente a la hipérbola, estableciendo la relación existente entre el punto de contacto T y el foco F_1 .
254. Un segmento de recta AB , de longitud variable desliza sus extremos sobre los ejes coordenados de manera que el área del triángulo AOB es siempre 36 u^2 . Determinar e identificar el lugar geométrico que describen el:
i) ortocentro ii) baricentro
255. El foco y la directriz de la parábola: $y^2 - 6y - 16x + 41 = 0$ son, respectivamente, uno de los focos de la hipérbola equilátera y el eje normal de la misma. Determinar la ecuación general de la hipérbola.
256. Verificar que si desde el foco de una hipérbola se traza una perpendicular a una tangente, la intersección P de la perpendicular con la tangente está siempre sobre la circunferencia cuyo centro es el de la hipérbola y cuyo radio es el semieje real. Compruebe esta propiedad en la hipérbola:
 $9x^2 - 16y^2 - 54x + 64y - 559 = 0$, si la tangente tiene como punto de contacto el punto $(13; 6,5)$.
257. Trazar por el punto $P(r; s)$ de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, una recta paralela al eje conjugado. Si esta recta corta a las dos asíntotas en los puntos M y N , demostrar que el producto de las longitudes de los segmentos MP y PN es una constante independiente de las coordenadas del punto P .
258. Los vértices de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 90x + 64y + 17 = 0$ son los covértices de una elipse de excentricidad $e = 0,5$. Determinar la ecuación general de la elipse.
259. Si desde un punto P de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ se traza una paralela al eje focal de la curva, que intercepta a las asíntotas en Q y R . Demostrar que:
- $$d_{PQ} \cdot d_{PR} = a^2$$
260. Determinar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola:
 $3x^2 - 4y^2 - 12 = 0$, trazadas desde el punto exterior $P(6; 5)$.
Además, señale si las tangentes tienen puntos de contacto en una misma rama o en ramas diferentes de la hipérbola.

261. El punto de abscisa 3 de la recta $x + y - 8 = 0$, es el centro de una hipérbola, y la recta dada su eje focal; además, una de sus asíntotas pasa por el punto (2; 9). Determinar:

- i) las ecuaciones de las asíntotas,
- ii) la excentricidad de la hipérbola.

262. La recta de ecuación $2x - 3y + 13 = 0$, es un lado de un cuadrado y las diagonales del cuadrado son asíntotas de una hipérbola. Determinar la ecuación general de la hipérbola, si el origen de coordenadas es el centro del cuadrado y de la hipérbola.

263. Si "e" es la excentricidad de la hipérbola $\mathcal{H}$: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, y "e.", la excentricidad de la hipérbola conjugada de la dada $\mathcal{H}$, demostrar:

i) $\frac{e}{e_{\bullet}} = \frac{b}{a}$

ii) $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e_{\bullet}^2} = 1$

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

264. Eliminar el término rectangular de la relación:

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 36$$

y hacer un bosquejo de la gráfica.

265. Dada la ecuación de segundo grado:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 144 = 0.$$

Determinar la naturaleza de la cónica, las ecuaciones de rotación que permiten eliminar el término rectangular, y la ecuación transformada. Además, hacer un esbozo de la gráfica.

266. Mediante una rotación de ejes eliminar el término rectangular de la ecuación:

$$4x^2 - 3xy - 18 = 0.$$

Identificar la cónica y señalar el ángulo que forma con el eje X una de sus directrices.

267. Simplificar, identificar y hacer un esbozo de la cónica cuya ecuación es:

$$52x^2 - 72xy + 73y^2 + 400x - 950y + 2725 = 0.$$

268. Dada la ecuación:

$$2x^2 + xy + 2y^2 = 90,$$

- * Verificar que la cónica es del género elipse.
- * Eliminar, mediante una rotación de ejes, el término xy .
- * Determinar, en el sistema XOY, las coordenadas de uno de los extremos de su eje menor.

269. La recta $4x + 3y - 5 = 0$ es la directriz y el punto $(-5; 15)$ es el foco de una parábola en un sistema de coordenadas. Determinar la ecuación de la directriz, las coordenadas del foco y la ecuación general de la parábola en el sistema de coordenadas que resulta luego de una rotación de ejes en un ángulo θ , en la que $\operatorname{tg}\theta = 0,75$. Presente un gráfico mostrando ambos sistemas.

270. Identificar y presentar la gráfica de la ecuación cuadrática

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 25 = 0$$

50

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE MATEMÁTICA BÁSICA II

271. Determinar las coordenadas del punto $P(13; 11)$ cuando los ejes coordenados son trasladados primero al nuevo origen $(7; 3)$ y después se giran un ángulo

$$\theta, \operatorname{tg} \theta = \frac{4}{3}.$$

272. Dada la ecuación:

$$x^2 + 24xy - 6y^2 + 30 = 0,$$

- * determinar el género de la cónica,
- * efectuar una rotación de ejes para simplificar e identificar plenamente la ecuación dada,
- * Presentar un esbozo de la gráfica.

Determinar, además, las ecuaciones de los ejes focal y normal, en el sistema original.

273. Dadas las relaciones:

$$P = \{ (x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 16x^2 + 25y^2 - 160x + 50y + 1600 = 0 \}$$

$$Q = \{ (x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 16x^2 + 25y^2 - 160x + 50y - 825 = 0 \}$$

$$R = \{ (x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 16x^2 + 25y^2 - 160x + 50y - 425 = 0 \}$$

- i) Indicar cuál o cuáles son cónicas reales.
- ii) Presentar un gráfico de las cónicas reales, mostrando las coordenadas de los puntos importantes mínimos que las definan.

274. Las cónicas se clasifican en reales o degeneradas, y cónicas con centro o sin centro. Explique cada caso.

Además, dada la ecuación de segundo grado:

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$

clasifique la cónica y determine, si es una cónica real, su excentricidad.

275. La ecuación

$$(k - 4)x^2 + ky^2 + 2y + k = 0,$$

representa una familia de cónicas de un parámetro k .

Determinar el valor o valores de k , de manera que la ecuación represente:

- i) una parábola,
- ii) una hipérbola degenerada.

276. Determinar las coordenadas de los focos y las ecuaciones de las directrices de la cónica:

$$2xy + 4y - 1 = 0.$$

NOTA: Las respuestas deben presentarse en el sistema XOY.

277. Por una rotación de ejes la recta de ecuación: $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ se transforma en otra de una sola variable. Determinar el ángulo o ángulos de rotación que resuelven la cuestión y escriba la ecuación en el nuevo sistema según corresponda.

278. La ecuación $2x^2 + 2\sqrt{3}xy - 9 = 0$, representa una cónica. Esboce su gráfica y determine su excentricidad.

279. $2x^2 + 4xy + 4y^2 - 10x - 16y + 1 = 0$

es la ecuación de una cónica, uno de cuyos diámetros es la recta:

$$x + 2y - 4 = 0.$$

Determinar las coordenadas del centro de la cónica e indicar si la cónica es una elipse o una hipérbola.

280. Dada la ecuación general de segundo grado:

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 120x - 160y = 0,$$

identificar la cónica y hallar las coordenadas de sus focos.

281. Determinar qué representa la ecuación de segundo grado:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 12x - 6y = 0$$

Además, presentar una gráfica y describir sus características.

282. Las ecuaciones:

$$(I) \quad 2x^2 + 3y^2 + 4x - 6y + 5 = 0$$

$$(II) \quad x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$$

$$(III) \quad x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 3y + 2 = 0$$

representan cónicas degeneradas.

Determinar el género de cada una, luego identificar y presentar el gráfico correspondiente, teniendo en cuenta que ninguna de ellas representa un conjunto vacío.

283. La ecuación de una hipérbola después que los ejes han girado un ángulo cuya tangente es igual a $\frac{3}{4}$ tiene por ecuación:

$$9(y' - 2)^2 - 16(x' - 1)^2 = 144$$

- i) Hacer un bosquejo de la gráfica de la ecuación.
- ii) Determinar la ecuación del eje radical y de las directrices en el sistema primitivo.

Vectores

ÁLGEBRA VECTORIAL

284.

Se sabe que $-3(1; -3; 5) + 2\mathbf{x} = 5(0; -2; -1) + 3\mathbf{x}$

y que: $6\mathbf{a} + 3\mathbf{y} - 5\mathbf{c} = 8\mathbf{b}$,

donde los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son, respectivamente: $(3; 5; -1)$, $(6; -2; 3)$ y $(-3; 2; 0)$.

* Hallar el vector $\mathbf{n}$, si se cumple: $2\mathbf{n} - 3\mathbf{x} = 2\mathbf{y} - \mathbf{a}$.

* Determinar, de ser posible, el valor de:

$$|\mathbf{b}|(\mathbf{a} + \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}||\mathbf{c}|.$$

285.

Un vector $\mathbf{x}$ es de la forma $(m; n - 1; l + 2)$, determinar el valor de: $m + n + l$, en los siguientes casos:

1º Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 25$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = -18$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = -5$$

donde: $\mathbf{a} = (1; 1; -5)$

$$\mathbf{b} = (1; 0; 5)$$

$$\mathbf{c} = (0; 1; 2)$$

2º Cuando el módulo del vector $\mathbf{x}$ es cero.

286.

Explique cómo utilizar, en cada paso, las propiedades del producto escalar:

i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (conmutativa)

ii) $(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ (asociativa)

iii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (distributiva)

iv) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

v) $|\mathbf{a}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$ (positividad)

para demostrar: $|\mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \alpha^2 |\mathbf{b}|^2$

Además, si se cumple: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 5$ y $|\mathbf{c}| = 6$, calcular el valor de: $M = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$

NOTAS: 1. $|\mathbf{a}|$ y $|\mathbf{b}|$ son los módulos de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$; α es un escalar.

2. En la segunda parte se sugiere utilizar las propiedades iv y v.

287.

Dados los vectores $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (7; -2; 3)$, $\vec{c} = (0; 0; 5)$ y $\vec{d} = (1; 0; 0)$:

- * Calcular el producto escalar:
 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c} - \vec{d})$.
- * Ordenar los vectores de menor a mayor, según su módulo.
- * Averiguar si los vectores son linealmente dependientes o independientes.

288.

Explicar cuándo los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes y proponer un ejemplo.

Además, determinar x de manera que los vectores:

$$\vec{a} = (x; -1; -1), \vec{b} = (-1; x; -1) \text{ y } \vec{c} = (-1; -1; x),$$

sean linealmente dependientes.

289.

Señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- a) La negación de la independencia lineal de un conjunto de vectores de un espacio vectorial V es su dependencia lineal.
- b) Si un conjunto de vectores es linealmente independiente, uno de ellos puede ser el vector cero.

Fundamente sus respuestas.

290.

Indicar si son linealmente dependientes o linealmente independientes cada uno de los siguientes conjuntos de vectores:

$$C_1 = \{ (2; 3), (-4; 6) \} \quad \text{de } \mathbb{R}^2$$

$$C_2 = \{ (1; 2; -1), (-2; -1; -4), (1; -7; 17) \} \quad \text{en } \mathbb{R}^3$$

$$C_3 = \{ (1; 1; 1), (0; 1; 1; 0) \}$$

$$C_4 = \{ (\sin^2 \theta; 1), (\cos^2 \theta; 1), (2; 4) \}$$

Si son linealmente independientes, expresar uno de los vectores como combinación lineal de los restantes.

NOTA: En el conjunto C_4 , $\theta \in \mathbb{R}$

291. Explique qué entiende usted cuando un conjunto de vectores es linealmente independiente.

Además determine si los vectores:

$$\vec{a} = (1; -5; 8; 12; 16)$$

$$\vec{b} = (-2; 10; -16; -24; -32)$$

son linealmente dependientes o linealmente independientes.

292. Resolver los siguientes ejercicios:

i. Determinar si son linealmente dependientes o linealmente independientes los vectores: $\vec{a} = (12; 8; -4; 16)$

$$\text{y } \vec{b} = (-3; -2; 1; -4).$$

ii. Determinar si son linealmente dependientes o linealmente independientes los vectores: $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (1; 1)$ y $\vec{c} = (4, 5)$.

iii. Dados los vectores $\vec{a} = (2; -1; 1)$, $\vec{b} = (1; 3; -2)$, $\vec{c} = (-1, 1, -3)$ y $\vec{d} = (-7, 0, -1)$, determinar: $x + y + z$, si el vector $\vec{d}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, con coeficientes x , y , z , respectivamente.

iv. Si el módulo del vector $\vec{a} = (p; q - 1; r + 2)$ es cero, determinar: $p + q + r$.

293. Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ tales que:

$\vec{a}$ y $\vec{b}$, son linealmente independientes,

$\vec{c}$ y $\vec{d}$, son linealmente dependientes,

determinar el valor del escalar λ si se cumple:

$$\vec{c} = 2\vec{a} + (\lambda - 1)\vec{b}$$

$$\vec{d} = 3\vec{a} + (\lambda - 3)\vec{b}$$

GEOMETRÍA VECTORIAL

294. Lea atentamente las siguientes proposiciones y coloque verdadero [V] o falso [F] según corresponda. PUNTAJE: 6 o 7 correctas, 4 puntos; 4 o 5 correctas, 3 puntos; 3 correctas, 2 puntos; menos de 3 correctas, 0 puntos.

- ☐ El producto escalar de un vector por su vector unitario es igual al módulo del vector.
- ☐ Los vectores $(0; 0; 0)$ y $(2; -1; 0)$ son perpendiculares.
- ☐ El vector $\vec{u} = (u_1; 0; u_3)$ es perpendicular al vector $\vec{k}$.
- ☐ El vector $(3; 2)$ puede expresarse como la suma de los vectores $(a, 0)$ y $(0; b)$ de una única forma.
- ☐ La componente de un vector sobre otro y el producto escalar de dichos vectores tienen el mismo signo.
- ☐ Si la componente de un vector en la dirección de otro es menor que cero, el ángulo entre los vectores es agudo.
- ☐ $[(\vec{a}^\perp)^\perp]^\perp = \vec{a}$

295. Lea atentamente las siguientes proposiciones y coloque verdadero [V] o falso [F] según corresponda. PUNTAJE: 6 o 7 correctas, 4 puntos; 4 o 5 correctas, 3 puntos; 3 correctas, 2 puntos; menos de 3 correctas, 0 puntos.

- ☐ Si $\vec{u} = 2\vec{v}^\perp$, entonces $\text{Comp}_{2\vec{v}} \vec{u} = 0$.
- ☐ $\text{Comp}_{\vec{a}} (\text{Proy}_{\vec{b}} \vec{b}) = 0$, donde $\vec{a} \neq \vec{b}$
- ☐ $\text{Comp}_{\vec{b}} \vec{a} = \text{Proy}_{\vec{b}} \vec{a}$
- ☐ $\vec{\text{Proy}}_{\vec{b}} \vec{a} + \vec{\text{Proy}}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{0}$
- ☐ Si $\vec{a}$ es paralelo $\vec{b} \rightarrow \vec{\text{Proy}}_{\vec{b}} \vec{a} = \vec{b}$
- ☐ Si $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{0}$ entonces: $\vec{\text{Proy}}_{\vec{a}} \vec{m} = \vec{\text{Proy}}_{\vec{b}} \vec{m}$

☐ $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$

296. Resuelva cada uno de los ejercicios (puede ser en el borrador) y coloque la respuesta en el recuadro adjunto. (Cada respuesta correcta, un punto).

* El valor de "a" para que 1, 1 y a sean los cosenos directores de un vector es:

* Si $\vec{a}$ y el opuesto de $\vec{b}$ forman un ángulo de 60° y $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 6$, entonces $\vec{a} \cdot \vec{b}$, es:

* ABCDEF es un hexágono regular de lado igual a 6 u., si $\text{Pröy}_{\vec{BF}} \vec{FC} = \lambda \vec{BE}$, entonces:

* Si $\vec{a} = m\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}$ y $\vec{b} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}$ son dos vectores perpendiculares entonces el valor de m es:

* Si $\vec{a} = m\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}$ y $\vec{b} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}$ son vectores perpendiculares, entonces el valor de m es:

297. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

Puntaje: 5 correctas, 4 puntos; 4 correctas, 3 puntos; 3 correctas, 2 puntos;

* El ortogonal del ortogonal de un vector en $\mathbb{R}^2$ es su vector opuesto:

$$(\vec{a}^\perp)^\perp = -\vec{a}$$

* El ángulo entre los vectores $\vec{a} = (5\sqrt{3}m, 5m)$ y $\vec{b} = (m, 3\sqrt{3}m)$ es independiente del parámetro m.

* Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores linealmente dependientes, entonces:

$$\text{Pröy}_{\vec{b}} \vec{a} = -\vec{a}$$

* Los módulos de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están en la relación $\frac{5}{3}$

y $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, entonces $\vec{c}$ puede ser un vector paralelo al vector $\vec{a}$.

* Si α , β y γ son los ángulos directores de un vector, se cumple:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

298. Demostrar que los puntos $(3; 5; -7)$, $(8; -1; 2)$ y $(-22; 35; -52)$ están en una recta, por cada uno de los siguientes métodos:

* múltiplo escalar de un vector:

$$\vec{AB} = \lambda \vec{AC}$$

* distancia entre dos puntos:

$$|\vec{AB}| + |\vec{BC}| = |\vec{AC}|$$

¿Por qué cada uno de estos dos métodos demuestran que los tres puntos están en línea recta?

Explique si existe algún otro método, que no utilice la ecuación de la recta para hacer la demostración. ¿Hay más de uno?

299. Dados los puntos $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$ y $D(3; -5; 3)$,

- * Verificar que son los vértices de un trapecio.
- * Determinar el área del trapecio.

300. Si $A(6; 8; 6)$, $B(7; -1; 8)$ y $C(4; 4; 1)$, determinar:

- a) la superficie del triángulo,
- b) las coordenadas de un punto D , tal que $ABCD$ sea un paralelogramo.

301. Dado el triángulo ABC , de vértices $A(10; 10; 15)$, $B(4; 6; 3)$ y $C(1; 2; 3)$.

- * Verificar que el perímetro del triángulo es un número entero.
- * Determinar las coordenadas de un punto Q del lado BC , tal que los triángulos ABQ y ACQ tengan el mismo perímetro.

302. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos radios vectores cualesquiera, no nulos, probar que los tres puntos definidos por los radios vectores:

$\vec{a} + 3\vec{b}$, $4\vec{a} - \vec{b}$ y $7\vec{a} - 5\vec{b}$, están alineados.

303. Dado el triángulo de vértices $A(4; 9; 11)$, $B(-3; 2; 4)$ y $C(2; 4; -3)$. Determinar:

- * el punto de AB cuya ordenada sea igual a $6u$,
- * el punto de la recta AB que está en el plano cartesiano YZ ,
- * el mayor ángulo del triángulo.

304. Comprobar que los vectores:

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$$

forman un triángulo rectángulo.

Determine además, el menor ángulo del triángulo y su área.

305. Si ABCD es un cuadrilátero cualquiera y los puntos P y Q son, respectivamente, puntos medios de los lados BC y AD, demostrar:

$$\vec{AB} + \vec{DC} = 2\vec{QP}$$

306. Si $\vec{a} = (m; n; l)$ es perpendicular a los vectores

$\vec{b} = (0; 4; -3)$ y $\vec{c} = (2; 2; -3)$, hallar el vector $\vec{a}$, si se cumple:
 $m + n + l = 10$.

307. Determinar un vector $\vec{b}$ paralelo al plano XY, si entre él y el vector $\vec{c} = (4; -3; 1)$ se cumple: $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, y el módulo del vector $\vec{b}$ es 10.

308. De un paralelogramo ABCD se conocen los vértices $A(3; -1; 2)$ y $B(1; 2; -4)$, y el punto $Q(0; 1,5; 3)$, punto medio del lado BC. Determinar las coordenadas de los vértices C y D.

309. Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son los vectores de posición de los vértices A, B y C del paralelogramo ABCD, hallar el vector de posición del vértice D.

310. Un alumno encuentra en un antiguo texto una pregunta incompleta:

"Entre los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, de módulos 3, 5 y 7, se cumple

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}, \dots"$$

y supone que el enunciado continúa así:

$$\text{"demostrar : } \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \text{"}$$

Determinar, calculando cada producto escalar, si el alumno acertó o no al completar de esta manera el enunciado.

311. Esta pregunta consta de dos partes:

1.1) ¿Qué condición deben satisfacer los vectores $\vec{m}$ y $\vec{n}$ para que los vectores $\vec{m} + \vec{n}$ y $\vec{m} - \vec{n}$ sean colineales?

1.2) ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{a}$ y $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$?

312. Calcular el área del paralelogramo cuyas diagonales son los vectores

$$\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

313. Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ y $\vec{f}$ forman los lados de un hexágono regular de manera que el extremo de cada uno de ellos es el origen del siguiente. Expresar en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores restantes.

314. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 45° y el módulo de $\vec{a}$ es $6\sqrt{2}$. Determinar el módulo del vector $\vec{b}$ de manera que el vector $\vec{a} + \vec{b}$ forme con el vector $\vec{a}$ un ángulo de 30° .

315. Dados los puntos $A(4; 8; 11)$, $B(-3; 1; 4)$ y $C(2; 3; -3)$. Determinar:

- * las longitudes de los lados del triángulo ABC,
- * el punto del lado AB cuya ordenada sea 5,
- * el ángulo exterior del vértice A,
- * el área del triángulo ABC.

316. Dados los vectores $\vec{a} = (3; -2)$, $\vec{b} = (-2; 1)$ y $\vec{c} = (7; -4)$, determinar cada uno de estos vectores como combinación lineal de los otros dos.

317. Verifique que el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(5; -1; 7)$, $B(8; 5; 1)$ y $C(-3; 0; 11)$ es isósceles y determine un vector en la dirección de la mediatriz correspondiente a uno de sus lados iguales.

318. Se tiene un cubo de arista $2u$, con un vértice en el origen de coordenadas O y tres caras coincidiendo con los planos coordenados. Si el cubo está en el primer octante, A es un vértice del cubo que se encuentra en el plano $z = 0$, que dista del origen $2\sqrt{2}u$ y B es el vértice del cubo que dista del origen $2\sqrt{3}u$, se pide determinar:

- a) $\vec{m} = \vec{OA} \times \vec{OB}$,
- b) El ángulo formado por el vector $\vec{m}$ y el eje x .

319. Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, son vectores de posición de los vértices de un triángulo en el espacio tridimensional, determinar el vector de posición $\vec{x}$, del centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, sabiendo que:

$$(\vec{b} - \vec{a})(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$$

320. Los vértices de un triángulo son: $A(0; 3; -3)$, $B(2; 2; -3)$ y $C(6; 1; -2)$.
- Ordenar, de mayor a menor utilizando desigualdades, las longitudes d_{AB} , d_{BC} , d_{AC} , de los lados del triángulo.
 - Calcular el área del triángulo AMB , si M es punto medio del lado BC del triángulo.

321. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que forman un ángulo $\phi = \frac{\pi}{6}$, tienen como módulos:
 $|\vec{a}| = \sqrt{3} \text{ u.}$ y $|\vec{b}| = 1 \text{ u.}$

Calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

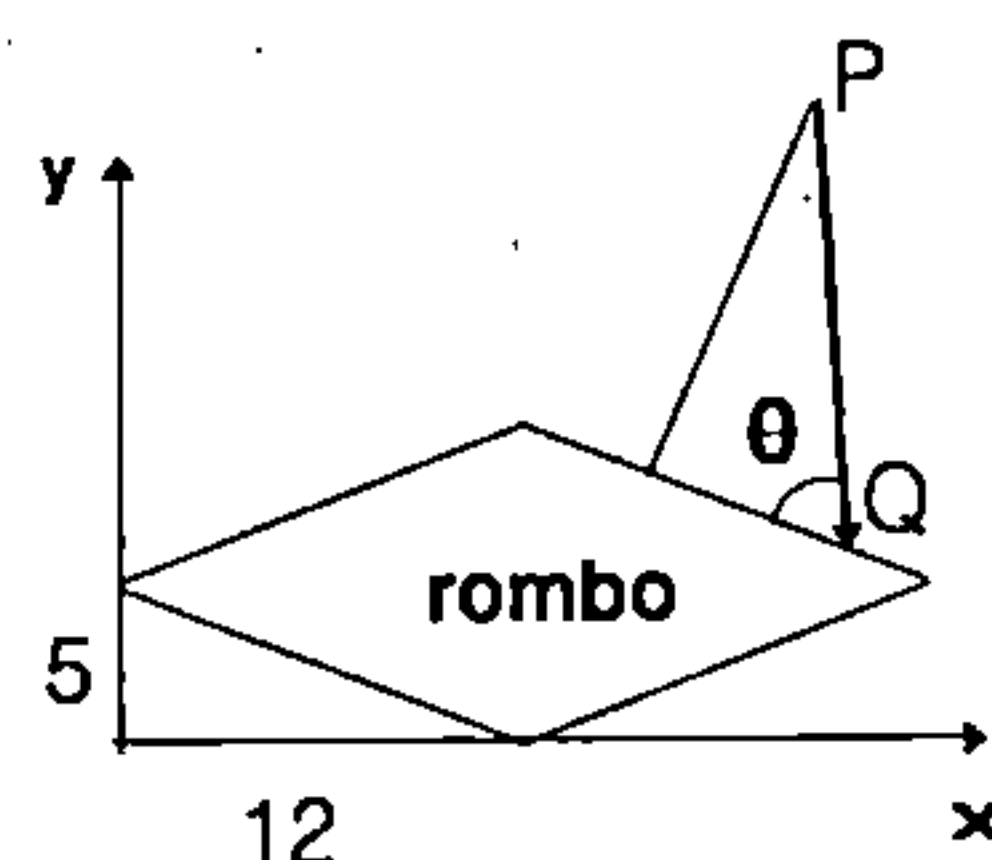
322. Determinar un vector perpendicular al vector $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, de módulo 10.

323. Determinar el vector $\vec{PQ}$ de módulo 5 y el vector $\vec{m}$, si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\vec{m} = \vec{PQ}^\perp,$$

$$|\vec{m}| = 13|\vec{PQ}|$$

$$\text{y } \tan \theta = 0,75$$



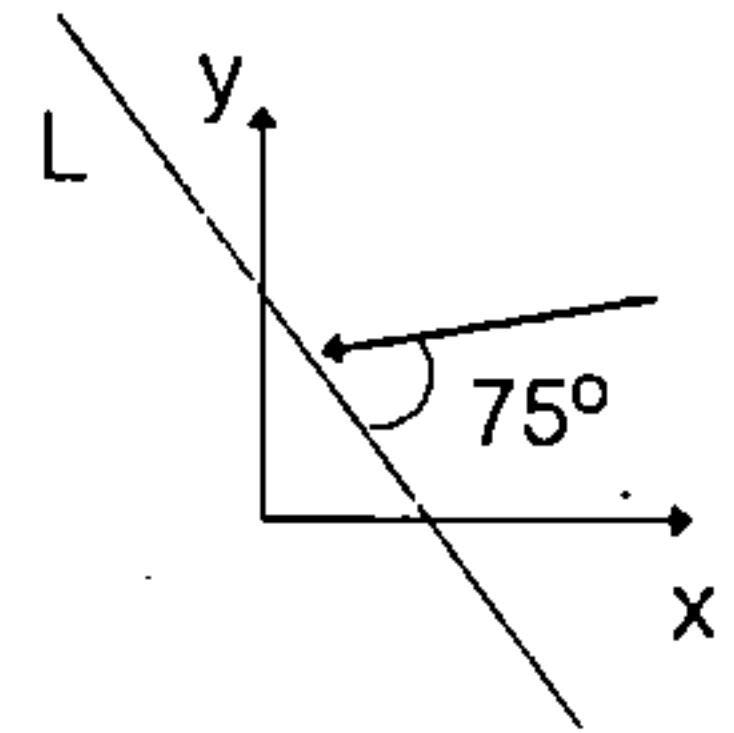
324. De un rectángulo $ABCD$, que se encuentra en el primer cuadrante, se conocen los vértices $A(2; 6)$ y $B(5; 10)$, y se sabe que su base AD es el doble de su altura AB . Además, se tiene el cuadrado $ACEF$, en cuyo interior se encuentra el vértice D del rectángulo, se pide calcular vectorialmente el área del cuadrado $ACEF$ y la medida del ángulo DAE .

325. Un vector tridimensional forma con los ejes coordenados X e Y ángulos de 60° y 120° respectivamente. Determinar:

- * el vector unitario del vector,
- * el vector, si su módulo es igual a 4, expresándolo en forma algebraica,
- * si los tres ángulos directores fueran iguales, ¿cómo sería el vector si su módulo sigue siendo 4?

326. Un vector $\vec{a}$ de módulo $6\sqrt{2}$ u. se apoya como se muestra sobre la recta:
 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$.

Hallar el vector $\vec{a}$, determinando previamente sus cosenos directores.



327. Determinar las coordenadas del extremo de un vector $\overline{AB}$, conociendo su origen $A(3\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; \sqrt{3})$, su módulo 3, y que forma con los ejes coordenados ángulos iguales.
328. Definir ángulos directores y cosenos directores de un vector en R^3 . Además, enunciar y demostrar la relación que existe entre el vector unitario y los cosenos directores de un vector en el mismo espacio.
329. $A(2; 1; 0)$, $B(6; 5; 8)$, $C(7; 6; 7)$ y $D(4; 3; 1)$ son vértices de un cuadrilátero. Comprobar que es trapecio rectángulo e indicar cuál es el vértice del ángulo obtuso. Además, ubicar sobre la base menor, un punto tal que al unirlo con un extremo de la base mayor, se forme un trapecio isósceles.

330. Un vector $\vec{a}$, perpendicular al cartesiano $\vec{k}$ es tal que si
 $\vec{b} = (1; 2; 3)$ y $\vec{c} = (4; -4; -2)$, se cumple:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$$

$$\text{Comp}_{\vec{c}} \vec{a} = -2$$

Determinar el vector $\vec{a}$.

331. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores, tales que $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, demostrar que la bisectriz del ángulo agudo que ellos forman tiene la dirección del vector: $|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$.
332. Una tubería se extiende a lo largo de la pared frontal de un recinto, formando un ángulo de 30° con la horizontal. Se dobla hacia arriba en una arista del cuarto y, a lo largo de la pared lateral, forma un ángulo de 45° con la horizontal. Hallar el ángulo del codo de la tubería.

333.

La proyección de un vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b} = (3; -6; 9)$ es el vector $\vec{p} = (-1; 2; -3)$.

- * Determinar la proyección del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{c} = -\frac{2}{3}\vec{b}$.
- * Además, si el vector $\vec{a}$ tiene la misma dirección y sentido que el vector $(2; 3; 1)$, hallar el vector $\vec{a}$.

334. Dado el triángulo $A(7; 9; 1)$, $B(-4; 8; -9)$ y $C(8; -4; 15)$, determinar:
- * el pie de la altura que cae sobre el lado BC,
 - * las coordenadas de un punto D, de manera que ABCD sea un trapecio isósceles.
335. Hallar la componente de la proyección del vector $\mathbf{s} = (\sqrt{2}; -3; -9)$ sobre el vector que forma con los ejes coordenados X y Z los ángulos $\alpha = 45^\circ$ y $\gamma = 60^\circ$, y con el eje Y un ángulo obtuso.
336. Determinar las componentes de un vector en el plano XY, de un sistema trirrectangular de coordenadas, cuyo módulo sea igual al del vector $7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ y que ambos tengan la misma proyección sobre el eje X.
337. Dado el triángulo ABC, los puntos $D(-3; 1; 0)$, $E(-2; 13; -4)$ y $F(-12; 9; 4)$ son respectivamente los puntos medios de AB, BC y AC. Se pide determinar:
- a) la proyección del vector $\overrightarrow{DE}$ sobre el vector $\overrightarrow{BA}$,
 - b) el área del triángulo ADF.
338. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b} \in V^2$, demostrar que:
- a) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores unitarios, entonces: $|\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}| < 1$
 - b) Si $\vec{a} + \vec{b} = |\vec{b}| |\vec{a}|$ entonces $\vec{b}$ es ortogonal al vector $\vec{a}$.
339. Demostrar la identidad
- $$(\text{Pröy}_{\vec{b}} \vec{a}) \cdot (\text{Pröy}_{\vec{a}} \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cos^2 \theta$$
- donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
340. Resolver sólo una de las siguientes preguntas:
- * $\vec{a}$ y $\vec{b}$, son dos vectores perpendiculares de módulos 3 y 4, respectivamente.
Determinar el módulo del vector:
 $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$
 - ** Si el módulo de la suma de dos vectores es $\sqrt{34}$, su producto escalar es 4 y el módulo de su producto vectorial es 3. Determinar los módulos de estos dos vectores.

341.

Determinar un número entero x , tal que los puntos

$$A(x; 1 - 2x; 5),$$

$$B(3 + x; x; 5)$$

$$C(-1 - x; 4; 5)$$

sean vértices de un triángulo de área igual a 23 u^2 .

342.

Explicar qué interpretación geométrica tiene el módulo del producto vectorial de dos vectores y luego demostrar la Identidad de Lagrange.

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

343.

Si $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$ y $D(-5; -4; 8)$ son vértices de un tetraedro, determinar:

- * el volumen del tetraedro,
- * la longitud de la altura que parte del punto D.

344.

Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son los vectores de posición de los vértices de un triángulo ABC, demostrar que:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = 2S\mathbf{u}$$

donde S es el área del triángulo y $\mathbf{u}$ es un vector unitario perpendicular al plano que contiene al triángulo ABC.

345.

¿Qué relación existe entre los módulos de los productos escalar y vectorial?

346.

Si los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ tienen por módulos 2 y 5,

¿Es posible determinar: $(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$? De ser posible, dar la respuesta. En caso contrario, señalar qué dato o datos faltarían para calcular la expresión dada.

347.

Dados los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, explique qué es, qué significa, cómo se calcula y qué propiedades cumple el triple producto escalar de los vectores dados.

348.

Hallar el vector $\mathbf{x}$ si se sabe que es perpendicular a los vectores $(2; 3; -1)$ y $(1; -2; 3)$, y que satisface la condición:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = -6$$

349. Si abc denota el triple producto escalar o producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, demostrar las siguientes identidades:

$$abc + abd = ab(c + d)$$

$$ab(c + \alpha a + \beta b) = abc$$

donde $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$ y las letras griegas α y β son escalares.

NOTA: Justifique cada paso de las demostraciones.

PLANO EN EL ESPACIO

350. El plano $P: 3x + 2y + 2z - 18 = 0$, determina con los planos coordenados una pirámide que se quiere seccionar en tres partes de igual volumen, mediante dos planos que pasen por el eje OZ . Determinar las ecuaciones de estos planos.

351. Demostrar que siendo A, B y C puntos no colineales, determinan un plano cuyo vector dirección es: $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$, donde los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son los vectores de posición correspondientes.

352. Dados los puntos $A(2; 1; 3)$ y $B(4; 5; 3)$, hallar el plano mediatriz del segmento AB . (Plano mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y B).
Indicar además, las intersecciones del plano hallado con los ejes coordenados.

353. Obtener, identificar y discutir la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice C de un triángulo isósceles cuya base tiene por extremos los puntos $A(3; 1; -2)$ y $B(-1; 3; 0)$.

354. Determinar el centro de una esfera de radio 3, que es tangente al plano $x + 2y + 2z + 3 = 0$ en el punto $(1; 1; -3)$.

355. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(2; -1; 1)$ y es perpendicular a los planos: $2x - z + 1 = 0 \wedge y = 0$.

356. Las ecuaciones de dos planos son:

$$P_1: mx - 6y - 6z + 2 = 0$$

$$P_2: 2x + ny + 3z - 5 = 0$$

Qué condiciones deben satisfacer los coeficientes m y n para que:

- i) el plano P_1 sea paralelo al plano P_2 .
- ii) el plano P_1 sea perpendicular al plano P_2 .

357. Qué condiciones deben satisfacer los coeficientes m y p para que los planos:

$$P_1: mx - 3y + pz - 15 = 0$$

$$P_2: 10x - (m + 1)y + 30z + 5 = 0$$

- a) sean paralelos,
- b) sean perpendiculares.

358. Los planos:

$$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

son tales que:

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = 1$$

$$A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 = 1$$

a) Encontrar una fórmula que permita calcular el ángulo obtuso que forman los planos dados.

b) ¿Qué condición deben satisfacer los coeficientes para que los planos sean perpendiculares?

359. De los puntos $A(1; 1; 1)$, $B(3; 1; 7)$, $C(3; 0; 1)$, $D(4; 1; 0)$ y $E(2; 2; 0)$ señalar el punto que no está en el plano que contiene a los otros cuatro. Además, calcular el volumen del sólido que determinan los cinco puntos.

360. Determinar en el eje Y un punto Q que equidiste del punto $A(1; 0; 2)$ y del plano $P: 3x + 6y - 2z - 9 = 0$.

361. Obtener e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto C que se mueve en el espacio de tal manera que con los puntos $A(2; 3; -5)$ y $B(-2; 6; 4)$, forme un triángulo isósceles ABC con base BC .

362. Dados los planos:

$$P_1: 2x - 3y + az = b$$

$$P_2: ax + 6y + 8z = 10$$

Determinar los valores de " a " y " b " de manera que los planos P_1 y P_2 , adopten todas las posiciones que puedan tener dos planos en el espacio.

RECTA EN EL ESPACIO

363. Sean A , $B(2; 4)$ y C los vértices de un triángulo ABC . Si $\text{Pr}_{\vec{BC}} \vec{AB} = (\frac{2}{5}; -\frac{1}{5})$, la recta $l_1: y = 3$ pasa por A y C , y la recta $l_2: 2x + y - 8 = 0$ divide al triángulo ABC en dos figuras equivalentes, determinar el área del triángulo ABC .

364. Dados los puntos $A(3; 0; 4)$ y $B(-3; 3; 3)$.
Determinar:

- la ecuación de la recta que pasa por A y B ,
- la ecuación del plano mediatriz del segmento AB , perpendicular a AB en su punto medio.

365. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(8; 2; 2)$, $B(-4; 2; 6)$ y $C(10; 0; 0)$, determinar:
- * la ecuación del plano que contiene al triángulo,
 - * la ecuación vectorial de la mediana que parte del vértice C .

366. Hallar la ecuación de un plano que pasa por la recta

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t + 3 \\ z = -t - 2 \end{cases}$$

y es paralelo a la recta $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$.

367. En qué puntos, la recta cuya ecuación general es:

$$\begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ 3x - z - 7 = 0 \end{cases}$$

corta a los planos cartesianos XOZ e YOZ .

Determine además, la distancia del punto $(0; -1; 0)$ a la recta dada.

368. Determinar la ecuación general de la proyección de la recta:

$$\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

sobre el plano cartesiano XZ y la ecuación general del plano perpendicular a la recta dada que pasa por el punto $(1; 1; 1)$.

369. Determinar la ecuación general de un plano que pasa por $P(0; 2; 1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{a} = (1; 1; -1)$ y $\vec{b} = (2; -1; 1)$.

Además, determinar el módulo de la proyección del segmento AB sobre el plano hallado, si $A(1; 2; 3)$ y $B(2; 1; 0)$.

370. Identificar qué par de las siguientes rectas:

$$l_1 = \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$$

$$l_2 = \begin{cases} x = -12 + 3t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$l_3: \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4},$$

son paralelas.

Además, determinar la distancia entre el par de rectas paralelas y verificar que el punto $(21; -11; 10)$ pertenece al plano que ellas forman.

371. Dado el triángulo de vértices $A(1; -2; -4)$, $B(3; 1; -3)$ y $C(5; 1; -7)$, hallar la ecuación, en forma simétrica, de la altura correspondiente al lado AC .

372. Hallar las ecuaciones paramétricas de la perpendicular común a las dos rectas:

$$l_1 = \begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = 4 - 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$$

$$l_2 = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -9 + 2t \\ z = -12 - t \end{cases}$$

373. Dadas las rectas:

$$l_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y-14}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

$$l_2 = \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = 5 \\ z = -4 - t \end{cases}$$

- * Determinar la ecuación de un plano paralelo a las rectas dadas y que equidiste de ellas.
- * Determinar un punto en cada recta de manera que la distancia entre ellas sea mínima.

374. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por la recta:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

y por el punto $P(x_1; y_1; z_1)$, se puede poner en la forma:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

375. Si la recta: $(x; y; z) = (3; 1; -3) + t(4; -4; 1)$ está contenida en el plano de ecuación: $Ax + 2y - 4z + D = 0$. Hallar los coeficientes A y D , y la ecuación del plano proyectante de la recta sobre el plano coordenado XY .

376. Con una pistola, que está en la posición $P(-6; 13; 11)$, se dispara una bala cuya trayectoria está definida por sus cosenos directores:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ y } \cos \gamma = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Determinar la ecuación de la trayectoria de la bala.

Además, averiguar si el disparo destruye o no un cristal rectangular de vértices $A(4; 0; 0)$, $B(4; 6; 0)$, $C(4; 6; 5)$ y $D(4; 0; 5)$, determinando si existe el punto de impacto.

377. Determinar la ecuación de un plano tal, que las distancias de todos los puntos de las rectas l_1 y l_2 al plano, sean iguales.

$$l_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+1}{1}$$

$$l_2 : (x; y; z) = (2; 2; -3) + t(2; -1; -1)$$

378. Dada la recta:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z - 30 = 0 \\ x - 2y - 4z - 20 = 0 \end{cases}$$

Determinar:

- i) las ecuaciones de los planos proyectantes de la recta dada sobre los planos

$$z = 0$$

$$x + y + z - 1 = 0$$
- ii) la ecuación de la proyección de la recta dada sobre el plano:

$$z = 0.$$

379. Las rectas l_1 y l_2 son tangentes a una circunferencia que se halla en el plano que determinan las rectas dadas.

- * Verificar que las rectas l_1 y l_2 son paralelas.
- * Hallar la ecuación del plano en el que se encuentra la circunferencia.
- * Determinar $b + c$, si $P(1; b; c)$ es el centro de la circunferencia.

$$l_1: (x; y; z) = (5; 2; -7) + t(2; -1; 1)$$

$$l_2: \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

380. Los puntos $A(1; 1; 0)$, $B(7; -1; 0)$, $C(9; 5; 0)$ y $D(3; 7; 0)$ determinan la base de un prisma recto, encontrándose la otra base en el plano: $z = 8$. Un plano P corta al prisma determinando un tronco de prisma de aristas $AA' = 7u$, $BB' = 5u$ y $CC' = 3u$.

Determinar:

- a) las ecuaciones de las aristas BB' y CC' ,
- b) la ecuación general del plano P ,
- c) las coordenadas del punto D' .

381. Dado el punto $P(-3; 10; 5)$ y los planos:

$$Q_1: 3x + 2y - z + 5 = 0$$

$$Q_2: 2x - y + 3z - 10 = 0$$

- a) Demostrar que el punto P equidista de los planos dados.
- b) En qué dirección debe movilizarse el punto P de manera que su distancia a los planos dados permanezca constante.
- c) Escribir la ecuación de la trayectoria del punto P .

382. Demostrar que el pie de la perpendicular del origen al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es el punto $(Ak; Bk; Ck)$, verificándose:
 $(A^2 + B^2 + C^2)k + D = 0$
383. Los puntos $A(0; 1; 5)$, $B(3; 0; 3)$ y $C(6; 0; 0)$ son los vértices de un triángulo. Determinar:
- * la ecuación general del plano que contiene al triángulo ABC,
 - * las intersecciones del plano con los ejes coordenados,
 - * la traza del plano con el plano $x = 4$,
 - * un punto parte del origen, dirigiéndose directamente al plano. ¿Cuál es el punto de impacto?
384. La recta que pasa por los puntos $A(1; -1; 5)$ y $B(5; 3; 3)$ es la directriz de una cónica con centro, y los puntos $C(4; 2; 8)$ y $D(6; 4; 16)$ son, respectivamente, el vértice y el foco correspondiente a dicha directriz.
- * Verificar que los cuatro puntos dados sean coplanares.
 - * Identificar de qué cónica se trata, determinando su excentricidad.
 - * Hallar las coordenadas del centro de la cónica.
385. Hallar las ecuaciones canónicas (simétricas) de la recta que pasa por el punto $M(2; -4; -1)$ y por el punto medio del segmento de la recta:
- $$\begin{cases} 3x + 4y + 5z - 26 = 0 \\ 3x - 3y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$
- contenido entre los planos:
- $$\begin{aligned} 5x + 3y - 4z + 11 &= 0 \\ 5x + 3y - 4z - 41 &= 0. \end{aligned}$$
386. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta
- $$\begin{aligned} x &= 1 + 3t \\ y &= 3 + 2t \\ z &= -2 - t \end{aligned}$$
- y es paralelo a la recta
- $$\begin{aligned} 2x - y + z - 3 &= 0 \\ x + 2y - z - 5 &= 0. \end{aligned}$$
387. Determinar qué lugar geométrico representa la ecuación
- $$2x + 3y - 6 = 0$$
- cuando sea elemento de los espacios bidimensional y tridimensional. En cada caso presente un gráfico. Además, calcule la distancia del origen a cada lugar geométrico.

388. Dados los planos
- $$\begin{aligned}x - 2y + z - 7 &= 0 \\2x + y - z + 2 &= 0 \\x - 3y + 2z - 11 &= 0\end{aligned}$$
- determinar el ángulo agudo que forman las trazas del tercer plano sobre los dos primeros.
389. La recta
- $$\begin{cases} 2x + 2y + z + 8 = 0 \\ 4x - y - 3z - 4 = 0 \end{cases}$$
- corta a uno de los ejes cartesianos. Indicar a cuál y en qué punto. Además, escribir una terna de números directores de la recta.
390. Un triángulo ABC, de vértices A(7; 2; 1) y B(3; 4; 5), está en un plano perpendicular al plano P de ecuación: $2x + 3y + z - 22 = 0$, Si el centro de gravedad del triángulo se encuentra en la recta:
- $$(x; y; z) = (7; 2; 1) + t(1; 2; -2),$$
- determinar:
- * las coordenadas del vértice C,
 - * la ecuación de la recta que contiene la proyección del triángulo sobre el plano P.
391. Un plano Q, cuya ecuación se pide, contiene al eje Z y pasa por el punto P(2; 3; 5). Escriba además de la ecuación de la recta paralela al eje Z que pase por el punto P, y la ecuación de la recta que pasa por el punto M(5; 2; 0) y es perpendicular al plano Q.
392. Determinar las coordenadas del punto simétrico de A(1; 3; 0) con respecto al plano de ecuación: $x + 2y + z - 1 = 0$.
393. Dadas las rectas
- $$l_1: (x; y; z) = (3; 1; 1) + t(1; -1; 0)$$
- $$l_2: \begin{cases} 2x - 3z - 5 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$$
- i) Verificar que las rectas l_1 y l_2 se cruzan.
 - ii) Determinar la ecuación del plano que contiene la recta l_1 y es paralela a la recta l_2 .

394. Por $A(4; 7; 10)$ pasa una recta cuya ecuación se pide determinar, que corta a las rectas l_1 en B, y a l_2 en C. Determinar además, las coordenadas de los puntos B y C, si:
- $$l_1: (x; y; z) = (0; -4; 4) + t(1; 5; -3)$$
- $$l_2: (x; y; z) = (0; -1; -2) + s(1; 2; 3).$$
395. Dado el tetraedro de vértices: $A(-6; 3; 4)$, $B(11; -3; 2)$, $C(-4; 1; -4)$ y $D(8; 2; -2)$. Hallar la longitud de la altura trazada desde A.
396. Durante una experiencia se tiene un objeto en el punto $P(8; 8; 12)$ el cual se ve desde el punto $Q(0; 0; 20)$ reflejado en punto H de un espejo ubicado en el plano XY. Discuten dos alumnos sobre la manera de determinar las coordenadas del punto H; uno de ellos sostiene que H está en la intersección del plano del espejo con la recta que pasa por uno de los puntos y el simétrico del otro, con respecto al plano del espejo. Determine las coordenadas del punto H, haciendo uso del plan propuesto por uno de los alumnos o por otro procedimiento.
397. Hallar la ecuación general de un plano que contenga la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{-2}$ y sea perpendicular al plano $3x + 2y - z - 5 = 0$.
398. Los puntos $A(0; 0; 6)$, $B(3; 0; 3)$ y $C(0; 4; 2)$ determinan un plano P. Hallar la ecuación paramétrica de la recta de máxima pendiente del plano que pasa por el punto A.
- NOTA: La recta de máxima pendiente de un plano es aquella que está contenida en el plano y es perpendicular a la traza del plano dado con el plano horizontal. Considere como plano horizontal el plano XY.
399. Hallar la ecuación general de un plano determinado por las rectas paralelas l_1 y l_2 :

$$l_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-6}{2}$$

$$l_2: \begin{cases} x = 4t - 7 \\ y = -3t + 5 \\ z = 2t + 3 \end{cases}$$

400. Dados los puntos del espacio $\mathbb{R}^3$: $A(8; -1; 2)$, $B(3; 5; -7)$ y $C(-22; 35; -52)$.
- Demuestre que los puntos A, B y C son colineales, por cada uno de los siguientes métodos:
 - $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$
 - $|\vec{AB}| + |\vec{BC}| = |\vec{AC}|$
 - Explique brevemente, por qué cada uno de estos métodos demuestra que tres puntos están en línea recta.
 - Determine las coordenadas del punto Q en el que la recta que pasa por A, B y C, corta al plano XY.
401. Los puntos $V(2; 3; 7)$ y $F(2; 2; 3)$ son, respectivamente el vértice y el foco de una parábola que se encuentra en el plano $P: x + y + z - 12 = 0$.
Determinar:
- la ecuación vectorial del eje focal,
 - el punto simétrico del foco con respecto al vértice,
 - las ecuaciones paramétricas de la directriz.
402. Una caja rectangular tiene como caras los planos cartesianos y los planos de ecuaciones: $x = 5$, $y = 8$, $z = 6$. Todas las caras son de vidrio, excepto la base ($z = 0$) que es un espejo. Si un rayo de luz parte del punto $(0; 8; 6)$ en la dirección del vector $(1; -2; -3)$, se desea saber las coordenadas del punto por el cual el rayo sale de la caja.
403. Los vértices de un triángulo son: $A(1; -2; -4)$, $B(3; 1; -3)$ y $C(5; 1; -7)$.
Determinar:
- la ecuación general del plano que contiene a los puntos A, B y C,
 - las ecuaciones paramétricas de la altura correspondiente al vértice B.
404. Una circunferencia contenida en el plano $z = 12$ tiene su centro en el punto $C(5; 6; 12)$ y su radio 1 u. Si se tiene una fuente luminosa en el punto $P(5; 6; 15)$, determinar la proyección de dos puntos cualesquiera de la circunferencia sobre el plano $P: 3x + 4y = 30$.
Sugerencia: Los dos puntos que se tomen pueden ser ambos de ordenada 6.
405. En el punto $A(0; 0; 6)$ del plano $P: 3x + 4y + 2z - 12 = 0$ se encuentra una canica. Si esta canica se suelta:
- ¿Sobre qué recta del plano P realizará su recorrido?
 - ¿Qué recorrido efectúa hasta llegar al plano XOY?
- NOTA: El plano XOY es horizontal

406. Se dan los puntos $A(8; 5; 1)$, $B(4; 5; 4)$, $C(5; 10; 0)$ y $D(3; 4; 5)$. Si los vectores $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ son las aristas de un paralelepípedo, hallar la ecuación vectorial de la recta que contiene la diagonal del paralelepípedo que pasa por el vértice A.

407. Describir geoméricamente qué representan cada una de las siguientes ecuaciones:

- a) $y - 12 = 0$, en los espacios R^2 y R^3 ,
- b) $4x + 3y = 24$, en los espacios R^2 y R^3 .

408. Determinar, en las formas paramétrica y general, la ecuación de un plano que pasa por los puntos $A(4; 2; 14)$ y $B(-2; 3; -1)$, si se sabe que el plano buscado es perpendicular al plano:

$$5x - 3y + 6z + 15 = 0.$$

409. Dado el plano $P: 2x + 4y - 3z - 11 = 0$, y la recta:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 9z - 52 = 0 \\ 2x + 2y + 3z - 23 = 0 \end{cases}$$

Identificar la posición relativa entre el plano P y la recta.

Determinar además, las distancias del origen de coordenadas al plano y recta dados.

410. Determinar la ecuación general de un plano pasa por el punto $M_0(1; 2; -3)$ y es paralelo a las rectas:

$$L_1: \{(x; y; z) / (1; 2; -3) + t(2; -3; 3), t \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2: \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$$

411. Dados los puntos $A(1; 1; 1)$, $B(-1; -1; 3)$ y $C(1; 5; 8)$.

- * Hallar el área del triángulo ABC.
- * Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos B y C.
- * Encontrar las ecuaciones paramétricas de la ecuación de la altura del triángulo que parte del vértice A.

412. Los puntos $F(13; 1; 2)$ y $V(15; 3; 4)$ son, respectivamente, el foco y el vértice de una parábola que se encuentra en el plano: $x + y - 2z - 10 = 0$. Determinar las ecuaciones vectoriales del eje focal y de la directriz.

Matrices

MATRICES

413. Lea atentamente las siguientes proposiciones y coloque verdadero [V] o falso [F] según corresponda. PUNTAJE: 8 a 10 correctas, 4 puntos; 6 o 7 correctas, 3 puntos; 4 o 5 correctas, 2 puntos; 3 correctas, 1 punto.

- [F] Toda matriz posee un valor numérico.
 [V] El producto de dos matrices no nulas puede ser la matriz cero.
 [F] Si $AB = AC$, entonces $B = C$, donde A , B y C son matrices.
 [V] Si A , B , C y D son matrices cuadradas, entonces:
 $(AB + CD)^t = B^t A^t + D^t C^t$, donde t indica transposición.

- [F] Si A es una matriz tal que: $A^3 = A$, entonces $A^6 = A$.

- [F] La inversa de $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 9 & -16 \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} 16 & 7 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$
- Handwritten notes: $[A] [A^2] [A^3] \dots A^2 A A^t$
 $A^2 = \begin{bmatrix} -16 & 7 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$
 $-64 - (-63) = -1$
 $\begin{bmatrix} 16 & -7 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$

Si A , B y C son matrices cuadradas de orden n :

- [V] $A(BC) = (AB)C$
 [F] $BC = CB$
 [] Si $AB = AC$ entonces $B = C$.
 [V] $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

414. Resuelva cada uno de los ejercicios (puede ser en el borrador) y coloque la respuesta en el recuadro adjunto. (Cada respuesta correcta, un punto).

- * La transpuesta de $AB + BC$, es:

Handwritten: $(A+B)^t$

- * El desarrollo de la expresión matricial $(A + B)^2$ es:

Handwritten: $A^2 + AB + BA + B^2$

- * La inversa de la matriz ortogonal:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ es:}$$

Handwritten: A^t

- * La inversa del producto de matrices AB^{-1} es:

Handwritten: $B A^{-1}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE MATEMÁTICA BÁSICA II

415.

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

determinar las matrices A^2 , B^4 y A^3B^4 .

416.

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $B = A^2 + C$, donde un elemento de C es:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Demostrar que A y B son matrices conmutables o permutables.

417.

Dada la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

hallar dos matrices:

- Una matriz M que al posmultiplicar la matriz C , intercambie sus columnas 2^{da} y 4^{ta}, sin modificar las otras.
- Una matriz N que al premultiplicar a la matriz C , multiplique la 1^{ra} fila por dos, y la 3^{ra} fila del producto sea igual a la 2^{da} fila de la matriz C más el triple de la 3^{ra}.

NOTA: La premultiplicación es la multiplicación por la izquierda y la posmultiplicación es la multiplicación por la derecha.

418.

Se tienen dos matrices cuadradas A y B de orden 3, tales que:

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j, & i > j \\ i - j, & i = j \\ 2i, & i < j \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 2, & i > j \\ 0, & i = j \\ 3, & i < j \end{cases}$$

Calcular $A \otimes B - AB$, si $A \otimes B = Q$ donde:

$$q_{ij} = \begin{cases} a_{ij} b_{ij}, & i \leq 2 \\ 12, & i = 3 \end{cases}$$

419.

Esta pregunta consta de dos ejercicios:

- 1) Si A, B, C y D son matrices con las cuales se puede hallar $(AB + C)D$; determinar el orden de las matrices B y C, si $[a_{ij}]_{3 \times 5}$ y $[d_{ij}]_{4 \times 7}$.
- 2) Si P es una matriz simétrica y Q es antisimétrica, donde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & y+z & 0 \\ -2 & 5 & z \\ y & x & 3 \end{bmatrix} \text{ y } q_{ij} = 2i - j, \text{ cuando } i < j,$$

$y+z = -2$
 $y = -2$
 $z = 0$

hallar la matriz X, que satisface la ecuación:

$$2P - P^t + Q + Q^t = X + 2I.$$

420.

Se tienen las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, \text{ y la matriz B, tal que } b_{ij} \text{ se define: } B_{(3 \times 3)}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 2i, & i > j \\ i + j, & i = j \\ 0, & i < j \end{cases}$$

$(A \ B)_{2 \times 3 \ 3 \times 3} 2 \times 3$
 $B_{3 \times 3}$

Calcular $(A \# B + AB)P$, si $A \# B = Q$ es una matriz de orden 2×3 , donde

$$q_{ij} = \begin{cases} (a_{ij})(b_{ij}), & i + j \leq 3 \\ a_{ij} + b_{ij}, & i + j > 3 \end{cases}$$

y la matriz P, de orden 3×1 , tiene elementos iguales a la unidad.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

421. En un texto un tanto ilegible se presenta el producto P de una matriz triangular inferior T por su transpuesta. Se observa que son matrices de tercer orden y se reconocen los siguientes elementos:

$$t_{11} = 1, t_{33} = 4, p_{12} = 2, p_{13} = -3, p_{22} = 5 \text{ y } p_{23} = -5.$$

Determinar las matrices T y P , sabiendo que la matriz T posee un solo elemento negativo.

422. Resolver los siguientes problemas (cada uno dos puntos):

* Escribir una matriz cuadrada de cuarto orden que actuando como premultiplicadora, permuta las filas segunda y tercera, y multiplica por tres la última fila de una matriz $B_{4 \times n}$. Proponer un ejemplo.

* Si M es una matriz cuadrada de tercer orden, cuyos elementos no nulos son: $m_{12} = m_{13} = -m_{22} = -m_{33} = -2$ demostrar que

$$M^k = \begin{cases} 2^k I, & k \text{ es número par} \\ 2^k M, & k \text{ es número impar} \end{cases}$$

423. Si A y B son matrices permutables e involutivas y se cumple:

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Hallar la traza de la matriz $M = (A + B)^2$.

NOTA: La traza de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de la diagonal principal.

424. Simplificar la expresión matricial:

$$E = (C + D)(2C - D)$$

en cada uno de los siguientes casos:

- i) C y D son matrices permutables,
- ii) C y D son matrices involutivas,
- iii) C y D son matrices idempotentes, y
- iv) C y D son antipermutables y C es involutiva.

425. Definir las siguientes matrices especiales:
idempotente, involutiva y periódica.

Además, si las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

son matrices especiales, efectúe los cálculos necesarios para determinar de qué matrices especiales se trata.

426. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 1 2 0

hallar: $A^6 + 2A$

427. Hallar las matrices X e Y, si:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{X^2}{Y} [X] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 71 & 31 \\ 87 & 38 \end{bmatrix}$$

$$Y^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 18 \end{bmatrix}$$

$$[]$$

428. "La Tiendecita Azul", una pequeña pastelería, se dedica sólo a elaborar: rollos, panes, kekes y pasteles o *pies*. La cantidad de los cinco ingredientes principales se dan en la matriz A. (se miden en tazas la harina, el azúcar, la mantequilla y la leche).

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{huevos} & \text{harina} & \text{azúcar} & \text{mantequilla} & \text{leche} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1/4 & 1/4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1/4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{rollo(docena)} \\ \text{pan (pieza)} \\ \text{keke (unidad)} \\ \text{pie (unidad)} \end{matrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{AL POR MAYOR} & \text{AL POR MENOR} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 10 \\ 10 & 12 \\ 12 & 15 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{huevos} \\ \text{harina} \\ \text{azúcar} \\ \text{mantequilla} \\ \text{leche} \end{matrix} \end{matrix}$$

El costo, en céntimos de nuevo sol (S/.), por cada ingrediente, comprándose al por mayor y al por menor, está dado en la matriz B.

- i) Hallar una matriz que represente la comparación de costos al hacer uso de las dos maneras de comprar una unidad de producción.

Suponga un día que un pedido considera: 20 docenas de rollos, 200 piezas de pan, 50 kekes y 60 pies.

- ii) Represente este pedido como una matriz de 1×4 , y usando matrices, encuentre una matriz que muestre las cantidades necesarias para satisfacer el pedido.
- iii) Utilizando matrices determine el costo del pedido, considerando una utilidad del 35% y que al facturar, debe considerarse 5% de impuestos.

429. Invertir la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -73 & 43 & -25 & 1 & 0 & 0 \\ -17 & 10 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 29 & -17 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

430. Demostrar que:

$$A^{-1}B = BA^{-1},$$

cuando A y B son matrices conmutables o permutables, siendo A una matriz regular.

Además, demostrar que:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3,$$

cuando A es matriz nulipotente de índice 4.

431. Dadas las tres matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

hallar la matriz X, si se cumple:

$$AXB = C$$

$$\begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5x+y & 2z+w \\ 3x+2y & 3z+2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

432. Demuestre que la matriz:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2(-6x - 3y + 10z + 5w) &= -2 \\ -12x - 6y + 20z + 10w &= -2 \\ -6x - 3y + 10z + 5w &= -1 \\ 21x - 5z &= 0 \\ 21x &= 5z \end{aligned}$$

es periódica y que se comporta en forma similar a las potencias de la unidad imaginaria. Generalizar encontrando J^{4k} , J^{4k+1} , J^{4k+2} y J^{4k+3} . Además, determinar la inversa de J^{15} .

433. Invertir la matriz:

$$\begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{bmatrix}$$

434. Dada la igualdad: $AX + B = A$, y las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \text{diag}(2; -3; 4).$$

- a) Demostrar que: $X = I - A^{-1}B$. (Fundamente cada paso).
- b) Calcular, si existen, las inversas de A y B.
- c) Hallar, si es posible, la matriz X.

NOTA: I es la matriz identidad.

435. Determinar la suma de los elementos de las inversas de las matrices regulares A y B, si:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^2 - 2B = [0]$$

si se sabe además que las matrices A y B son equidimensionales.

Determinantes

DETERMINANTES

436. Lea atentamente las siguientes proposiciones y coloque verdadero [V] o falso [F] según corresponda. PUNTAJE: 5 correctas, 4 puntos; 4 correctas, 3 puntos; 3 correctas, 2 puntos.

- ☒ [] El valor de un determinante es nulo, cuando los elementos de la diagonal principal son ceros.
- ☒ [] Si A y B son matrices cuadradas, se cumple:
 $|A + B| = |A| + |B|$
- ☒ [] El determinante de la matriz $\text{diag}(a; b; c)$ es abc .
- ☒ [] Si A es una matriz cuadrada, entonces: $|AA| = |A|^2$.
- ☒ [] Si $|A| = 0$, A es una matriz regular.

437.

Resuelva cada uno de los ejercicios (puede ser en el borrador) y coloque la respuesta en el recuadro. Cada respuesta correcta un punto.

* El valor de

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}, \text{ es:}$$

* Si A es una matriz cuadrada de orden n, tal que $|A| = |k|$; al multiplicar A por $|A|$ se obtiene una matriz B, entonces $|B|$ es igual a:

* $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{vmatrix}$
 entonces, el valor de $x + y + z$, es:

* Hay cuatro valores de x que anulan el determinante:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix}, \text{ dos de ellos son:}$$

438. Resuelva cada uno de los ejercicios (puede ser en el borrador) y coloque la respuesta en el recuadro adjunto. Cada respuesta correcta un punto.

* ¿Para qué valor o valores de x la matriz

$$\begin{bmatrix} x+2 & 0 \\ x^3 & x-1 \end{bmatrix} \text{ es singular?}$$

Sea la matriz

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \text{ cuyo determinante es } 10, \text{ entonces:}$$

* El valor numérico de

$$\begin{vmatrix} a-d & b-e & c-f \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \text{ es:}$$

* El valor numérico de:

$$\begin{vmatrix} 5 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ 3 & g & h & i \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ es:}$$

* El valor numérico de

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}, \text{ es:}$$

439. Si A es una matriz cuadrada de segundo orden tal que su determinante sea igual a la unidad y su traza igual a -1 .
Calcular e identificar la matriz A^3 .

NOTA: Traza de una matriz es la suma de los elementos de su diagonal principal.

440. Dada una matriz A de cuatro columnas, que tiene como elemento general

$$a_{ij} = i + j - 2,$$

y otra $B = \begin{bmatrix} 1 & -x & 1 \\ x & -x & -2 \\ 1 & -x & 3 \end{bmatrix}.$

Calcular $A^t B^2$, cuando $|B| = 12$, $x > 0$.

441. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$$

Si $|A| = 16$, hallar la traza de $A + 2A^t$.

NOTA: La traza de una matriz B es la suma de los elementos b_{ij} , cuando $i = j$.

442. La pregunta: "Determinar la matriz A de orden tres, si $A^2 - 2A = O$, es resuelta por dos alumnos de la siguiente manera:

i) $A^2 = 2A \Rightarrow A = 2 \Rightarrow A = 2I$

ii) $A^2 = 2A \Rightarrow A^{-1}A^2 = A^{-1}(2A) \Rightarrow (A^{-1}A)A = 2(A^{-1}A) \Rightarrow A = 2I_3$

¿Son correctas ambas soluciones?

¿Sólo una es correcta? ¿Cuál?

Explique qué pasos, en cada solución, son correctos.

Cuáles son incorrectos y por qué.

Además, hallar B^{-1} , si A es una matriz de orden cuatro que verifica:

$$B^2 + 5B = [O]$$

Nota: $[O]$, es la matriz cero.

443. Identifique, como regulares o singulares, las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -11 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Además, determine la inversa de las matrices regulares.

444. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{bmatrix}$$

- i) Para qué valor o valores de x la matriz A es singular o no inversible.
- ii) Determinar la inversa de la matriz A cuando $x = 0$.

445. Invertir la matriz:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ 11 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cómo comprobar que una matriz es regular sin realizar el proceso de inversión?

446. Demostrar

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^3$$

Evaluar

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 \\ (\log 2)^2 & (\log 20)^2 & (\log 200)^2 \end{vmatrix}$$

447. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular el determinante de la matriz $2A$ y el valor de la matriz:

$$A + A^{-1}$$

448. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 - \lambda \end{bmatrix}$$

Hallar el valor de λ de manera que se anule el determinante de la matriz A .

449. Evaluar el determinante de una matriz Q de orden cuatro si $q_{ij} = 2i - 3j$.
450. Haciendo uso de las propiedades y del desarrollo por elementos de una línea, demostrar que el determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ a^2 & a & b & 1 \\ c^2 & c & d & 1 \\ e^2 & e & f & 1 \end{vmatrix} = 0$$

es la ecuación de una parábola con eje vertical que pasa por los tres puntos no colineales $(a; b)$, $(c; d)$ y $(e; f)$, donde a , c y e son todos distintos.

451. Haciendo uso, entre otras, de las siguientes propiedades de la matriz adjunta y del determinante de un producto de matrices cuadradas A y B :

$$(\text{Adj}A)A = A(\text{Adj}A) = |A|I_n$$

$$|AB| = |A||B|,$$

Demostrar:

$$|\text{Adj}A| = |A|^{n-1},$$

donde n es el orden de la matriz A .

Luego, si:

$$\text{Adj}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

calcular $|A|$ y $(\text{Adj}A)^{-1}$, sabiendo que $|A| > 0$.

452. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 14 \\ 25 \\ 31 \end{bmatrix}$$

- Hallar la matriz X^tC , si C es la matriz adjunta de la matriz A , y se cumple $AX = B$.
- Calcular, además, la suma de los elementos de la matriz ACB .

Sistemas de ecuaciones lineales

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

453. Las transformaciones elementales de filas hacen uso de tres operaciones, denotadas usualmente I, M y A:

I	Intercambio de filas,
M	Multiplicar los elementos de una fila por un número diferente de cero,
A	Agregar a los elementos de una fila los correspondientes a otra multiplicados por una constante.

¿Son aplicables estas operaciones a un determinante sin que se altere su valor?

Indique cuál o cuáles modifican el valor del determinante y cómo se corregiría de aplicarse estas reglas a un determinante.

Además, resuelva matricialmente el sistema:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z + w &= 2 \\ x + y + z - w &= 8 \\ 13x + 8y - 2z - 3w &= 24 \\ 3x + y - z - w &= 2 \\ 3x + 4y + w &= 10 \end{aligned}$$

454. Qué relación existe entre el rango de una matriz $r[A]$ y el rango de la matriz ampliada $r[A | B]$ con relación a la consistencia e inconsistencia del sistema de ecuaciones: $AX = B$.

Además, resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 0 \\ 2x - 2y + z - u &= 0 \\ 3x - 4y + z + 2u &= 0 \\ 5x - 6y + 2z + u &= 0 \end{aligned}$$

NOTA: Las respuestas teóricas deben ser breves.

455. Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

456. Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$2x + 4z + 2w = 3$$

$$y + w = 1$$

$$2x + 2y + 4z + 4w = 5$$

457. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$x + 2y + 3z = b$$

$$2x + ay + 2z = 0$$

$$3x + 2y + z = 0$$

Determinar para qué valores de a y b , el sistema admite solución única y solución múltiple.

458. Para qué valor o valores de k el sistema de ecuaciones lineales:

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2$$

$$x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = k,$$

es consistente.

Dar la solución al sistema.

459. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$3x + 4y + 5z = a$$

$$4x + 5y + 6z = b$$

$$5x + 6y + 7z = c$$

- * ¿Qué relación debe existir entre a , b y c para que el sistema sea consistente?
- * ¿Puede el sistema tener solución única?
(Fundamente su respuesta).

460. Comprobar que el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0 \\2x - 3y + 4z &= 9 \\3x + 4y - z &= 9 \\4x - 2y + 8z &= 6 \\5x + 2y - 7z &= 45 \\6x + 3y + 2z &= 21\end{aligned}$$

es consistente determinado.

Además, interprete el resultado geométricamente.

461. En una caja hay monedas de S/. 0,10; S/. 0,05 y S/. 0,01; haciendo un total de 13 monedas y un importe de S/. 0,83; es decir, ochenta y tres céntimos de Nuevo Sol. Si el número de monedas $(x; y; z)$ corresponde a las denominaciones (0,10; 0,05; 0,01):

- i) Escriba el sistema de ecuaciones que resuelve el problema.
- ii) Explique por qué el sistema es consistente y encuentre la solución.
- iii) Determine además, la solución del problema propuesto.

NOTA: S/. es el símbolo del nuevo sol, vigente desde el 01/07/91 en el Perú. Un nuevo sol equivale a 100 centésimos.

462. Sea

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix},$$

la matriz aumentada de un sistema lineal de ecuaciones. Determinar los valores de a y b de manera que el sistema:

- * admita solución única,
- * tenga una solución dependiendo de un parámetro,
- * tenga una solución dependiendo de dos parámetros,
- * sea inconsistente.

463. ¿Para qué valores de a y b , el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}2x - y + 3z &= 1 \\x + 2y - z &= -b \\x + ay - 6z &= -10,\end{aligned}$$

es:

- * inconsistente,
- * consistente determinado,
- * consistente indeterminado?

Además, como cada ecuación del sistema es la ecuación de un plano, identifique las tres situaciones con cada una de las siguientes:

- * tienen un punto común,
- * pasan por una recta,
- * se cortan en tres rectas paralelas diferentes.

Indicaciones y respuestas

Esta parte está dedicada solamente a indicaciones y respuestas, porque no creemos en los llamados "solucionarios". Un alumno no aprende leyendo la solución de un ejercicio o problema: debe tratar de hacerlo solo, y cuando no pueda encontrar un camino que lo conduzca a la solución, podrá leer las indicaciones dadas. Debemos dejar en claro que se trata, en la mayoría de los casos, de una manera de abordar el enunciado propuesto, es decir, se trata de una solución y no de la solución o solución única.

En esta parte se han omitido al máximo las figuras y el llamado trazado de curvas. En realidad, todo ejercicio o problema de geometría analítica y de geometría vectorial tienen un gráfico sobre un sistema de coordenadas o un esquema, que permiten analizar los datos, o encontrar y seguir geométricamente la solución. La omisión de las figuras es intencional, con el fin de que los alumnos hagan sus figuras. En todo caso, cuando las circunstancias lo exigen, se ha indicado cómo trazar la figura, esquema o curva representativa correspondiente.

No se detallan tampoco casos generales, como, por ejemplo, determinar la recta que pasa por dos puntos, cómo encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados, o determinar la normal de un plano conocidos dos vectores paralelos a él. Cuando se trata de una aplicación directa de la teoría, ésta se indica, y se escribe la respuesta directamente. Los alumnos encontrarán las descripciones de los procedimientos generales paso a paso en sus apuntes de clase, porque todos los profesores los detallamos.

En lo que se refiere a las respuestas, éstas aparecen al inicio o al final de cada descripción, dando las indicaciones o las ecuaciones a las que el alumno debe llegar necesariamente en cada caso. Solamente de esta manera, estas indicaciones y respuestas



serán útiles para los estudiantes, y se cumplirá un objetivo fundamental: que cada estudiante aprenda a aprender durante toda su vida. Es decir, que aprenda a enfrentarse solo, con conocimientos sólidos, a nuevas situaciones.

Esperamos que las indicaciones propuestas sean suficientes. Pero creemos que todo alumno que participe activamente en cada clase, y que estudie y practique lo que corresponde antes de asistir a una siguiente clase, estará en condiciones de resolver cualquier prueba, y, en caso contrario, podrá entender las indicaciones aquí propuestas.

¡Recuerde, no acumule lecciones!, al final será el motivo principal de su fracaso en la asignatura Matemática Básica II.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1. F V F F F V V V V F
2. F V F F V F F F
3. V V F V F F F
4. 2; $x = -2$; Escaleno; $x_g = 2$; 120°
5. $-\frac{11}{7}$; $(4\sqrt{2}; 0), (0; 4\sqrt{2}), (-4\sqrt{2}; 0)$ y $(0; -4\sqrt{2})$;
 $kr + k - r = 0$; -3
6. Como $S_1 = 16 u^2$, $S_2 = 20 u^2$ y $S_3 = 36u^2$.
 La relación entre las áreas es: $S_1 + S_2 = S_3$. (La diagonal de un paralelogramo divide en dos triángulos iguales).
7. La única manera de averiguar si P es punto positivo (W) o punto negativo (W'), es haciendo algunos cálculos. Como $m_{AB} = 0$, $m_{BC} = 3$, $m_{AC} = -3$, y con $P(8; 4)$, $m_{AP} = -1$, $m_{BP} = \frac{1}{2}$, $m_{CP} = -7$. Determinamos que P es W, punto positivo de Brocard, comprobando que se cumple:
 $\text{tgPBA} = \text{tgPAC} = \text{tgPCB} = \frac{1}{2}$.
 [No es punto negativo (W') porque: tgPAB y tgPBC , son diferentes, como es fácil comprobar].
 Como $\text{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, se tiene: $\alpha = \text{arc tg } \frac{1}{2}$.
8. Si el rombo es ABCD, realizando cálculos trigonométricos se obtiene:
 $C(8 + 4\sqrt{3}; 4)$ y $D(4\sqrt{3}; 4)$.
 Por puntos medios, la intersección de las diagonales es: $(4 + 2\sqrt{3}; 2)$, y su área es $32 u^2$.

9. Como la altura que pasa por el vértice A es horizontal, y como el lado BC es vertical, por lo que $C(6; k)$.
Por otro lado, $m_{AB}m_{CH} = -1$, de donde: $k = -6$.
10. Calculando lados y ángulos se concluye que el triángulo es isósceles oblicuángulo.
El mayor ángulo es el ángulo B y mide 150° , y el área del triángulo es $9 u^2$.
11. Si L, la bisectriz del primer cuadrante, es mediatriz de AB, entonces se cumple: $d_{OA} = d_{OB} = d_{OM} = 8u$, donde M es el punto medio de AB.
Si P y P' son los puntos buscados, (es fácil comprender que existen dos puntos que verifican la condición), se tiene: $d_{MP} = d_{MP'} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.
Entonces, $d_{OP} = 8 + 15 = 23$, y $d_{OP'} = 15 - 8 = 7$.
Finalmente, se tiene:
 $P(23 \cos 45^\circ; 23 \sin 45^\circ)$ y $P'(-7 \cos 45^\circ; -7 \sin 45^\circ)$. Reemplazando los valores trigonométricos, se obtiene la respuesta.

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS

12. F F V V F F V
13. F V F F V V F F
14. Reemplazando las ecuaciones de traslación, se igualan a cero los coeficientes de los términos: $x'y'$, x' e y' .
El nuevo origen es $O'(-1; 0)$, y la ecuación transformada: $x'^2y' = 2$.
15. Al reemplazar $x = x' + h$ e $y = y' + k$, el término independiente de la expresión resultante debe ser igual 0, en consecuencia, la condición que deben cumplir las coordenadas del nuevo origen es: $3h - k + 12 = 0$. Es decir, el nuevo origen es necesariamente un punto de la recta: $3x - y + 12 = 0$. El gráfico es una recta paralela a la recta dada.
16. Efectuando la traslación con $O'(h; k)$, se obtiene: $x'(y')^2 = 3$, cuando $O'(-5; 2)$. El gráfico debe mostrar los ejes XOY y los ejes paralelos $X'O'Y'$, donde O' es la intersección de las asíntotas de la curva.
17. Sí, es posible al efectuar una traslación al punto $(6; -4)$.
El valor de $q = 36$, y la constante es igual a 4.
18. Al reemplazar las ecuaciones de traslación se obtiene:
 $Ax' + By' + (Ah + Bk + C) = 0$, donde el paréntesis es igual a cero por ser $(h; k)$ un punto de la recta.
19. Si $(h; h)$ es el nuevo origen de coordenadas, el eje x' tiene como ecuación en el antiguo sistema: $y = h$, y los vértices del triángulo son: $(0, 0)$, $(\frac{h}{3}; h)$ y $(2h; h)$.
Como el área de este triángulo es 30 u^2 , resultan dos valores para h , y se tiene como solución: $(6; 6)$ y $(-6; -6)$.
20. Al factorizar, se obtiene: $2(x - 3)^2 - (y + 2) = 0$. Si hacemos $x' = x - 3$ e $y' = y + 2$, la ecuación se convierte en una con dos términos: $y' = 2x'^2$. La discusión y la gráfica son simples, ya que se trata de una parábola de eje vertical, con vértice en el punto $(3; -2)$ referido al sistema de coordenadas original.

21. Sustituyendo las ecuaciones de traslación en ambas ecuaciones, se tienen como términos independientes: $h + k + 1 = 0 \wedge hk - h + 2k - 2 = 0$, y al resolver el sistema, las coordenadas del nuevo origen son: $(-2; 1)$.
(Como comprobación, las nuevas ecuaciones son: $x' + y' - 8 = 0 \wedge x'y' - 8 = 0$).
22. Si las rectas son: $y = mx + b_1$ e $y = m^{-1}x + b_2$, el punto $(4; 6)$ está en ellas y con $|b_2 - b_1| = 10$ se obtiene:
 $x - 2y + 8 = 0 \wedge 2x + y - 14 = 0$.
Si se trasladan a un punto $(h; k)$, al reemplazar y considerar lo enunciado, se obtiene que las coordenadas del nuevo origen son: $O'(8; -2)$.
23. La recta pasa siempre por el origen de coordenadas por ser su ecuación: $x - 4y = 0$. Al trasladar los ejes al punto $O'(8; 2)$, la ecuación resultante tiene la misma forma que la ecuación original: $x' - 4y' = 0$.
24. La ecuación del lugar geométrico que describe el punto C es:
 $2x^2 + y^2 - 32 = 0$.
(Si $C(x; y)$, tenga en cuenta que: $\text{tg } A = -\text{tg } CAB$, puesto que A es el ángulo interior del triángulo y no el exterior. Por otro lado, $\text{tg } B = m_{BC}$).
Discusión:
Intersecciones: $(0; \pm 4\sqrt{2})$ y $(\pm 4; 0)$
Simetrías: eje X, eje Y y el origen.
Asíntotas: no tiene.
Extensión: Dom: $[-4; 4]$ Ran: $[-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2}]$
(La gráfica es la de una elipse y se deja como ejercicio).
25. Si a y b son los interceptos, la recta es: $bx + ay - ab = 0$ (1).
También, por semejanza de triángulos: $ax = by$ (2), y se cumple Pitágoras: $a^2 + b^2 = k^2$ (3).
Eliminando algebraicamente a y b, se obtiene la ecuación del lugar geométrico.
De (2), se despeja "a" y se sustituye en (3), de allí se despeja b:
 $b^2 = \frac{kx^2}{x^2 + y^2}$, con lo que: $a = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{kx^2}{x^2 + y^2}}$. Finalmente, sustituyendo en (1), se obtiene lo solicitado.

LÍNEA RECTA

26. V V F V F F V F

27. F F F V F F V F

28. $2x' + 3y' = 0$; $k = 4$; $2x - 3y - 11 = 0$; $2x + y + 5 = 0$; -3 ; -4 ;
 $x = a$ ó $y = b$; perpendiculares.

29. $2x + 3y - 23 = 0$; $6x - 9y + 8 = 0$; 120° ; $-\frac{19\sqrt{34}}{34}$; $\frac{15}{26}$; $12,50 \text{ u}^2$.

30. La recta que pasa por los dos primeros puntos es $L: x + 9y - 52 = 0$,
 y el punto $(25; 3)$ está en L .
 Se puede demostrar que tres puntos A , B y C son colineales también de las
 siguientes maneras:

- * $m_{AB} = m_{BC}$
- * $d_{AB} + d_{BC} = d_{AC}$
- * Verificando que el área del "triángulo" ABC es cero.
 (Sólo pedían dos).

31. Al dibujar el triángulo, con las restricciones dadas, se encuentra:

Área del triángulo ABC : $S = \frac{(b - a)c}{2}$

Coordenadas del baricentro: $G(\frac{a+b}{3}; \frac{c}{3})$, como promedio de las coordenadas
 de los tres vértices.

Ecuaciones de las alturas: $h_a: bx - cy - ab = 0$; $h_b: ax - cy - ab = 0$;
 $h_c: x = 0$. (Se determinan las ecuaciones de los tres lados utilizando la forma
 segmentaria, y luego se encuentran las ecuaciones de las tres alturas).

Ortocentro: $H(0; -\frac{ab}{c})$ (Es la intersección de las tres alturas del triángulo).

32. La recta que pasa por AB , en forma explícita (pendiente - ordenada), es:

$y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$; en la forma segmentaria es: $\frac{x}{-15} + \frac{y}{\frac{15}{2}} = 1$ y en la forma

general es: $x - 2y + 15 = 0$.

Hay dos soluciones para el punto C : $C_1(-35; -10)$ y $C_2(-11; 2)$.

(Se obtienen usando las siguientes razones de división del segmento AB ,

$r_1 = -\frac{2}{3}$ y $r_2 = \frac{2}{3}$

33. El $\angle B = 45^\circ$ (las pendientes de las rectas final e inicial son: $m_{BC} = 7$ y $m_{BA} = \frac{3}{4}$) y el área del triángulo es $12,5 u^2$.
34. Las rectas son: $L_{AA'}: 2x - 3y + 21 = 0$; $L_{BB'}: x - 5y + 14 = 0$;
 $L_{CC'}: x + 2y + 7 = 0$.
 Estas rectas son concurrentes en el punto $P(-9; 1)$.
 (Son rectas concurrentes porque concurren en un punto, que es el punto de intersección o punto de concurso de las rectas).
35. El baricentro y el ortocentro del triángulo ABC , son los puntos: $G(1; 3)$ y $H(-1; 3)$. $d_{HG} = 2 u$. y la recta es: $l_{HG}: y = 3$. (La determinación del baricentro es inmediata, sus coordenadas son el promedio de las coordenadas de los vértices; pero la del ortocentro requiere la determinación de las alturas del triángulo: H es el punto de concurso de las ecuaciones de las tres alturas).
36. El área del trapecio es: $S = 2ka$. Esta área es independiente de la pendiente m . (El área se calcula directamente, multiplicando la base media o mediana del trapecio por su altura. El gráfico es simple, porque está en el primer cuadrante).
 Determinadas las ecuaciones de las rectas L_{OB} y L_{AC} , la abscisa del punto de intersección de ellas es: $x = \frac{a(k - am)}{k}$.
37. Como $d_{AB} = 8\sqrt{10}$, $d_{BC} = 10\sqrt{10}$ y $d_{AC} = 6\sqrt{10}$, al igualar los perímetros de los dos triángulos, se obtiene: $d_{BO} = 4\sqrt{10}$ y $d_{OC} = 6\sqrt{10}$. Al conocer la razón de división, se determina el punto $Q(-2; 8)$.
 La ecuación de la recta $L_{AO}: x - y + 10 = 0$.
 Las áreas son, respectivamente: $96 u^2$ y $144 u^2$.
38. El centro es $Q(2; 4)$ y el radio es $\sqrt{65} u$. (Se calcula el centro como intersección de mediatrices de los lados).
 El punto equidistante de los puntos medios de los lados es $Q'(4; 3,5)$. (Es fácil determinarlo al observar que los puntos medios forman, en este caso, un rectángulo).
39. Determinar las ecuaciones de las rectas $L_{AP}: x + 3y - 26 = 0$,
 $L_{BP}: 3x - y - 8 = 0$, $L_{PT}: 3x + 4y - 43 = 0$ y $L: y - 3 = 0$, con ellas se encuentran los puntos $R(17; 3)$, $S(\frac{11}{3}; 3)$ y $T(\frac{31}{3}; 3)$.
 Como $d_{ST} = d_{TR} = \frac{20}{3}$, se tiene que la razón solicitada es igual a la unidad.

el centro no está en el origen

40. Como el triángulo AOB es rectángulo isósceles, se encuentra: A(16; 0) y B(0; 16). Para el punto P se tienen dos posiciones: $P_1(23; 23)$ y $P_2(-7; -7)$. (Como P está sobre la primera bisectriz: $y = x$, se tiene $P(h; h)$, y haciendo $d_{AP} = 17\sqrt{2}$, se llega a la solución).
41. Los vértices son: $A'(3; 1)$, $B'(10; 8)$ y $C'(17; 1)$. Para determinar estos vértices es necesario pasar por cada uno de los puntos A, B y C rectas perpendiculares a la recta dada, e intersectar cada una de ellas de manera de obtener los puntos medios de los segmentos AA' , BB' y CC' . El circuncentro del triángulo $A'B'C'$ es el punto: (10; 1). Tome en cuenta que el triángulo $A'B'C'$ es rectángulo, y su circuncentro es el punto medio de su hipotenusa.
42. Los puntos son: $P(-1; 0)$ y $C(0; 2)$. El área del triángulo ABC es $13,50 \text{ u}^2$. (Si $C(0; y_c)$ y $P(x_g; 0)$ es el baricentro, se tiene que $x_g = -1$ y $y_c = 2$; el área es inmediata al conocer los tres vértices).
43. Calculadas las ecuaciones de las alturas h_a , h_b , y las ecuaciones de los lados L_{AC} y L_{BC} , se encuentran por intersecciones de estas rectas, los vértices A, B y C. (Haciendo un esquema es fácil identificar qué rectas intersectar). Los vértices del triángulo ABC son: $A(11; -3)$, $B(-5; 9)$ y $C(-10; -6)$. El pie de la altura que parte del vértice C es el punto $(-1; 6)$.
44. Las rectas por donde pasan los puntos son: $L_1: y = 2$; $L_2: x - y + 2 = 0$. Los puntos de intersección son $P(-2; 12)$, $Q(10; -4)$ y $R(4; 4)$, y son colineales porque se encuentran sobre la recta: $4x + 3y - 28 = 0$.
45. Bastará probar: $d_{AQ} = d_{BQ} = d_{CQ} = d_{DQ} = \sqrt{65} \text{ u}$. Las cuerdas AB ($2x - 3y + 14 = 0$) y CD ($3x + 2y + 8 = 0$) se cortan en el punto: $P(-4; 2)$ y forman un ángulo de 90° .
46. Si las rectas paralelas dadas son L_1 y L_2 , y las paralelas buscadas son: L_3 y L_4 , ocurre que L_3 es paralela media entre L_1 y L_4 , y L_4 es paralela media entre L_3 y L_2 . (Haciendo un esquema es fácil ver la relación señalada). Finalmente las paralelas buscadas son: $2x - 3y = 0 \wedge 2x - 3y - 18 = 0$.
47. Si las rectas son: $y = mx + b_1$ e $y = m^{-1}x + b_2$, el punto (4; 6) está en ellas y resultan, con $|b_1 - b_2| = 10$, dos valores para la pendiente: 2 y 0,5. Son dos pares de rectas y dos cuadriláteros cuyas áreas son iguales a 29 u^2 .

48. Son dos trapezios de vértices: $A(5; 5)$, $B(17; 10)$, $C(17; -10)$ y $D(5; -5)$ $A'(5; 5)$, $B'(-7; 10)$, $C'(-7; -10)$ y $D'(5; -5)$. Un análisis de los datos permite encontrar directamente la solución: el área de los trapezios es 180 u^2 .
49. Si $B(x; y)$ es el punto buscado, el punto satisface la ecuación de la recta dada y debe cumplir la condición: $m_{AB}m_{BC} = -1$. Al resolver el sistema formado, se obtiene: $B(-1; -3)$.
50. Al despejar y se obtiene: $y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} x$.
 Si $\sqrt{B^2 - 4AC} > 0$, son dos rectas diferentes que pasan por $(0; 0)$.
 Si $\sqrt{B^2 - 4AC} = 0$, son dos rectas coincidentes que pasan por $(0; 0)$.
 Si $\sqrt{B^2 - 4AC} < 0$, la ecuación es un conjunto vacío.
 Las rectas son perpendiculares cuando: $A + C = 0$.
51. Se determinan los puntos medios y las pendientes de cada par de lados opuestos, comprobando que es un paralelogramo.
52. El lado paralelo al dado se determina por familia de rectas:
 $x - 2y - 18 = 0$.
 Los otros lados pertenecen a la familia de rectas perpendiculares:
 $2x + y + C = 0$, obteniendo dos valores para C , al utilizar también la distancia del centro E , obteniendo las rectas:
 $2x + y + 14 = 0 \wedge 2x + y - 16 = 0$.
53. La recta buscada es $y = -\frac{2}{3}x + b$, recta que se intersecta con las dadas, obteniendo las abscisas de los puntos P , Q y R en términos del parámetro b . Luego con $2x_q = x_p + x_r$ se encuentra: $2x + 3y - 22 = 0$.
54. La intersección de las mediatrices es el baricentro $G(1; 1)$, y el punto medio de BC es $M(1; 0)$, en razón de la relación de 2 a 1, en la cual corta el baricentro a la mediana.
 Como $B(2y_b - 1; y_b)$ y $C(x_c; 1)$, por encontrarse sobre las medianas dadas, se obtienen utilizando $M(1; 0)$: $B(-3; -1)$ y $C(5; 0)$.
 Las ecuaciones de los lados AB , BC y AC son:
 $x - y + 2 = 0$, $x - 8y - 5 = 0$, $3x + 4y - 15 = 0$.
55. Como el punto buscado es $P(x_p; -2)$, y se cumple: $2d_{PO} = d_{PA}$, se obtiene para P dos soluciones: $(-6; -2)$ y $(2; -2)$.

56. La pendiente de la recta OB, es $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, donde $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{6}$ y $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$, es decir, la pendiente es 1, y $L_{OB}: x - y = 0$.
El punto B es la intersección de la recta L_{OB} y la recta $L_{AB}: 2x - y - 15 = 0$, obteniendo para B(5; 5).
El punto C es simétrico del punto A(6; 3) con respecto al punto medio M de OB, es decir: C(-1; 2).
57. i) Secantes, cuando tienen pendientes diferentes: $p \neq 3; q \in \mathbb{R}$
ii) Paralelas, pendientes iguales: $p = 3; q \neq 2$
iii) Perpendiculares, $m_1 m_2 = -1$: $p = -\frac{4}{3}; q \in \mathbb{R}$
iv) Coincidentes, coeficientes proporcionales: $p = 3; q = 2$
58. Designando los vértices desconocidos como $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ y $(x_3; y_3)$, al aplicar tres veces el concepto de punto medio, se forman seis ecuaciones que permiten obtener: (0; 7), (-2; -3) y (6; 1).
El lado de menor pendiente es el que pasa por los vértices: (0; 7) y (6; 1), y su ecuación es: $x + y - 7 = 0$.
59. Si $\frac{x}{y} = 4$, la recta es $4x - y = 0$, y siempre pasa por el origen de coordenadas. Al efectuar la traslación se obtiene: $4x' - y' = 0$.
(No cambia de forma porque el nuevo origen se encuentra sobre la recta original).
60. Si $P(h; h - 14)$ es un punto de la recta dada, se obtiene para el área del triángulo APB 24 u^2 . (Sorprende que esta área sea constante, pero ello ocurre porque el lado AB es paralelo a la recta).
El área del otro triángulo es $\pm(3h - 36)$, de donde se obtienen como respuestas: $P_1(20; 6)$ y $P_2(4; -10)$.
61. El vértice B es $h_b \cap m_b$; el lado l_{AC} es perpendicular a h_b y pasa por A.
Si M es $l_{AC} \cap m_b$, es el punto medio de BC, calculados los otros dos vértices B y C, se determinan fácilmente las ecuaciones de los lados AB y BC.
Los cálculos parciales y las respuesta son: B(0; 0), $l_{AC}: 2x + 3y - 20 = 0$; M(4; 4); C(7; 2); $l_{AB}: 6x - y = 0$; $l_{AC}: 2x - 7y = 0$.
62. Como $a = b$, entonces: $A = B$ y $C \neq 0$.
Como $m = -1$, entonces: $A = B, C \in \mathbb{R}$.
Cuando $x = 1$ e $y = 2$, entonces: $A + 2B + C = 0$.
Cuando $x = y = 0$, $C = 0$, y A y $B \in \mathbb{R}$.

63. Si asumimos: $P(a; 0)$, $Q(a; b)$ y $R(c; d)$, y como: $m_{AC} = 2$, $m_{BC} = -1$, se tiene que cumplir: $m_{PR} = -0,5$, $m_{QR} = 1$.
 Entonces: $m_{QB} = m_{BC}$: $\frac{b}{a - 132} = -1$, $m_{RQ} = 1$: $\frac{b - d}{a - c} = 1$, $m_{AR} = 2$: $\frac{d}{c} = 2$, y finalmente: $m_{PR} = -0,5$: $\frac{d}{c - a} = -\frac{1}{2}$.
 Al resolver, se obtiene: $P(60; 0)$, $Q(60; 72)$ y $R(12; 24)$.
 El área del triángulo, es: $\frac{b(a - c)}{2} = 1728 \text{ u}^2$.
64. Por los procedimientos usuales se encuentran las rectas y los puntos E y F:
 $4x + 3y - 5 = 0 \cap 2x - y + 5 = 0 : E(-1; 3)$
 $x + 7y - 95 = 0 \cap x - 3y + 25 = 0 : F(11; 12)$.
 Las coordenadas de los puntos medios de los lados mencionados son:
 $P(-4; 12)$, $Q(0; 10)$ y $T(5; 7,5)$.
 La ecuación de Gauss o de Newton es: $x + 2y - 20 = 0$.
65. Al dibujar se observa que el problema tiene dos soluciones.
 Del dato: $\sin \theta = 0,6$ se tiene $\operatorname{tg} \theta = 0,75$.
 Si la recta dada, de pendiente $-\frac{1}{3}$, forma un ángulo θ con la recta que se busca.
 Es fácil escribir: $\frac{3}{4} = \frac{m_1 - (-\frac{1}{3})}{1 + m_1(-\frac{1}{3})}$ y también: $\frac{3}{4} = \frac{-\frac{1}{3} - m_2}{1 + (-\frac{1}{3})m_2}$. Entonces se obtiene como solución: $x - 3y + 7 = 0 \wedge 13x + 9y - 5 = 0$.
66. Si $A(a; 0)$ y $B(0; b)$, el punto $P(-3; 1)$ satisface la razón: $\frac{AP}{PB}$, de donde:
 $a = -9$ y $b = 1,5$.
 Las ecuaciones buscadas son: $x - 6y + 9 = 0$, y unas paramétricas son:
 $\begin{cases} x = -9 + 6t \\ y = t \end{cases}$, u otra equivalente.
67. Como $m_{AH} = -8$, se tiene: $l_{BC}: x - 8y + 26 = 0$, y en forma similar:
 $m_{BH} = 2$, $l_{AC}: x + 2y + 6 = 0$. Intersectando las rectas, se tiene: $C(-10; 2)$.

68. Como la ecuación es: $Cy^2 + (Bx)y + Ax^2 = 0$, de donde:

$$y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} x$$

Es decir, son rectas de pendientes m_1 y m_2 , iguales a los coeficientes de x .

Analizando:

Si $B^2 - 4AC > 0$, son dos rectas que pasan por $(0; 0)$.

Si $B^2 - 4AC = 0$, son dos rectas coincidentes de pendiente $-\frac{B}{2A}$ que pasa por $(0; 0)$.

Si $B^2 - 4AC < 0$, se tiene el vacío.

Las rectas son perpendiculares si $A + C = 0$, expresión que se obtiene al efectuar: $m_1 m_2 = -1$.

69. Si el triángulo rectángulo es QPR, donde $Q(3; 5)$, $P(3; 0)$, como el área es 10 u^2 , el otro cateto es 4, y $R(7; 0)$. La ecuación de la recta l_{QR} , es: $5x + 4y - 35 = 0$. (R debe estar a la derecha de P, de manera que la pendiente de la recta sea menor que la unidad).

70. m es la pendiente, y $m = \text{tg } \alpha$, donde α es la inclinación de la recta. Es decir, el menor ángulo que debe girar el semieje positivo x de manera que sea paralelo a la recta.
 a y b son los interceptos, es decir la abscisa y la ordenada en el origen.
 a_1 y a_2 son los coeficientes del parámetro en la forma paramétrica de la recta.
 El par $(x_1; y_1)$ es un punto de paso, o punto cualquiera de la recta.

La pendiente de la recta es el cociente: $m = \frac{a_2}{a_1}$.

71. Como $m_{AD} = m_{BC} = \frac{1}{2}$, $L_{AD}: x - 2y - 5 = 0 \wedge L_{BC}: x - 2y + 4 = 0$ son los lados paralelos. Los lados no paralelos son: $L_{AB}: 5x - y + 11 = 0 \wedge L_{CD}: x + y - 5 = 0$, que se encuentran en $P(-1; 6)$.
 La base media o mediana del trapecio está sobre la paralela media de las rectas L_{AD} y $L_{BC}: x - 2y - \frac{1}{2} = 0$, y la proyección del punto P sobre ella es el punto: $(1,7; 0,6)$, que se obtiene al intersectar la ecuación de la mediana o base media del trapecio, con la perpendicular a ella que pasa por P:
 $L_{pp}: 2x + y - 4 = 0$.

72. Conociendo los extremos y la razón de división, se encuentra $Q(4; \frac{11}{3})$, punto que pertenece a la recta dada, con lo cual se encuentra: $k = -3$.
73. Como el punto medio de AC es $M(2; 2)$, la pendiente de la mediana es $\frac{1}{4}$ y la pendiente de la recta que se busca será: -4 .
La ecuación general es: $4x + y - 3 = 0$.
La ecuación segmentaria es: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.
Las paramétricas pueden ser: $x = 1 + t \wedge y = -1 - 4t$.
74. Los lados L_{BC} y L_{AB} son perpendiculares a las alturas dadas y pasan por el vértice $A(-4; -5)$, y son: $L_{BC}: 3x - 5y - 13 = 0$ y $L_{AB}: 8x - 3y + 17 = 0$.
Los vértices A y C se obtienen intersectando convenientemente lados con alturas, obteniendo: $A(-1; 3)$ y $C(1; -2)$, de donde: $L_{AC}: 5x + 2y - 1 = 0$.
75. Completando cuadrados, se encuentra:
a) Vacío, porque: $2(x - 2)^2 + 2(x + 1)^2 = -3$.
b) Un punto, el origen de coordenadas.
c) Como $(y + 4)^2 = 0$, la ecuación representa una recta. (Usualmente se dice dos rectas coincidentes, pero geoméricamente es sólo una recta).
d) Un punto $(5; -2)$, porque se obtiene: $2(x - 5)^2 + 3(y + 2)^2 = 0$.
76. Son dos triángulos rectángulos ABC que verifican las condiciones dadas. El vértice del ángulo recto es: $B_1(1,8; 3,4)$ ó $B_2(3,2; 3,4)$.
La altura del triángulo relativa a la hipotenusa es: $3 \times 4 = 5h$, $h = 2,4$. Por otro lado, el vértice B no puede estar sobre el eje de ordenadas porque el primer cuadrante está formado por los pares ordenados $(x; y)$ tales que $x > 0$ e $y > 0$. En consecuencia, el vértice del ángulo recto será: $(x; 3,4)$, porque la hipotenusa está sobre la recta $y = 1$. luego, como los catetos son perpendiculares, se obtiene para x dos valores: 1,8 y 3,2.
77. Si las rectas buscadas son de la forma: $bx + ay = ab$, donde $a + b = -3$, y además se tiene que cumplir: $5b + 4a = ab$, (porque el punto $(5; 4)$ es punto de la recta), se obtienen dos rectas de pendientes 0,4 y 2. Tomando la segunda, la ecuación general es: $2x - y - 6 = 0$. Las otras formas solicitadas son simples de obtener.

78. Luego de hallar las ecuaciones de los lados y de las alturas, se encuentra el ortocentro, y se determinan las longitudes de los segmentos en que el ortocentro divide cada altura: uno de los segmentos como distancia entre dos puntos, y el otro como distancia del ortocentro a cada lado. Finalmente se demuestra que el producto de los segmentos es constante e igual a $50 u^2$.
79. Demostración: Como la recta es: $bx + ay - ab = 0$, bastará aplicar la distancia del punto $(b; a)$ a la recta.
80. $q = 4$ (los coeficientes de x e y son proporcionales).
Hay dos pares de valores de r y p que satisfacen las condiciones dadas:
 $r_1 = 6 \quad r_2 = -6 \wedge p_1 = 4 \quad p_2 = -4$
(para obtener los valores de p y q , se obtiene una segunda ecuación entre p y r aplicando la distancia de un punto de una recta a la otra).
81. Los puntos que están sobre la recta: $3x + 4y - 50 = 0$, y que equidistan de las otras dos rectas, están sobre las bisectrices de estas ($x = 7y$, $7x + y - 50 = 0$) y son los puntos $(14; 2)$ y $(6; 8)$.
82. Los lados del triángulo son: $L_{AB}: 7x + 13y + 9 = 0$, $L_{BC}: x + y - 3 = 0$, $L_{AC}: x - y + 7 = 0$. La bisectriz exterior del vértice C : $y = 5$. (Los lados BC y AC son perpendiculares y sus inclinaciones son 45° y 135° , y la bisectriz exterior es horizontal). El punto $Q(-\frac{74}{7}; 5)$.
83. Altura: $x - 3y - 23 = 0$; mediatriz: $x - 3y - 3 = 0$;
mediana: $9x - 7y - 47 = 0$; bisectriz: $x - y - 7 = 0$.
84. Las ecuaciones de los lados son: $L_{AB}: 3x - y - 3 = 0$;
 $L_{BC}: x - 3y - 25 = 0$; $L_{AC}: 3x + y - 15 = 0$.
El incentro del triángulo, intersección de bisectrices interiores, es $I(3; -4)$.
El área del triángulo mediano es: $S_M = 15 u^2$.
(Los vértices del triángulo mediano son: $A_m(2,5; -7,5)$, $B_m(5; 0)$ y $C_m(0,5; -1,5)$).
85. VERIFICACIÓN (por los procedimientos conocidos se obtiene: $Q(2; 4)$ e $I(4; 3)$, la pendiente de QI es $-0,5$ y la pendiente de la bisectriz 2).
86. Determinadas las ecuaciones de los lados $L_{AB}: 2x - y - 20 = 0$; $L_{BC}: y - 6 = 0$; $L_{AC}: x + y + 11 = 0$, se calculan las ecuaciones de las alturas: $h_a: x - 3 = 0$; $h_b: x - y - 7 = 0$; $h_c: x + 2y + 5 = 0$.
Combinando convenientemente se obtiene: $A'(3; 6)$; $B'(-2; -9)$; $C'(7; -6)$.
Como el incentro del triángulo órtico es el ortocentro del triángulo ABC , se obtiene: $H(3; -4)$, es decir $I'(3; -4)$.

87. Si $Q(h; \frac{14h + 33}{5})$ es el centro de la circunferencia buscada, como su distancia a uno de los lados que forman el ángulo es 10u., se encuentran así para h dos valores.
Son dos circunferencias de centros: $Q_1(-7; -13)$ y $Q_2(3; 15)$.
88. Como los puntos que equidistan de dos rectas se encuentran sobre las bisectrices de ellas, bastará intersectar la recta dada con las ecuaciones de las bisectrices.
Como las bisectrices son: $x - 8y + 14 = 0 \wedge 8x + y - 18 = 0$, los puntos buscados son: $Q_1(74; 11)$ y $Q_2(9; -54)$.
89. La ecuación de la perpendicular a la bisectriz ($x + 2y - 25 = 0$) es:
 $2x - y - 15 = 0$.
90. Si P equidista de los segmentos dados, P está sobre la bisectriz del ángulo agudo que ellos forman. (No puede estar sobre la bisectriz exterior porque el punto equidista, en tal caso, de los lados que contienen a dichos segmentos, como es fácil de ver en un gráfico).
Como la bisectriz es: $y - 5 = 0$, al intersectar con la recta dada se encuentra: $P(3; 5)$.
91. El vértice del haz (intersección de las dos rectas que determinan la familia), es: $(2; -1)$, coordenadas que determinan la recta: $4x - 3y - 11 = 0$.
Entonces, C deberá ser diferente de -11 , para que la recta no pertenezca a la familia dada.
92. Según el enunciado, los interceptos son: $(h; 0)$ y $(0; -h)$, y la familia es:
 $x - y + h = 0$. Las rectas que distan del origen son: $x - y \pm 10 = 0$.
(Deben darse las dos soluciones).
93. Hay dos familias de rectas: $y = 5x + b \wedge y = -\frac{1}{5}x + b$, $b \in \mathbb{R}$.
Las pendientes de estas rectas se encuentran a partir del ángulo entre dos rectas:
$$\frac{\frac{2}{3} - m}{1 + \frac{2}{3}m} = \pm 1.$$

94. Por los procedimientos usuales, se obtiene: $L_{AC}: dx + (a - c)y - ad = 0$; $L_{BD}: dx + by - bd = 0$; $L_{MN}: 2dx + (a + b - c)y - ad - bd = 0$. Para verificar que son concurrentes, se puede resolver dos de las ecuaciones y comprobar que el punto de intersección satisface la tercera ecuación, pero es muy largo algebraicamente. Es más fácil la demostración por familia de rectas: sumando las dos primeras se obtiene la tercera, y la tercera pasa por el punto de intersección de las dos primeras.
95. Si $P(x; y)$ es el punto móvil, se tiene que: $\frac{d_1}{d_2} = \frac{13}{5}$, donde d_1 y d_2 son las distancias de P a las rectas que contienen a los segmentos AB y CD . Finalmente se encuentra que el punto móvil se desplaza sobre las rectas: $8x - 2y - 79 = 0 \wedge 16x - 8y - 65 = 0$, excepto el punto de concurrencia de dichas rectas: $Q(\frac{251}{16}; \frac{93}{4})$.
96. El área del terreno antes de la expropiación es: 13.400 m^2 . Como $l_{AB}: 4x - 3y + 250 = 0$, se determina la ecuación de una paralela a ella a 20 m. , de manera que cruce el terreno: $l_{MN}: 4x - 3y + 150 = 0$. Intersectando cuidadosamente, se encuentra que el terreno a expropiarse es un pentágono de vértices: $A(50; 150)$, $B(-70; -10)$, $M(-50; -\frac{50}{3})$, $N(70; \frac{430}{3})$ y $E(70; 150)$. M está sobre el lado BC y N sobre el lado DE . El eje de la carretera es la paralela media de las rectas AB y MN : $4x - 3y + 200 = 0$.
97. Analizando el gráfico correspondiente, se puede concluir que el lugar geométrico solicitado son dos rectas paralelas a la recta dada a una distancia de 5 u. En consecuencia el LG es: $12x + 5y + 66 = 0 \wedge 12x + 5y - 64 = 0$. (Evidentemente la recta tangente es paralela media de las dos paralelas solución).
98. El ortocentro es siempre el origen de coordenadas porque el triángulo AOB es recto en O . (En este caso, el lugar geométrico es un punto, y se describe como tal: $(0; 0)$). El circuncentro, por ser el triángulo rectángulo, es el punto medio de la hipotenusa, y es en general el punto $(x; 6)$, donde $x > 0$. El circuncentro de todos los triángulos AOB es en consecuencia: $y = 6$, donde $x > 0$.

99. El triángulo es equilátero, verificándose: $d_{AB} = d_{BC} = d_{CA} = 2\sqrt{3} u$.
Pueden darse tres casos (sólo había que hacer un caso), en cada uno se encuentra una ecuación:
Si $d_{AM}^2 + d_{BM}^2 = 2d_{CM}^2$, el LG es: $y = 1$.
Si $d_{AM}^2 + d_{CM}^2 = 2d_{BM}^2$, el LG es: $y = \sqrt{3}x + 1$
Si $d_{BM}^2 + d_{CM}^2 = 2d_{AM}^2$, el LG es: $y = -\sqrt{3}x + 1$
En los tres casos, el LG es una recta paralela a uno de los lados (el formado por el par de puntos que se consideren) y pasa por el baricentro del triángulo $G(0; 1)$.
100. Las condiciones del problema son: $d_{AQ}^2 - d_{BQ}^2 = \pm 8$, obteniendo dos rectas paralelas: $10x - 24y - 37 = 0 \wedge 10x - 24y - 21 = 0$.
Estas rectas tienen como paralela media la mediatriz del segmento AB.
101. Si $P(x; y)$ es un punto del lugar geométrico que se busca, P es punto medio entre $A(2x; 0)$ y el punto dado $M(6; -8)$.
En consecuencia: $y = -4$ es la ecuación del lugar geométrico.

CIRCUNFERENCIA

102. F F V (F) V
103. Por familia de circunferencias: $3x^2 + 3y^2 - 32x - 22y = 0$;
 $2x - 5y + 19 = 0$; $x^2 + y^2 + 22x - 22y + 121 = 0 \wedge$
 $x^2 + y^2 + 22x + 22y + 121 = 0$; $ax + by = c$.
104. Teoría.
 Al completar cuadrados y analizar se encuentra que las restricciones son:
 Si $D^2 + E^2 - 4AF > 0$, es una circunferencia.
 Si $D^2 + E^2 - 4AF = 0$, es una circunferencia punto.
 Si $D^2 + E^2 - 4AF < 0$, es el vacío.
105. Como los vértices del cuadrilátero equidistan de $O'(6; 7)$, el cuadrilátero es cíclico. (El circuncentro O' se encuentra en la intersección de las mediatrices de los lados del cuadrilátero. Luego se comprueba que los segmentos: $O'A$, $O'B$, $O'C$ y $O'D$, son de igual longitud).
 Las ecuaciones de las circunferencias inscritas en los triángulos ABD y ACD, son: $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 20 \wedge (x - 3)^2 + (y - 11)^2 = 20$, que se determinan por los procedimientos usuales.
106. Como las circunferencias C_1 y C_2 son tangentes exteriores, el centro Q de la circunferencia buscada es la intersección de la recta dada con la que pasa por los centros de las circunferencias C_1 y C_2 ; el radio es la distancia de Q al punto de intersección de C_1 y C_2 .
 La ecuación de la circunferencia solución, es: $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 20$.
107. Como el centro de la circunferencia es $(1; 0)$, y su radio es $r = 1$, y el eje radical: $8x - 15y + 26 = 0$, la distancia del centro al eje radical es: $d = 2$, y la menor y mayor distancia son: $d - r = 1u$. y $d + r = 3u$.
108. Circunferencias inscritas: $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 2^2 \wedge$
 $(x - 8)^2 + (y - 9)^2 = 2^2$ (los cuadrados de diagonales AB y BC tienen sus lados paralelos a los ejes coordenados, porque las inclinaciones son iguales a 45° , y sus lados miden 4 u.).
 Tangentes comunes: $x = 6 \wedge y = 7$ (son inmediatas al ver las figuras).
 $x - y + 1 + 2\sqrt{2} = 0 \wedge x - y + 1 - 2\sqrt{2} = 0$ (como las circunferencias son de igual radio, las tangentes comunes son paralelas a las diagonales de los cuadrados, y a una distancia de 2 u. de los centros de las circunferencias o puntos medios de las diagonales).

109. El área del cuadrilátero ABCD es 195 u^2 . (Las tangentes son: $8x - y + 65 = 0 \wedge 7x + 4y - 65 = 0$, y su punto de intersección $B(-5; 25)$).
110. Si se hace un esquema, se observa que el centro de la circunferencia es la intersección de la mediatriz de PQ y la perpendicular a la recta tangente dada en Q. Con el centro $(3; 8)$ y el radio $2\sqrt{13}$, la ecuación de la circunferencia buscada es: $x^2 + y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$.
111. La circunferencia tangente a los lados iguales en los vértices B y C de la base, es: $(x - 9)^2 + (y - 2)^2 = 65$.
El punto $P(10; 10)$ está en la circunferencia hallada.
La distancia "d" de P a L_{BC} es $\sqrt{26}$, la distancia "d₁" de P a L_{AB} es $\sqrt{65}$ y la distancia "d₂" de P a L_{AC} es $\frac{26\sqrt{65}}{65}$. Se verifica: $d^2 = d_1 \cdot d_2$.
112. La distancia de $(h; k)$ a $P(7; 5)$ es $\sqrt{10}$, y la distancia de $(h; k)$ a la recta dada es también $\sqrt{10}$. El centro buscado es: $(4; 6)$.
113. Los puntos $M(2,5; 7,5)$, punto medio de BC; $D(1,8; 5,4)$, pie de la altura h_a ; $Q(1; 7)$ y $P(3; 6)$, proyecciones de los vértices B y C sobre la bisectriz interna del ángulo A ($x + 2y - 15 = 0$), son puntos concíclicos al ser puntos de la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 6,5)^2 = 1,25$.
114. El centro buscado es el punto de intersección de las bisectrices interiores de los vértices A y C (las cuales coinciden por la simetría: $x = 0$) y de las bisectrices exteriores de los vértices B ($2x - y - 14 = 0$) y D.
El centro de la circunferencia es $Q(0; -14)$. (Como verificación la distancia es $2\sqrt{10} \text{ u.}$).
115. La ecuación de la circunferencia circunscrita es: $x^2 + y^2 - 22x + 22 = 0$. Punto de abscisa mínima: $S(-11; 11)$. Punto de abscisa máxima: $T(-1; 21)$.
116. El centro de la circunferencia buscada es la intersección de las paralelas medias de cada par de rectas tangentes dadas, resultando: $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 31 = 0$.
117. Verificación. Los puntos H y R tienen como coordenadas $(2; 1)$.

118. Bastará encontrar los puntos que disten 5 y 10 u. de los centros de las circunferencias dadas cuyos radios son 2 u. y 7 u., respectivamente. Son dos circunferencias con centros en los puntos: $(7; -2)$ y $(-1; 2)$.
119. La cuerda común está sobre el eje radical de las circunferencias:
 $x - y - 1 = 0$.
 El punto de ordenada máxima de la segunda circunferencia es $(-2; 5)$, el cual se encuentra 4 unidades por encima del centro.
 Finalmente la distancia solicitada es $\sqrt{106}$ u.
120. El centro de la circunferencia buscada esta sobre: $y = x$. Si se escribe la familia de circunferencias: $C_1 + kC_2 = 0$, el centro de las circunferencias de la familia es: $\left[\frac{2 - 6k}{2(1 + k)}, \frac{4 - 10k}{2(1 + k)} \right]$. Como estas coordenadas son iguales por estar el centro sobre $y = x$, se obtiene $k = 0,5$ y la circunferencia buscada es: $3x^2 + 3y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$.
121. Como los lados son: $L_{AB}: 3x - y - 3 = 0$; $L_{BC}: x - 3y - 25 = 0$; $L_{AC}: 3x + y - 15 = 0$, las ecuaciones de las bisectrices interiores y exteriores de cada vértice son: $b_{A(i)}: x = 3$; $b_{A(e)}: y = 6$; $b_{B(i)}: x - y - 7 = 0$; $b_{B(e)}: x + y + 11 = 0$; $b_{C(i)}: x + 2y + 5 = 0$; $b_{C(e)}: 2x - y - 20 = 0$.
 Intersectando las bisectrices convenientemente se obtiene:
 Circunferencia inscrita: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 10$
 Circunferencia exinscrita al lado a: $(x - 3)^2 + (y + 14)^2 = 40$
 Circunferencia exinscrita al lado b: $(x - 13)^2 + (y - 6)^2 = 90$
 Circunferencia exinscrita al lado c: $(x + 17)^2 + (y - 6)^2 = 360$
 El incentro I es la intersección de las tres bisectrices interiores; cada excentro es la intersección de una bisectriz interior y de dos bisectrices exteriores: Así, I_A es la intersección de la bisectriz interiores del vértice A y de las bisectrices exteriores de los vértices B y C.
122. La circunferencia buscada tiene su centro en las bisectrices de los ejes coordenados: $x - y = 0 \wedge x + y = 0$ (sólo así la circunferencia será tangente a los dos ejes coordenados, ya que su centro está sobre las bisectrices de los ejes).
 En consecuencia, el centro será de la forma $Q(h; h)$ o $(h; -h)$, y su radio será $|h|$. El valor de h se encuentra igualando la distancia del centro Q a la recta que pasa por los puntos $(0; 3)$ y $(4; 0)$, cuya ecuación es:
 $3x - 4y + 12 = 0$.

Como se obtienen para h cuatro valores: 1, 6, 3 y -2 , las circunferencias buscadas son:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1^2, (x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 6^2, \\ (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 3^2, \text{ y } (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2.$$

123. Se demuestra que los puntos son concíclicos (que se encuentran sobre una misma circunferencia), determinando la ecuación de la circunferencia. Es fácil hallar la circunferencia que pasa por tres puntos A, B y C: $(x + 1)^2 + y^2 = 65$, y comprobando que el punto D está en ella.
124. a) Si $P(x; y)$ es un punto de la circunferencia que dista de la recta dada $2\sqrt{10}$ u., se tiene que cumplir: $|3x + y - 45| = 2\sqrt{10}$, es decir: $3x + y - 45 = \pm 2\sqrt{10}$.
Al resolver estas ecuaciones con la ecuación de la circunferencia, se obtienen dos puntos solución: $P_1(5; 10)$ y $P_2(6; 7)$.
- b) Para que la distancia de la recta a la circunferencia sea de 30 u., la distancia de un punto de la recta al centro de la circunferencia debe ser 30 más el radio de ella, es decir: 35u.
Existen dos puntos sobre la recta que distan 35 del centro $Q(1; 7)$. Estos puntos se encuentran resolviendo el sistema formado por la recta y una circunferencia con centro en $Q(1; 7)$ y radio 35. Los puntos son $(1; 42)$ y $(22; -21)$.
125. Si se hace un gráfico que muestre el triángulo con las circunferencias inscrita y circunscrita, se puede observar que los lados AB y AC pasan por el punto dado $A(-4; -1)$ y son tangentes a la circunferencia inscrita: $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 20$.
Entonces, como la familia de rectas que pasa por A es: $mx - y + 4y - 1 = 0$, y la distancia del centro $(-2; 5)$ a la familia es el radio $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, se puede escribir: $\frac{|-2m - 5 + 4m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2\sqrt{5}$, de donde $m_1 = 0,5$ y $m_2 = -2$; y las ecuaciones de los lados son: $l_{AB}: x - 2y + 2 = 0$; $l_{AC}: 2x + y + 4 = 0$.
De la misma figura, los vértices B y C son las intersecciones de los lados AB y AC con la circunferencia circunscrita, obteniendo: $B(12; 7)$ y $C(-10; 11)$.
126. Se puede indicar que aplicando el principio de desdoblamiento, por ser P_0 un punto exterior, se encuentra la ecuación de la cuerda de los contactos, cuerda que es la secante buscada.

127. La diagonal l_{PQ} es inmediata: $4x + y + 17 = 0$.
 La otra diagonal es la cuerda de los contactos, que se puede determinar por el principio de desdoblamiento: $x - 4y = 0$.
 Como los triángulos PT_1Q y PT_2Q son rectángulos, el centro de la circunferencia es el punto medio de la hipotenusa: $O'(-4; -1)$.
128. Los lados AD y BC ($2x + y + 3 = 0 \wedge x + 11 = 0$) se cortan en $P(-11; 19)$. Los otros dos lados opuestos BC y AD ($y - 3 = 0 \wedge x - 2y - 11 = 0$) se cortan en $Q(17; 3)$.
 Como $d_{PQ}^2 = 1040$, y las longitudes de las tangentes trazadas desde P y Q verifican: $t_1^2 = 480$ y $t_2^2 = 560$, y se cumple el teorema de Pitágoras: $480 + 560 = 1040$.
129. Los puntos A y B se encuentran intersectando una circunferencia de radio 10 u., con centro en $P(-3; 4)$, resultando: $A(7; 4)$ y $B(5; 10)$.
 El punto Q se determina intersectando dos rectas, la primera: $x - y - 3 = 0$, pasa por A y tiene pendiente igual a la unidad; la segunda: $x + 7y - 65 = 0$, pasa por B y su pendiente se determina utilizando el ángulo de 45° entre las rectas que pasan por los puntos PB y BQ, de donde: $Q(12; 9)$.
 Las longitudes de los recorridos son ambos iguales a: $10 + 5\sqrt{2}$ u.
130. Si $Q(h; 4 - h)$ es el centro de la curva, $d_{QA} = d_{QB}$ nos permite hallar la circunferencia: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$.
 Las tangentes de pendientes -1 son: $x + y - 4 \pm \sqrt{10} = 0$.
131. La circunferencia de diámetro PQ es: $x^2 + y^2 = 65$, y como el punto T intersección de las cuerdas PR y QS ($2x - y + 10 = 0 \cap y = 4$), $T(-3; 4)$, se tiene que la circunferencia que pasa por los puntos S, R y T tiene su centro en $O'(-5; 7,5)$, y se cumple que las pendientes de los radios al punto S, son: $m_{O'S} = -\frac{7}{4}$ y $m_{OS} = \frac{4}{7}$: es decir, son perpendiculares, y las circunferencias son ortogonales.
 [No es necesario probar la perpendicularidad de los radios al punto R por la simetría de las circunferencias, pero, si se hace, resulta: $m_{O'R} = \frac{1}{8}$, $m_{OR} = -8$].
132. El punto D es la intersección de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero y la recta que pasa por B y es perpendicular a la cuerda AC.
 La ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C es: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 65$. La recta es $x + y - 6 = 0$ y el punto: $D(8; -2)$.

133. T es la intersección de la ecuación del lado BC y de la ecuación de la recta perpendicular a ella que pasa por el incentro I. La intersección de las bisectrices interiores nos da el incentro: $x - y + 1 = 0 \cap x - 6 = 0$: I(5; 6). La ecuación del lado BC es: $x - 3y + 3 = 0$, la ecuación de la recta que pasa por el incentro es: $3x + y - 21 = 0$. La intersección es: T(6; 3).
134. Como se verifica el teorema de Pitot: $d_{AB} + d_{CD} = d_{AC} + d_{BD} = 105$, y el cuadrilátero es circunscriptible.
Para determinar el centro de la circunferencia inscrita, bastará determinar un par de bisectrices, resultando: Q(0; 10) y el radio 20. La ecuación de la circunferencia inscrita es: $x^2 + y^2 - 20y - 300 = 0$.
135. Los puntos en los cuales la circunferencia corta a los ejes coordenados y las respectivas tangentes (por desdoblamiento) son:
 $(8; 0) \quad x - 8 = 0$
 $(-2; 0) \quad x + 2 = 0$
 $(0; 4) \quad 3x - 4y + 16 = 0$
 $(0; -4) \quad 3x + 4y + 16 = 0$
 El área del trapecio formado es: 125 u^2 .
136. Si el centro de las circunferencias es Q(t; 7 - t), se cumple:
 $\sqrt{(t - 5)^2 + (7 - t - 4)^2} = |7 - t|$, de donde se tiene para t dos valores: 5 y -3.
 Las ecuaciones de las circunferencias son: $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 4 \wedge (x + 2)^2 + (y - 10)^2 = 100$.
 La cuerda común es el eje radical de las circunferencias: $x - y - 1 = 0$, y la longitud de la cuerda común es: $2\sqrt{2} \text{ u}$. (Será necesario intersectar el eje radical con una de las circunferencias para determinar los extremos de la cuerda común).
137. Los baricentros de los triángulos ABC, BCD, CDA y DAB son respectivamente: $G_1(10; 26)$, $G_2(18; 22)$, $G_3(25; 29)$ y $G_4(10; 34)$.
 Demostraremos ahora que el cuadrilátero $G_1G_2G_3G_4$ es semejante al original, comprobando que sus lados son paralelos: $m_{AB} = m_{G_2G_3} = 1$,
 $m_{BC} = m_{G_3G_4} = -\frac{1}{3}$, $m_{AD} = m_{G_1G_2} = \frac{1}{2}$, y los lados CD y G_1G_4 son verticales: en consecuencia, los ángulos formados por paralelas son iguales. Por otro lado, se comprueba que: $d_{AB} = 3d_{G_2G_3} = 21\sqrt{2} \text{ u}$,
 $d_{BC} = 3d_{G_3G_4} = 15\sqrt{3} \text{ u}$, $d_{CD} = 3d_{G_1G_4} = 24 \text{ u}$.
 y $d_{AD} = 3d_{G_1G_2} = 12\sqrt{2} \text{ u}$.

138. Como la circunferencia es: $x^2 + y^2 = A^2 + B^2$, y la distancia del centro (0; 0) a la familia de rectas: $Ax + By + k = 0$ es igual al radio, se obtienen las dos rectas buscadas: $Ax + By \pm (A^2 + B^2) = 0$.
139. Intersectamos las circunferencias dadas haciendo uso del eje radical de ellas: $x - y - 1 = 0$, encontramos D(2; 1) y B(-2; -3).
Determinamos luego los puntos A y C, observando que al ser diámetros AD y CD, y se conocen los centros (3; -4) y (-2; -1), se encuentra: A(-6; 1) y C(4; -9).
Luego se comprueba lo solicitado, A, B y C son colineales por estar sobre la recta: $x + y + 5 = 0$.
140. Como el centro de la circunferencia debe ser Q(t; -3t), la ecuación buscada es de la forma: $(x - t)^2 + (y + 3t)^2 = 25$.
Si consideramos que las tangentes y los radios forman el cuadrado QT₁AT₂, de lado igual a 5 u., la diagonal de dicho cuadrado es $5\sqrt{2}$ u., y se cumple: $d_{QA} = 5\sqrt{2}$ u., de donde se obtienen para t dos valores: 1 y $\frac{9}{5}$, en consecuencia las ecuaciones de las circunferencias son:
 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0 \wedge 5x^2 + 5y^2 - 18x + 36y - 42 = 0$.
141. Si P(4; -5) es el punto dado y Q(t + 6; t + 1) es el centro de la circunferencia, se debe cumplir: $d_{PQ} = |t + 6|$, de donde se obtiene: $t = -2$. Finalmente, la ecuación de la circunferencia buscada es:
 $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$.
142. Luego de graficar se puede escribir:
Q₁(3; -2) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$
Q₂(1; -2) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$
Q₃(1; -4) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 1$
Q₄(3; -4) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 1$
Hay dos circunferencias tangentes a las cuatro primeras, ellas son concéntricas: Q(2; -3), y sus radios se determinan geométricamente y son: $\sqrt{2} \pm 1$. Las ecuaciones generales de estas circunferencias son:
 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 \pm 2\sqrt{2} = 0$, correspondiendo la de signo + a la circunferencia que es interior a las cuatro iniciales. (Se llaman circunferencias normales a las ecuaciones generales en las que los coeficientes de los términos cuadráticos son iguales a la unidad).

143. Como $Q_1(0; 6)$, $r_1 = 2$; $Q_2(3; 0)$, $r_2 = 1$; $Q_3(0; -5)$, $r_3 = 1$; $Q_4(0; 0)$, $r_4 = 4$.
 Al cumplirse: $d_{Q_1Q_4} = r_1 + r_4$, entonces C_1 y C_4 son tangentes exteriores.
 $d_{Q_3Q_4} = r_3 + r_4$, entonces C_3 y C_4 son tangentes exteriores.
 $d_{Q_2Q_4} = r_4 - r_2$, entonces C_2 y C_4 son tangentes interiores.
144. Completando cuadrados:
 ** $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = k^2$: familia de circunferencias concéntricas, con centro en $Q(5; -2)$ y de radio variable k .
 ** $x \cos 48^\circ + y \sin 48^\circ - k = 0$: familia de rectas paralelas de pendiente: $m = -\cotg 48^\circ = \tg 138^\circ$, donde k es la distancia variable del origen a la recta.
 ** Familia de rectas que pasan por el punto $(0; 7)$, que excluye a la recta $x = 0$. K es la pendiente.
 ** La ecuación paramétrica dada es una familia de rectas paralelas de pendiente 1,5. La ordenada en el origen es variable e igual a $3,5k$.
145. Como la circunferencia dada pasa por el origen de coordenadas, el centro de la simétrica será $Q'(2; -3)$: punto simétrico del centro de la circunferencia dada con respecto al origen. La ecuación de la circunferencia buscada es:
 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$.
 Las circunferencias son tangentes exteriores.
 Teoría: El eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos equipotentes de dos circunferencias. El eje radical de ambas circunferencias es: $2x - 3y = 0$.
146. La circunferencia que se busca es: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = r^2$.
 La distancia del centro de la circunferencia a la recta que contiene a la cuerda es el radio $\sqrt{29}$, y por Pitágoras el radio al cuadrado es 38, y la circunferencia buscada es: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 38$.
147. Si H es el punto medio de la cuerda que la circunferencia intercepta en la recta $x = 4$, se tiene que $d_{HQ} = 3$, donde Q es el centro de la circunferencia buscada. En consecuencia Q se encuentra sobre la recta $x = 7$, y sus coordenadas son $Q(7; k)$. Como se cumple: $|7 - k| = 2$, se obtiene dos valores de k y son dos circunferencias:
 $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 49 = 0 \wedge x^2 + y^2 - 14x - 18y + 105 = 0$
148. Si $P(x; y)$ es el punto del lugar geométrico, se debe cumplir:
 $(y - a)^2 + (x + a)^2 + (y + a)^2 + (x - a)^2 = 6a^2$, de donde se obtiene:
 $x^2 + y^2 = a^2$, es decir una circunferencia canónica de radio a .

149. El segundo móvil debe partir de un punto de la circunferencia:
 $(x - 50)^2 + y^2 = 25^2$.
 Del enunciado se desprende que el segundo móvil debe recorrer 25 m. y llegar en movimiento rectilíneo al punto (50; 0). En consecuencia, deberá partir desde un punto de una circunferencia de radio 25 m. con centro en (50; 0).
150. a) El L.G. que describe el ortocentro es el punto O(0; 0). (Porque el triángulo es siempre rectángulo).
 b) El L.G. que describe el baricentro es la circunferencia: $x^2 + y^2 = 36$. (Porque el baricentro está siempre a los dos tercios de O sobre la mediana).
 c) El L.G. que describe el circuncentro es la circunferencia: $x^2 + y^2 = 81$. (Porque el circuncentro M está siempre en el punto medio de AB, y el radio es 9u.).
151. Como las circunferencias son de igual radio, la cuerda común CD determina los ángulos iguales: CBD y CAD. En consecuencia, el triángulo BDA es isósceles, y al equidistar D de los extremos A y B, D está siempre sobre la mediatriz de AB. Por lo que el lugar geométrico es: $x = 4$.
152. El lugar geométrico es:
 $x^2 + y^2 + 8x - 48 = 0, y \neq 0$
 $(x + 4)^2 + y^2 = 8^2, y \neq 0$
 (se obtiene a partir de: $\text{tg APB} = \text{tg BPC}$, donde P(x; y) es un punto genérico de LG).
 Se trata de dos semicircunferencias con centro en (-4, 0) y radio igual a 8 u. No están incluidos los puntos (4; 0) y (-12; 0).
153. Si C(x; y) es un punto del lugar geométrico, el punto medio M de AC dista de B 5u. De lo dicho, se encuentra la ecuación de la circunferencia:
 $(x + 9)^2 + y^2 = 100$.
154. Se comprueba que las longitudes de los lados del triángulo miden "a", por lo tanto el triángulo es equilátero y equiángulo.
 La comprobación solicitada como segunda parte no presenta problemas, donde el alumno debe utilizar el radio R, cuya relación con los lados del triángulo equilátero es $R = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$, expresión que se determina por geometría elemental.

155. *
- Cuando $k = 2$, con $M(x; y)$, la condición es: $d_{AM} = 2d_{BM}$, y el LG es: $x^2 + y^2 - 8x + 16y + 60 = 0$. Es una circunferencia con centro en $Q(4; -8)$ y radio $2\sqrt{5}u$.
- * Cuando $k = 1$, el lugar geométrico es una recta, y su ecuación es $x = 3$. Desarrollando: $d_{AM} = kd_{BM}$, se obtiene:
 $(k^2 - 1)x^2 + (k^2 - 1)y^2 - (8k^2 - 4)x + 16k^2 - 4 = 0$.
 Será una recta, si $k^2 - 1 = 0$. $k \neq -1$, por ser k el cociente de dos longitudes.

156. Tomando $M(x; y)$, se debe cumplir: $\text{tg}\alpha = \text{tg}\beta$, donde los ángulos son AMB y BMC . Al utilizar pendientes, se obtiene: $x^2 + y^2 + 8x - 48 = 0$. Es una circunferencia.

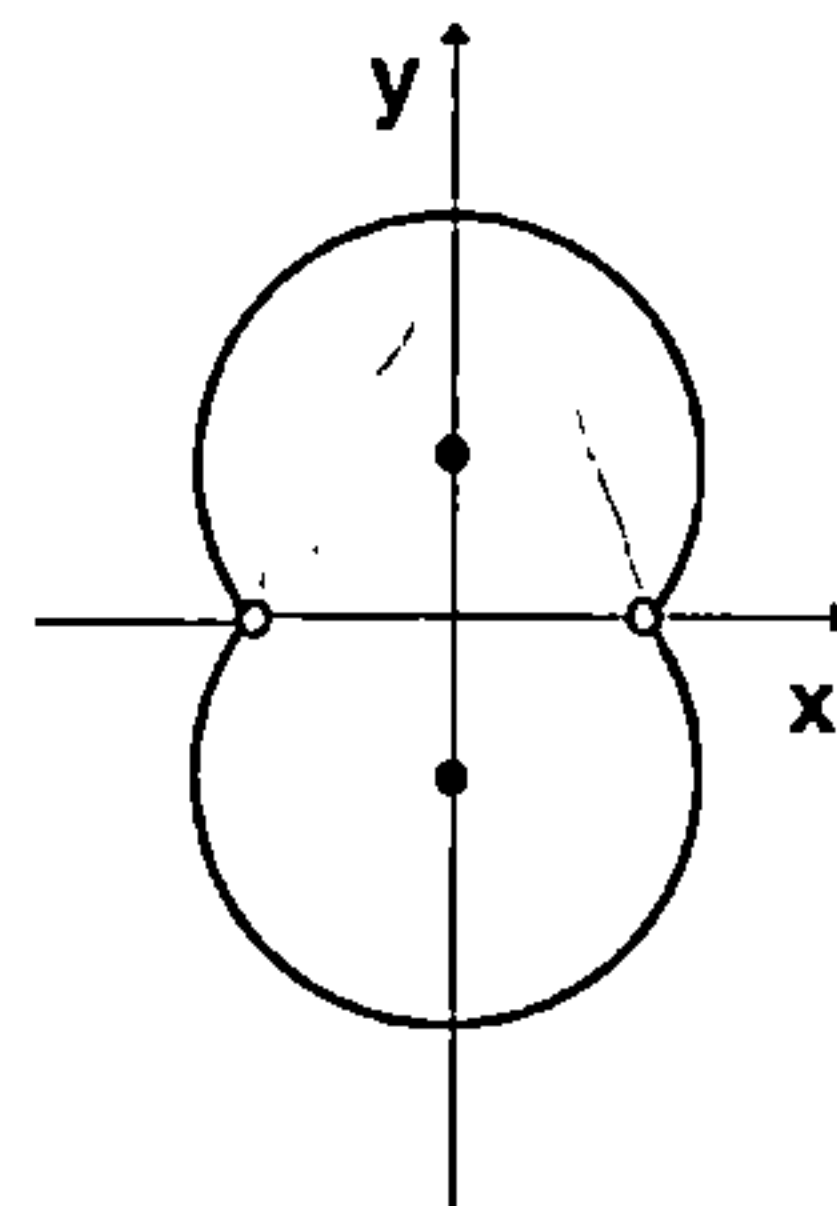
157. Si $P(x; y)$, se determina la ecuación del lugar geométrico, a partir de:

$$\pm 2 = \frac{\frac{y}{x-2} - \frac{y}{x+2}}{1 + \frac{y}{x-2} \cdot \frac{y}{x+2}}, \text{ resultando:}$$

$x^2 + y^2 \pm 2y - 4 = 0$, debiendo tomarse el signo superior si $y > 0$, y el inferior, si $y < 0$. (Esto se debe a que, en este caso, varía la respuesta si el punto P está sobre el eje de abscisas o está debajo de él. El motivo es que la tangente es una fórmula que está en relación a la posición del vértice). En consecuencia, el lugar geométrico es:

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 5, & y > 0 \\ x^2 + (y + 1)^2 = 5, & y < 0 \end{cases}$$

Los puntos $(1; 3)$ y $(1; -3)$ están en el L.G. Pero observe que $(2; 0)$ y $(-2; 0)$ no pertenecen, puesto que con ellos no se forma ángulo alguno cuya tangente sea igual a 2. Observe el gráfico, $(2; 0)$ y $(-2; 0)$ no pertenecen al L.G.



158. Si $P(x; y)$ es el punto del lugar geométrico, se forma un triángulo rectángulo OMP , de catetos r y l . En consecuencia, el punto P dista del origen de coordenadas la longitud del segmento OP , y la ecuación del lugar geométrico es: $x^2 + y^2 = r^2 + l^2$.

PARÁBOLA

159. F F F V V F

160. Al suponer la parábola de eje vertical de la forma $x^2 + Dx + Ey + F = 0$, y reemplazar los puntos dados se encuentra un sistema de ecuaciones, que resuelto da: $x^2 - x - y = 0$. Al intersectar la parábola con la bisectriz del primer cuadrante: $y = x$, se obtienen los extremos de la cuerda, cuya longitud, es: $d = 2\sqrt{2}u$.

161. El foco es $F(5; 1)$, punto medio de LR. El vértice es: $V(3; 2)$, punto medio de FH. La directriz es: $2x - y + 1 = 0$, paralela al LR y pasa por H. Por definición de parábola (distancia de punto Q a foco igual a distancia de punto Q a la directriz), tomando $Q(x; 0)$ como un punto del eje x, se obtiene: para $x = 27 \pm 10\sqrt{6}$.

Observe el alumno que no ha sido necesario obtener la ecuación de la parábola, la cual se obtiene tomando $Q(x; y)$. Como luego para interceptar con el eje x, habría que hacer en ella $y = 0$. El tomar $Q(x; 0)$, facilita el desarrollo algebraico.

162. Al dibujar la parábola, si las proyecciones de los puntos P_1 y P_2 sobre la directriz son H_1 y H_2 , se puede afirmar que: $H_1P_1P_2H_2$ es un trapecio rectángulo.

Por definición de la parábola, al sumar:

$$P_1F = x_1 + p \quad P_2F = x_2 + p, \text{ se obtiene:}$$

$$P_1P_2 = x_1 + x_2 + 2p.$$

Si M es punto medio de P_1P_2 , MH es la base media y es igual a:

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + p.$$

$\therefore$ La circunferencia con centro en M y diámetro P_1P_2 es tangente a la directriz.

163. Si $Q(x; y)$ es el punto del LG buscado, y FT es un radio vector, donde T es un punto de la parábola.

Como Q es punto medio entre el foco F y el punto T, se tiene que el punto T, es $T(2x - p; 2y)$, y este punto satisface la ecuación de la parábola, y al reemplazar: $(2y)^2 = 16(2x - 4)$, y al simplificar se obtiene: $y^2 = 8(x - 2)$.

Los puntos medios de los radios vectores describen otra parábola con vértice en $(2; 0)$ y longitud del "latus rectum" igual a 8 y es homofocal con la parábola original.

164. El punto de la directriz más próximo a la parábola es $(2; -5)$. (Es la intersección del eje focal: $x + 2y + 8 = 0$ con la directriz).
Aplicando la definición de la parábola: distancia de un punto $P(x; y)$ al foco es igual a la distancia del punto P a la directriz, se obtiene:
 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 96x - 8y + 104 = 0$. (La ecuación contiene el término rectangular o productivo xy al ser su eje focal no paralelo a los ejes coordenados).
165. La ecuación del lugar geométrico es: $y^2 = 20x$. La distancia mínima del punto genérico $P(x; y)$ a la recta es igual a su distancia al centro de la circunferencia $(5; 0)$, menos la longitud de su radio $= 3$; en consecuencia: el lugar geométrico se obtiene al desarrollar: $\sqrt{(x - 5)^2 + y^2} - 3 = x - (-2)$.
El lugar geométrico es una parábola, con vértice en el origen de coordenadas, y se abre hacia la derecha. Intersecciones: $(0; 0)$. Simetrías: el eje de abscisas. Asíntotas: no tiene. Extensión: Dominio: $x \in [0; \infty[$ Rango: $\mathbb{R}$.
El gráfico solicitado es simple.
166. Como no se indica escribimos la ecuación canónica de eje vertical que pasa por los puntos $(8; 6)$ y $(-8; 6)$. Su ecuación es: $x^2 = \frac{32}{3}y$, y su foco es el punto $(0; \frac{8}{3})$.
A la altura del foco su ancho es la longitud de su "latus rectum", es decir: $\frac{32}{3}$ u.
167. La longitud del "latus rectum" y la del radio vector descrito es la misma por lo que la comparación por cociente entre ellas es 1.
Si la longitud del radio vector es $4s$, comprobará que $s = p$.
168. Se encuentra la pendiente de la tangente en T (recuerde que la normal y la tangente son perpendiculares), y la ecuación de la tangente en T :
 $3x + y + 22 = 0$, que intersecta al eje focal en $H(-9; 5)$.
El foco es la intersección de la mediatriz del segmento TH
($x - 3y - 16 = 0$) con el eje focal; $F(1; -5)$.
169. La tangente en $T(x_1; y_1)$, por desdoblamiento es: $y = \frac{2}{y_1}x + 2\frac{x_1}{y_1}$ y se cumple:
 $y_1^2 = 4x_1$, de donde los puntos de tangencia son: $(1; 2)$ y $(4; -4)$. Las tangentes son: $y = x + 1 \wedge y = -0,5x - 2$.
Finalmente, el punto de intersección de las tangentes es $P(-2; -1)$.

170. Al efectuar la construcción, resultan perpendiculares los segmentos AB y AP. El LG es una parábola de ecuación: $(y - 2)^2 = 4(x - 5)$. La parábola es de eje horizontal, con vértice en el punto (5; 2) y la longitud de su parámetro es 4 u.
171. La cuerda común, que pasa por los puntos comunes de las curvas, está sobre la recta: $x - y - 6 = 0$ (que se obtiene directamente eliminando los términos cuadráticos). El área del triángulo es $S = \frac{78}{8}u^2$.
172. Foco: F(1; 2); Directriz: $3x + y + 15 = 0$;
Parábola: $x^2 - 6xy + 9y^2 - 110x - 70y - 175 = 0$.
173. Las alturas del arco a intervalos de 1,5 m. son: 1,3125 m., 2,25 m. y 2,8125 m. (Si el vértice es el punto (0; 3), la parábola es $x^2 = -12(y - 3)$).
174. Demostraciones. $T_1(0,5; 2)$ y $T_2(18; 12)$. El punto medio H tiene como ordenada 7, y el diámetro es $y = 7$. $l_{RS}: 8x - 14y + 49 = 0$, y el punto T_3 es $(\frac{49}{8}; 7)$.
175. Si las dos dimensiones del campo son: x y $(60 - x)$, el área será: $y = x(60 - x)$, que es la parábola: $(x - 30)^2 = -(y - 900)$. El gráfico es simple y el área es máxima para $x = 30$, ya que el vértice de la parábola es el punto (30; 900).
176. Si se dibuja un triángulo isósceles de base AB paralela al eje x, tal que A y B sean simétricos con respecto al eje de ordenadas y se tiene $A(x; y)$ y $B(-x; y)$, y se puede afirmar que: $d_{OA} + d_{AB} + d_{OB} = 24$, es decir:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + 2|x| + \sqrt{x^2 + y^2} = 24.$$

De donde, $\sqrt{x^2 + y^2} = 12 - |x|$. Si se trata del punto A, se tiene: $x > 0$, se obtiene: $y^2 = -24(x - 6)$;
con $x < 0$, se obtiene: $y^2 = 24(x - 6)$; si $x = 0$, se tienen dos puntos (0; ± 12).

Queda probado que los puntos se desplazan sobre las parábolas descritas con las restricciones dadas.

177. La distancia del vértice a la directriz es el valor $|p|$. Como la parábola al completar cuadrados es:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = -b \left[y - \left(\frac{a^2 - 4c}{4b}\right)\right],$$

se tiene que $4p = -b$, y el valor de $|p|$ es $\frac{|-b|}{4}$.

Se debe observar que todo el problema está en la factorización de la expresión literal.

178. Como la distancia de un punto de la parábola al foco es igual a la distancia a la directriz, se debe cumplir: $\sqrt{(x+5)^2 + (y+1)^2} = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}$, que al desarrollar, es: $x^2 - 2xy + y^2 + 24x + 8y + 48 = 0$. (La ecuación contiene al término rectangular porque su eje focal no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados).

Haciendo un gráfico (con un esbozo basta), se puede afirmar que: El punto más próximo al eje de ordenadas es el punto de contacto de la tangente vertical. Para determinar la ecuación de la tangente vertical, podemos combinar la ecuación de la parábola con la familia de rectas $x = h$, e igualar a cero el discriminante de la ecuación resolvente: los pasos son al combinar se tiene: $h^2 - 2hy + y^2 + 24h + 8y + 48 = 0$, cuyo discriminante igualado a cero, es: $(8 - 2h)^2 - 4(h^2 + 24h + 48) = 0$, de donde $h = -1$ (un solo valor, puesto que se elimina h^2). En consecuencia, el punto de contacto tiene como abscisa -1 .

179. Como la parábola es: $(y - 4)^2 = 8(x - 2)$, su vértice es $V(2; 4)$, y los extremos de su latus rectum son, haciendo el gráfico correspondiente, $L(4; 8)$ y $R(4; 0)$. La ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos V , L y R es: $(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 25$, de radio igual a 5 u., y de área igual a 25π u².

Por otro lado, como la $d_{VL} = \sqrt{5}$, se verifica fácilmente lo solicitado.

180. Como por definición de parábola la distancia del punto P al foco ($d_{PF} = 15$) es igual a la distancia de P a la directriz, se tiene que como la directriz es de la forma: $mx - y + m + 24 = 0 \wedge x + 1 = 0$ (familia de rectas que pasan por D), la distancia de $P(-16; 9)$ a la familia de recta nos debe dar dos valores de m . Ocurre que sólo se obtiene $m = 0$, es decir: $y = 24$ es una tangente. La otra tangente tiene que ser la vertical: $x = -1$.

181. Una propiedad de la parábola indica que los puntos desde donde se pueden trazar pares de tangentes perpendiculares es la directriz. En consecuencia, el punto desde donde se trazan las tangentes es: $P(3; k)$, porque la directriz es: $x = 3$. Por desdoblamiento, haciendo uso del dato $m = -\frac{2}{3}$, se obtienen $k = -2,5$. (Si no se conoce la propiedad, se escriben las dos familias de rectas de pendientes dadas: $-\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$, tomando como punto de paso: $P(h; k)$; luego se combinan con la ecuación de la parábola, y las dos ecuaciones resultantes deberán tener raíces dobles, ya que si una ecuación tiene raíces dobles, su discriminante es cero). Respuesta: $P(3; -2,5)$.
182. La parábola buscada es de la forma: $y^2 + Dx + Ey + F = 0$, que es satisfecha por los tres puntos dados, obteniendo: $(y + 1)^2 = 4(x + 1)$. Como las intersecciones con los ejes coordenados son: $(0; 1)$, $(0; -3)$ y $(-0,75; 0)$, el área del triángulo es $1,5 \text{ u}^2$.
183. Como las líneas son una circunferencia: $(x - 5)^2 + y^2 = 9$, y una recta, si el punto del lugar geométrico es $P(x; y)$, se cumple:
 $\sqrt{(x - 5)^2 + y^2} - 3 = |x + 2|$. Al desarrollar, se obtiene la parábola: $y^2 = 20x$. (La discusión y gráfica son simples).
184. * Combinando la ecuación de la parábola con la familia de rectas, se tiene: $x^2 - 6x + 8(mx + 2) + 41 = 0$, y al simplificar queda:
 $x^2 - (6 - 8m)x + 57 = 0$.
- Al hacer cero el discriminante, se obtiene: $m = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{4}$.
- * Como la parábola es de eje vertical, $(x - 3)^2 = -8(y + 4)$, su "latus rectum" es 8, con foco en $(3; -4)$. Es evidente que la recta buscada es: $y = -4$.
185. Intersectando las rectas PQ y OB, $5x + y - 50 = 0 \cap 5x + 4y - 5k = 0$, se obtiene: $Q(\frac{k + 40}{5}; 10 - k)$.
- En forma similar, $(5x - 4y = 0 \cap 5x + y - 5k = 0)$, se obtiene: $R(0,8k; k)$. El cálculo del área, conociendo los vértices del triángulo PQR, es:
 $S = 0,5|10k - k^2|$.
- Esta expresión se puede escribir como: $(k - 5)^2 = -2(S - 12,5)$. Es decir, es una parábola cuyo vértice es $(5; 12,5)$. En consecuencia, el área máxima es: $S_{\text{máx}} = 12,5 \text{ u}^2$.

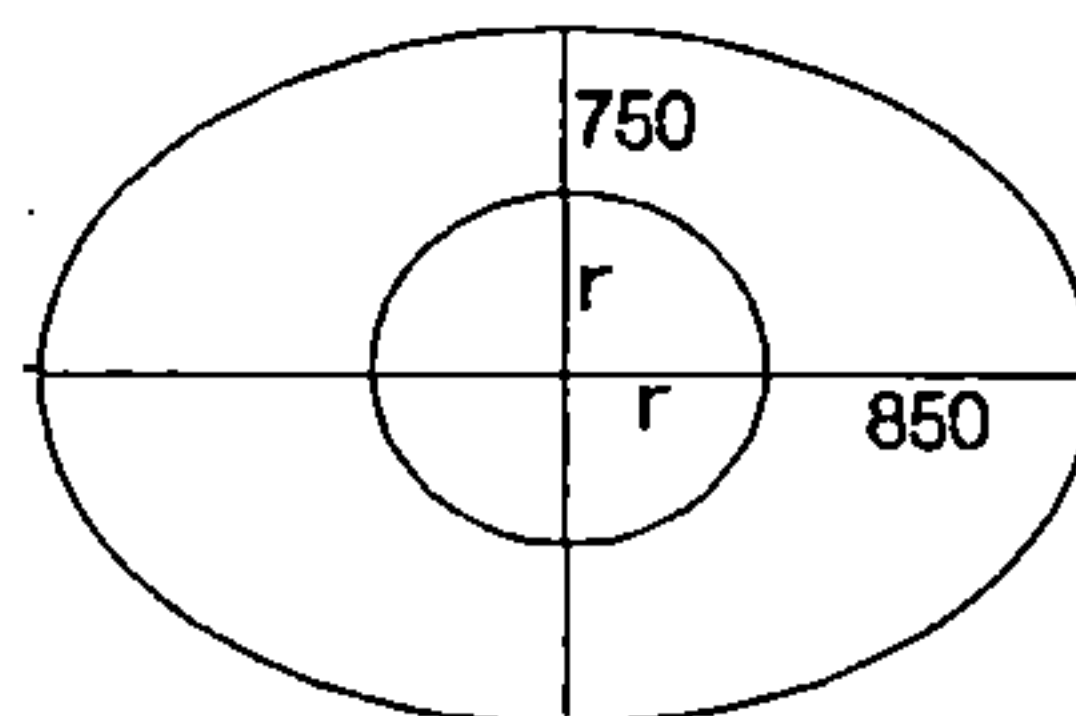
186. Teoría: El diámetro de una parábola es el lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas. Es una recta paralela o coincidente con el eje focal. La tangente en el punto donde el diámetro corta la parábola es paralela al sistema de cuerdas.
Por lo indicado en la teoría: $m_{AB} = m_{tg}$, y como el diámetro es $y = 6$, la intersección con la parábola, es: $Q(3; 6)$. La ecuación de la tangente en Q , es: $x - y + 3 = 0$, y la ecuación de la cuerda AB , es: $x - y + 2 = 0$.
187. La ecuación de la trayectoria es directa, al conocer el vértice, un punto de paso $(0; 0)$ y que la parábola es de eje vertical: $x^2 - 1200x + 450y = 0$. Al intersectar la ecuación de la parábola con la recta $x - y = 0$, se encuentra el punto de impacto: $A(750; 750)$.
188. Por el principio de desdoblamiento, la tangente en T es: $x - 2y + 11 = 0$, y la normal es: $2x + y - 28 = 0$. Como el foco es $F(3; 2)$ y la directriz es $y = 0$, se obtiene: $D(0; 5,5)$ y $N(13; 2)$. Con los datos obtenidos, se encuentra que $\text{tg TFD} = -4,5$ y el triángulo es isósceles por ser: $d_{FN} = d_{TF} = 10 \text{ u.}$
189. Sobre un gráfico que muestre la parábola y la recta, se desprende que al trazar una tangente a la parábola paralela a la recta, se obtiene como punto de contacto: $(7; 10)$. Es evidente que este punto es el más próximo a la recta dada. Por lo tanto, el instante buscado ocurre cuando la abscisa del móvil sea 7 u.
190. La parábola es de eje horizontal, y el diámetro será también horizontal. Tomando una familia de rectas de pendiente igual a 2: $y = 2x + b$, al combinar con la ecuación de la parábola, se encuentra: $y^2 - 4y - 4b = 0$. En consecuencia, si los puntos de intersección son: $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$, la suma de las raíces de la ecuación es: $y_1 + y_2 = 4$, y el punto medio de P_1P_2 , tiene ordenada igual a 2. Por lo tanto, la ecuación del diámetro es: $y = 2$.
191. Si $P(x; y)$, d_{Op} menos el radio de la circunferencia dada ($r = 4$) es igual al radio de la circunferencia móvil ($R = 8 - x$), es decir: $\sqrt{x^2 + y^2} - 4 = 8 - x$, de donde se obtiene la ecuación de la parábola: $y^2 + 24x - 144 = 0$, cuyo dominio son los números reales menores que 6: $]-\infty; 6]$
192. La ecuación de la cuerda común se encuentra eliminando los términos cuadráticos de las ecuaciones dadas: $x - y + 6 = 0$. Al intersectar las cónicas, se encuentran los puntos comunes: $A(6; 12)$ y $B(-4; 2)$, luego $d_{AB} = 10\sqrt{2} \text{ u.}$, y el área del triángulo AOB , es 30 u^2 .

193. Factorizando:
- $(x - k)^2 + (y - k)^2 = k^2$. Esta ecuación, con $k > 0$, es una circunferencia con centro en $(k; k)$ tangente a los ejes coordenados, cuyos centros están siempre en la bisectriz del primer cuadrante.
 - $(y + k)^2 = -8kx$. Se trata de una parábola de eje horizontal, con vértice en el eje de ordenadas y que se abre hacia la izquierda. La longitud del "latus rectum" es $8k$.
194. Como $F(2; 0)$, la cuerda focal es: $4x - 3y - 8 = 0$. Al intersectar la cuerda focal con la parábola, se obtiene: $A(0,5; -2)$ y $B(8; 8)$, luego $d_{AB} = 12,5$ u. Por otro lado, la directriz es $x = 2$, y al intersectarse con la parábola se obtiene el punto de contacto $T(4,5; 2)$, y $d_{FT} = 3,125$ u., y se comprueba que $d_{AB} = 4d_{FT}$.
- 195.
- Con el foco y la directriz se procede a esbozar la gráfica.
 - Si $Q(x; y)$ es un punto del lugar geométrico, por la definición de la parábola, se obtiene: $x^2 - 2xy + y^2 - 22x - 10y + 153 = 0$.
 - Al intersectar con la ecuación $y = x$, se obtiene: $(\frac{153}{32}; \frac{153}{32})$.
196. Haciendo uso de la definición de la parábola, se encuentra:
 $x^2 + 4xy + 4y^2 - 32x - 4y + 76 = 0$. El punto de ordenada máxima es el punto de contacto de la única tangente horizontal que tiene esta parábola. Si combinamos la familia de rectas: $y = k$, con la ecuación de la parábola y hacemos cero su discriminante, encontramos el punto de contacto solución del problema: $(10; 3)$.
197. En primer lugar observamos que las dos cónicas son simétricas con respecto al eje de ordenadas. Si consideramos que la tangente común es:
 $y = mx + b$, combinamos con cada cónica e igualamos a cero los respectivos discriminantes de las ecuaciones resolventes. De esta manera obtenemos las ecuaciones: $4m^2 - b^2 + 4 = 0 \wedge 4m^2 + 3b = 0$.
 De donde las tangentes son: $y = \pm\sqrt{3}x - 4$, y el ángulo entre ellas es 60° .
- 198.
- Circunferencia: $(x - 2)^2 + (x - 2)^2 = 8$
 - Parábolas: a) $x^2 = 4y$; b) $y^2 = 4x$
 - Son secantes: $(0; 0)$ y $(4; 4)$

ELIPSE

199. Es falsa, porque en todas las elipses $e > 1$; una elipse punto o evanescente;
 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$; (unilateral con el foco significa del mismo lado que el foco) $\frac{b^2}{a}; \frac{32}{3}$
 u.

200. En el esquema mostrado, se tiene:
 $a = r + 850 = 7250$,
 $b = r + 750 = 7150$,
 y con $a^2 = b^2 + c^2$, se obtiene:
 $c = 1200$
 Entonces, la excentricidad de la órbita
 elíptica es: $e_E = \frac{24}{145}$.



201. Al construir la elipse con los datos dados, por semejanza de triángulos, se
 tiene: $\frac{b}{a} = \frac{b^2}{a^2}$, de donde $b = c$, y utilizando
 $a^2 = b^2 + c^2$, se logra, $a^2 = 2c^2$, finalmente $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
202. Por desdoblamiento la tangente en $(3; 2)$, es: $2x + 3y - 12 = 0$, las otras
 tangentes son: $x = \pm 3\sqrt{2}$. El producto de las bases del trapecio formado es:
 $(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2}) = 8u^2$.
203. El centro de la circunferencia es $(4; -2)$, y su radio es $5u$. En consecuencia,
 los vértices de la elipse son $(9; -2)$ y $(-1; -2)$.
 La ecuación de la elipse es $\frac{(x - 4)^2}{5^2} + \frac{(y + 2)^2}{b^2} = 1$. Como pasa por $(0; 0)$,
 $b = \frac{10}{3}$, y la ecuación general, es $4x^2 + 9y^2 - 32x + 36y = 0$.
204. Los vértices del cuadrado se encuentran resolviendo el sistema formado por
 la elipse con las bisectrices de los cuadrantes ($y = \pm x$): $(\pm 2,4; \pm 2,4)$.
 La tangente a la elipse en el punto $(2,4; 2,4)$, por el principio de
 desdoblamiento es: $\frac{x}{\frac{15}{4}} + \frac{y}{\frac{20}{3}} = 1$. El perímetro del rombo es: $\frac{5\sqrt{337}}{3} u$.

205. Las tangentes son: $y = x \pm 5$. (Si $(\bar{x}; \bar{y})$ es punto de contacto, se escribe la ecuación de la tangente y la condición $m = 1$, permite obtener: $9\bar{x} + 16\bar{y} = 0$. Como el punto satisface la ecuación de la elipse, se tienen dos ecuaciones que permiten hallar dos puntos de contacto, que resuelven el problema). El área buscada es $60 u^2$.
(Las tangentes de pendiente 0 son: $y = \pm 3$). $\frac{a^2}{c} = \frac{b^2}{c}$
206. La elipse tiene por ecuación: $x^2 + 2y^2 - 12x - 20y + 22 = 0$.
(El centro de la elipse es $Q(6; 5)$. Al dibujar la elipse, el triángulo BF_1B' , es rectángulo isósceles, como se cumple: $a^2 = b^2 + c^2$, donde $a = 14 - 6 = 8$, y por la simetría: $b = c$, $\therefore b^2 = 32$).
207. * La ecuación de la elipse es: $\frac{(x - 2)^2}{12} + \frac{(y + 3)^2}{16} = 1$. (De los datos se encuentra $c = 2$ y $a^2 = 8c$).
* La longitud de los diámetros que pasan por los extremos de los "latus rectum" miden $2\sqrt{13} u$. (Recuerde que todos los diámetros pasan por el centro de la elipse).
208. Al dibujar, se desprende que la cuerda común es el "latus rectum" de la elipse: ($a^2 = 4$, $b^2 = 2$ y $c^2 = 2$) de longitud: $2u$.
 $\therefore L(2\sqrt{3}; 1)$ y $R(2\sqrt{3}; -1)$ ó $L'(-2\sqrt{3}; 1)$ y $R'(-2\sqrt{3}; -1)$.
Son dos parábolas de ecuaciones: $x^2 = 12y \wedge x^2 = -12y$.
209. Demostración (trabaje con la ecuación canónica de la elipse de eje horizontal).
210. Si las tangentes son: $y = mx + b$, éstas cumplen las condiciones de tangencia en ambas cónicas: discriminante = 0.
Ecuaciones de las tangentes comunes: $t_1: y = \frac{2}{3}x - 4$ $t_2: y = -\frac{2}{3}x + 4$.
Los puntos de contacto con la parábola son: $T_1(-6; -8)$ y $T_2(-6; 8)$.
211. Como $d_{F_1Q} + d_{F_2Q} = 2(15)$, tomando $Q(0; y)$, se obtiene: $y = 0 \wedge y = 21$.
La elipse intercepta al eje de ordenadas en los puntos $(0; 0)$ y $(0; 21)$.
212. $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 \wedge \frac{(x - 3)^2}{3} + \frac{(y - 4)^2}{6} = 1$.
La longitud del diámetro de la circunferencia es $2\sqrt{5} u$.
La longitud del diámetro de la elipse, se encuentra sobre la recta que pasa por los centros de ambas cónicas: $y = x + 1$, que se intersecta con la elipse en dos puntos $A(\sqrt{2} + 3; \sqrt{2} + 4)$ y $B(-\sqrt{2} + 3; -\sqrt{2} + 4)$ de donde:
 $d_{AB} = 4 u$.

213. La ecuación general de la elipse es: $3x^2 + 4y^2 - 6x - 16y - 29 = 0$.
Las tangentes en los extremos del diámetro $(-1; 5)$ y $(3; -1)$, son:
 $x - 2y + 11 = 0 \wedge x - 2y - 5 = 0$.
214. Luego de dibujar, se tiene:
- * La tangente es: $y - 9 = 0$, porque la normal es vertical.
 - * El otro foco es: $F(-4; 3)$.
 - * Longitud del eje mayor es: $2a = 15u$.
- Debe tenerse en cuenta: que la normal y la tangente en un punto de contacto son perpendiculares, y que la normal es bisectriz de los radios vectores del punto de contacto.
La longitud del eje mayor es la suma de los radios vectores del punto P.
215. Las distancias menor y mayor dadas son $a - c = 10$ y $a + c = 30$, de donde: $2a = 40$ y $2c = 20$, con lo cual la excentricidad es $e = \frac{1}{2}$, la distancia entre directrices es: 80 cm. y el área del rectángulo es 600 cm^2 .
216. Como LR es el "latus rectum", y O es el centro de la elipse, y F el foco, el triángulo OFL es rectángulo isósceles, y se cumple: $\frac{b^2}{a} = c$.
Por otro lado, como $a^2 = b^2 + c^2$, se tiene que: $a^2 = ac + c^2$, que al dividirse entre a^2 , determina la ecuación: $e^2 + e - 1 = 0$. Esta ecuación, cuya incógnita es la excentricidad, permite obtener dos valores para e; de ellos sólo se considera el positivo: $e = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, valor igual al número áureo.
217. El eje focal de la elipse pasa por los focos: $x - y + 3 = 0$.
El eje normal, es perpendicular al eje focal y pasa por el centro (punto medio entre los focos): $x + y - 1 = 0$.
Las ecuaciones de las directrices son paralelas al eje normal: $x + y + k = 0$, y distan del centro $(-1; 2)$, una distancia igual a $\frac{a^2}{c} u$.
La longitud del eje mayor es: $2a = 10\sqrt{2} u$. (La cuerda mayor de una elipse es el eje mayor).
La distancia entre los focos es $2c = 4\sqrt{2} u$.
Con estos datos, se obtiene, aplicando la distancia del centro a la familia de rectas, dos valores para k. Y las ecuaciones de las directrices son:
 $2x + 2y + 23 = 0 \wedge 2x + 2y - 27 = 0$.

218. Se tiene como datos: $2a = 150 \times 10^6$, y $\frac{c}{a} = 0,017$; de donde:
 $c = 2,55 \times 10^6$. Las distancias mayor y menor son: $(a + c)$ y $(a - c)$, en consecuencia, la diferencia es $2c = 5,1 \times 10^6$ km.
219. Como $P(1; 4)$ es punto de la elipse, se debe cumplir: $\frac{1^2}{b^2} + \frac{4^2}{a^2} = 1$.
 Por otro lado, se cumplen las condiciones: $\frac{2b^2}{a} = \sqrt{2}c$ y $a^2 = b^2 + c^2$.
 De donde se obtiene: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$.
220. Como la ecuación de la elipse, es: $\frac{x^2}{30^2} + \frac{y^2}{80^2} = 1$, cuando $y = -40$, el valor de x es $\frac{30\sqrt{3}}{2}$, y el ancho será el doble, es decir: $30\sqrt{3}$ cm.
221. La distancia de $B(3; 7)$ al eje focal es el semieje menor: $b = 2\sqrt{5}$.
 Como de los datos, y de la figura, se deduce que: $\frac{a^2}{c} = 2c$,
 se tiene que $c = b$.
 Conocidos b y c , se obtiene: $a = 2\sqrt{10}$. A partir de los cálculos efectuados, es fácil determinar: eje normal: $2x + y - 13 = 0$; ecuaciones de las directrices: $2x + y + 7 = 0 \wedge 2x + y - 33 = 0$; $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
222. Si se trazan por los focos dados perpendiculares a la recta dada, las proyecciones de los focos son los puntos $(7,5; 1,5)$ y $(5,5; -0,5)$.
 Como estos puntos deben ser puntos medios entre los focos de la elipse dada y los focos de la elipse simétrica cuya ecuación se busca, se obtienen los nuevos focos: $(12; -3)$ y $(8; -3)$. Con los focos y la excentricidad (ya que la forma de la elipse simétrica no puede cambiar), se obtiene:
- $$\frac{(x - 10)^2}{16} + \frac{(y + 3)^2}{12} = 1$$
223. La respuesta es no es posible, por lo siguiente: consideremos el vértice A_1 , el foco F_1 y el correspondiente "latus rectum" L_1R_1 ; si el ángulo $F_1A_1L_1$ es de 45° , deben ser iguales los segmentos F_1A_1 y F_1L_1 , debiendo cumplirse:
 $\frac{b^2}{a} = a - c$, expresión que da lugar a la igualdad: $a = c$, y la elipse dejaría de ser elipse para ser una circunferencia.

224. Las cuerdas suplementarias concurren en $Q(\frac{36}{5}; \frac{12}{5})$, punto de la elipse. Estas cuerdas cortan al eje de abscisas en los puntos $A_1(12; 0)$ y $A_2(-12; 0)$, extremos del eje mayor. Por lo tanto la elipse es de la forma: $\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, y se encuentra $b^2 = 9$, haciendo uso del punto Q . La excentricidad de la elipse es: $e = \frac{\sqrt{15}}{4}$, y las ecuaciones de las directrices son: $x = \pm \frac{16\sqrt{15}}{5}$.
225. Al combinar la familia con la cónica, se obtiene:
 $5x^2 - 8kx + (4k^2 - 20) = 0$, cuyo discriminante al ser mayor, igual o menor que cero, permite afirmar:
 Si $|k| < 5$, la recta corta a la elipse.
 Si $k = \pm 5$, la recta es tangente a la elipse.
 Si $|k| > 5$, la recta es exterior a la elipse.
226. Se obtiene solución utilizando sólo el primer dato: Con los focos dados se obtiene el valor de $c = \sqrt{2}$ y la pendiente del eje focal: $m = 1$, y la ecuación de la directriz: $x + y - 17 = 0$.
 Como la distancia del centro $(0; -2)$ a la directriz es $\frac{a^2}{c}$, se obtiene
 $a = \sqrt{19}$, y el valor de la excentricidad es inmediato: $e = \frac{\sqrt{38}}{19}$, y es una elipse.
 El segundo dato es el centro de la cónica, dato que está implícito al proporcionar los focos.
227. Por el principio de desdoblamiento, la tangente en T , es:
 $16x + 15y - 200 = 0$, e intercepta a las tangentes en los vértices de la elipse: $x = 10$ y $x = -10$, en los puntos $P(10; \frac{8}{3})$ y $Q(-10; 24)$.
 Como el segmento PQ tiene como punto medio $M(0; \frac{40}{3})$, bastará probar que las longitudes de los segmentos MF_1 y MF_2 son iguales a la mitad de la longitud del segmento PQ . En efecto, estas longitudes son iguales al radio: $\frac{2\sqrt{481}}{3}$ u.
228. Al pasar la circunferencia por los focos, se cumple en la elipse: $b = c$, de donde la excentricidad resulta $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

229. Como los radios vectores de un punto P de la elipse miden 2,6 u. y 7,4 u., entonces: $2a = 2,6 + 7,4 = 10$.
Como F_1PF_2 es un triángulo de base $2c$ y de altura 2,4 u (la mitad de la cuerda perpendicular descrita en el enunciado), es fácil calcular:
 $2c = \sqrt{2,6^2 - 2,4^2} + \sqrt{7,4^2 - 2,4^2} = 8 \text{ u.}$, de donde $e = \frac{4}{5}$.
- Por otro lado, la ecuación del eje focal es: $4x - 3y + 4 = 0$.
Los focos de la elipse se encuentran al intersectar el eje focal con la circunferencia: $(x + 1)^2 + y^2 = 4^2$, y son los puntos $(\frac{7}{5}; \frac{16}{5})$ y $(-\frac{17}{5}; -\frac{16}{5})$.
230. Teoría.
Puede hacerse previamente una traslación de ejes y demostrar lo solicitado en la ecuación canónica.

HIPÉRBOLA

231. a) Es una hipérbola real con centro en $(1; -1)$, semiejes $a = \sqrt{5}$ y $b = 2$ y de eje focal vertical.
 b) Género elipse. Caso degenerado: representa el punto $(0; 0)$.
 c) Género hipérbola. Caso degenerado, representa dos rectas que se cortan en $(2; -1)$, $x - 2y - 4 = 0$; $x + 2y = 0$

El alumno deberá en cada caso factorizar la ecuación dada, llevándola a una de las formas ordinarias, y allí poder determinar de qué caso se trata.

232. La ecuación del lugar geométrico es: $x^2 - 3y^2 - 12y = 0$.
 La distancia entre el punto $P(x; y)$ es igual al doble de la distancia de P a la recta dada. Es una hipérbola de eje vertical, con centro en $(0; 2)$. El semieje real es 2 u., y el imaginario es $2\sqrt{3}$ u. Los otros elementos son simples de determinar: vértices, focos, eje real, eje imaginario, longitud del latus rectum y excentricidad, por lo menos.

233. El centro de la cónica es la intersección de las asíntotas: $Q(5; 3)$. El eje focal pasa por el vértice $A(8; 4)$ dado y por Q : $x - 3y + 4 = 0$. La excentricidad es $\frac{5}{4}$, y es igual a la secante de la mitad del ángulo que forman las bisectrices: $e = \sec \alpha$, donde α es el ángulo que forman una asíntota y el eje focal. Recuerde que: $\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$

234. Si $(x_0; y_0)$ es un punto de la hipérbola, se verifica:

$$b^2(x_0)^2 - a^2(y_0)^2 = a^2b^2.$$

Las distancias de $(x_0; y_0)$ a las asíntotas: $bx + ay = 0 \wedge bx - ay = 0$, son:

$$d_1 = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ y } d_2 = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ cuyo producto, con la condición}$$

expresada líneas arriba, se llega a: $d_1 d_2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$, una cantidad constante independiente del supuesto punto $(x_0; y_0)$.

235. Tomando para la verificación el foco derecho $F_1(5; 0)$, la directriz correspondiente es $D_1: x = \frac{16}{5}$ y una asíntota $L_a: 3x - 4y = 0$. La recta perpendicular a la asíntota y que pasa por el foco es $L_p: 3x + 4y - 20 = 0$. Las tres rectas D_1 , L_a y L_p , concurren en el punto $(\frac{16}{5}; \frac{12}{5})$.

236. Aplicando la propiedad con el punto $P(x; y)$, se obtiene al igualar:
 $13x^2 + 30xy - 27y^2 - 220x + 12y + 352 = 0$.
 El centro de la hipérbola es la intersección de las asíntotas: $Q(5; 3)$.
 Los ejes son las bisectrices de las asíntotas:
 Eje real o focal: $x - 3y + 4 = 0$;
 Eje imaginario: $3x + y - 18 = 0$.
 Los vértices A_1 y A_2 , son la intersección del eje real con la hipérbola. El semieje a es la distancia QA . El semieje b es $a \cdot \operatorname{sen} \alpha$, donde α es el ángulo entre el eje real y una asíntota.
 La semidistancia c es $\sqrt{a^2 + b^2}$. Los focos son puntos simétricos del centro Q sobre el eje real y a una distancia c de Q .
 Las directrices son dos paralelas al eje imaginario, que tienen a este eje como paralela media.
 La distancia entre las paralelas es $\frac{2a^2}{c}$.
237. Las ecuaciones dadas representan:
 $f_1: (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = -49$, el vacío.
 $f_2: (y - 3)^2 = 0$, una recta horizontal.
 $f_3: 3(x - 3)^2 - (y + 2)^2 = 0$, Elipse – punto o evanescente.
 $f_4: (x - 2)^2 - (y + 3)^2 = 0$; $(x + y + 1)(x - y - 5) = 0$, dos rectas secantes.
238. La tangente en $T(-5; 4)$ es: $20x + 9y + 64 = 0$ (por desdoblamiento).
 Las asíntotas son: $4x \pm 3y = 0$, e intersectan a la tangente en $(-2; -\frac{8}{3})$ y $(-8; \frac{32}{3})$, cuyo punto medio es T .
 Los focos son $(\pm \frac{20}{3}; 0)$ y el producto de las distancias de los focos a la tangente es $b^2 = \frac{256}{9}$.
239. Existen dos puntos solución por la simetría de la hipérbola.
 La distancia de P al foco izquierdo es $16u$. ($2r - r = 8u$, por definición de hipérbola).

240. Como la elipse es: $\frac{(x-1)^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$, la hipérbola será: $\frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

De la relación de excentricidades: $\frac{e_H}{e_E} = 3\sqrt{2}$, se obtiene, $a = 1$ y $c = 3$.

Finalmente, la hipérbola es: $\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$, y las asíntotas son:

$$\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 0, \text{ es decir: } y = \pm 2\sqrt{2}(x-1)$$

241. El punto más próximo debe ser uno de los puntos de contacto de las tangentes paralelas a la recta dada. Las tangentes son: $3x + 2y + 12 = 0$, con punto de contacto $T_1(-6; 3)$, y $3x + 2y - 12 = 0$, con punto de contacto $T_2(6; -3)$.

Como con las distancias de los puntos de contacto a la recta dada ocurre: $d_1 < d_2$, el punto más próximo es $(6; -3)$. Los puntos más próximos al origen de coordenadas son los vértices de la hipérbola.

242. $e_E = \frac{\sqrt{13}}{2}$ (Al completar cuadrados, $a^2 = 4$, $b^2 = 9$, $c^2 = 13$).

Asíntotas: $2x - 3y + 14 = 0 \wedge 2x + 3y + 2 = 0$. (Resultan al igualar a cero la unidad en la forma ordinaria de la ecuación).

Distancia entre las directrices: $d = \frac{8\sqrt{13}}{13}$. (La distancia es: $\frac{2a^2}{c}$).

243. (Si $Q(x; y)$ es el centro de la circunferencia buscada, su radio es $|y|$, y se forma un triángulo rectángulo de catetos x y 1 , y de hipotenusa igual al radio). La ecuación del lugar geométrico es: $y^2 - x^2 = 1$. Es una hipérbola equilátera con centro en el origen de coordenadas y eje real o focal vertical. Los semiejes son: $a = b = 1$

244. Las cónicas son elipse e hipérbola. Bastará probar que tienen los mismos focos $(\pm 4; 0)$ (homofocales), y que las tangentes en los cuatro puntos comunes son perpendiculares (ortogonales). Sólo es necesario realizar la comprobación en uno de los puntos comunes, porque son curvas simétricas.

245. Como el foco izquierdo es $(-5; 0)$, los puntos de la hipérbola que distan 7u. de él se encuentran sobre la circunferencia: $(x + 5)^2 + (y - 0)^2 = 7^2$. Los puntos buscados están en la intersección de la hipérbola y la circunferencia: $(-6; \pm 4\sqrt{3})$.
- El ángulo entre las asíntotas es 2α , donde $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, en consecuencia:
- $$2\alpha = 2\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4}{3} \text{ (que se puede escribir: } 2\alpha = 2\operatorname{tg}^{-1} \frac{4}{3}, \text{ y que es}$$
- trigonométricamente equivalente a } $2\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-\frac{24}{7})$.
246. Como la distancia interceptada por las asíntotas sobre una de la directrices es de longitud igual a la distancia entre directrices, se concluye que las asíntotas son perpendiculares, y la hipérbola buscada es equilátera ($a = b$) de la forma:
- $$\frac{(x - 2)^2}{5^2} - \frac{(y - 3)^2}{5^2} = 1, \text{ puesto que } 2a = 10. \text{ La forma general es:}$$
- $$x^2 - y^2 - 4x + 6y - 30 = 0.$$
247. Como el centro de la circunferencia dada es $Q(-4; 0)$ y su radio es 4 u., si $P(x; y)$ es el punto del lugar geométrico, se cumple: $d_{QP} - d_{AP} = 4$. En consecuencia, el punto P describe una rama de una hipérbola con focos en los puntos Q y A.
- Al preguntar qué lugar geométrico describe el punto P, no es necesario dar la ecuación, salvo que el alumno no se dé cuenta de la definición de esta cónica y tenga que hallar la ecuación del LG para poder dar la respuesta. En todo caso, la ecuación es: $3x^2 - y^2 = 12$.
248. Como la hipérbola dada tiene por focos los puntos $(0; \pm 5)$ y su excentricidad es $\frac{5}{3}$.
- La excentricidad de la elipse es $\frac{3}{5}$, es decir: $a = 5k$, $b = 3k$ y sabe que $b = 5$ u. y con $a^2 = b^2 + c^2$, se encuentra $a = \frac{25}{4}$.
- La ecuación de la cónica es: $16x^2 + 25y^2 = 625$.
249. Si la hipérbola es $x^2 - y^2 = 4$, uno de sus focos es $F(4\sqrt{2}; 0)$ y el triángulo OPF es rectángulo isósceles de hipotenusa $4\sqrt{2}$ u. Luego, el área del triángulo es 8 u².

250. Los elementos que pueden calcularse, entre otros son: el centro, intersección de las asíntotas: $(4; 3)$; el eje focal o real, bisectriz del ángulo que forman las asíntotas: $x - 7y + 17 = 0$; eje imaginario, perpendicular al eje real o focal: $7x + y - 31 = 0$; la excentricidad: si α es la mitad del ángulo que forman las asíntotas, se cumple: $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$, que se determina al conocer las pendientes del eje focal y de una de las asíntotas. Como $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$, por las proporciones de la aritmética se tiene: $\frac{b^2 + a^2}{a^2} = \frac{1 + 9}{9}$, de donde:
- $$e = \frac{\sqrt{10}}{3}. \text{ (Tenga presente que la excentricidad es también la secante del ángulo que forman una asíntotas con el eje focal: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, \text{ de donde } \sec \alpha = \frac{\sqrt{10}}{3}).$$
251. De las ecuaciones: $\frac{1^2}{a^2} - \frac{2^2}{b^2} = 1$, $\frac{2a^2}{c} = \frac{\sqrt{30}}{15}$ y $c^2 = a^2 + b^2$, se obtienen dos hipérbolas solución, y sus asíntotas son inmediatas:
- $$5x^2 - y^2 = 1 \quad y = \pm \sqrt{5}x$$
- $$24x^2 - y^2 = 20 \quad y = \pm 2\sqrt{6}x$$
252. $OP^2 = r_1 r_2$, donde P es un punto de la hipérbola equilátera. Si F_1 y F_2 son los focos, en el triángulo $F_1 P F_2$, OP es una mediana. Por el teorema de la mediana se tiene: $r_1^2 + r_2^2 = 2 OP^2 + 0,5 (2c)^2$.
- Por otro lado, por la definición de la hipérbola $|r_2 - r_1| = 2a$ y $c = \sqrt{2}a$. Eliminando a y c, se obtiene $OP^2 = r_1 r_2$, que se pide demostrar.
253. Como la pendiente de $NF_2 = \frac{a}{c}$, la recta es: $cx + ay - a^2 = 0$, que intersecta el eje focal en $P(a^2; 0)$.
- Como la directriz es: $x = \frac{a^2}{c}$, P está en la directriz.
- Para demostrar que la recta es tangente a la hipérbola, debe ocurrir que el sistema que forman ambas ecuaciones tiene solución única, y este punto es: $T(c; -\frac{b^2}{a})$.
- El punto T es uno de los extremos del "latus rectum" correspondiente al foco F_1 .

254. Como el triángulo AOB es siempre rectángulo, su ortocentro es siempre el origen de coordenadas, es decir el lugar geométrico es un punto: (0; 0).
Si $P(x; y)$ es el baricentro, se cumple: $x = \frac{a}{3}$ e $y = \frac{b}{3}$. Como por otro lado, $|ab| = 72$, se cumple: $|xy| = 8$.
El lugar geométrico del baricentro del triángulo móvil es un punto de las hipérbolas equiláteras: $xy = \pm 8$.
255. La parábola es: $(y - 3)^2 = 16(x - 2)$, su foco es: $F(6; 3)$ y su directriz: $x = -2$. En consecuencia la hipérbola, es: $x^2 - y^2 + 4x + 6y - 37 = 0$.
(Tenga en cuenta que $e = \sqrt{2}$, y que $c = 8$).
256. Por el principio de desdoblamiento, la tangente en T es: $5x - 4y - 39 = 0$. Al completar cuadrados, los focos son los puntos $(-7; 2)$ y $(13; 2)$, y el semieje real $a = 8$. Por los focos trazamos perpendiculares a la tangente, obteniendo las rectas de ecuaciones: $4x + 5y - 62 = 0 \wedge 4x + 5y + 18 = 0$. Al intersectar con la tangente en T, se obtienen los puntos $P_1(\frac{443}{41}; \frac{154}{41})$ y $P_2(3; -6)$, y ellos distan del centro de la hipérbola $(3; 2)$, 8 unidades. Los puntos están sobre a circunferencia de ecuación $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 64$.
257. Demostración: Las asíntotas de la hipérbola dada son: $bx \pm ay = 0$, que al intersectar con la recta $x = r$, se obtienen los puntos: $M(r; \frac{br}{a})$ y $N(r; -\frac{br}{a})$.
Al calcular: $d_{PM}d_{PN}$ se encuentra: $|\frac{br}{a} - s| |\frac{br}{a} + s| = |\frac{b^2r^2 - a^2s^2}{a^2}|$, donde el numerador es a^2b^2 , al ser $(r; s)$ punto de la hipérbola. Por otro lado, es innecesario el valor absoluto, por ser a y b siempre positivos, y la constante es b^2 .
258. Al completar cuadrados, se obtiene para la hipérbola: Centro $(5; 2)$, $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$. La hipérbola es de eje horizontal. En consecuencia, el centro de la elipse es $(5; 2)$, su eje menor es horizontal, con extremos en $(1; 2)$ y $(9; 2)$, de donde: $b = 4$.
Como $a = 2c$, y $a^2 = b^2 + c^2$, se obtiene: $a^2 = \frac{64}{3}$.
La ecuación de la elipse es: $\frac{(x - 5)^2}{16} + \frac{(y - 2)^2}{\frac{64}{3}} = 1$.

259. Tomando la hipérbola canónica: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, al interceptarla con la recta horizontal $y = k$, se encuentran los puntos de intersección Q y R, cuyas ordenadas son $\frac{ak}{b}$ y $-\frac{ak}{b}$, respectivamente. En consecuencia, si $P(h; k)$ es el punto de intersección de la recta horizontal con la hipérbola, se demuestra que $d_{PQ}d_{PR} = a^2$.
260. Por el principio de desdoblamiento, la cuerda de los contactos es: $9x - 10y = 6$, que al resolver con la ecuación de la hipérbola se obtienen los puntos de contacto: $P_1(4; 3)$ y $P_2(14; 12)$, ubicados en una misma rama. Finalmente, las ecuaciones de las tangentes son: $x - y - 1 = 0 \wedge 7x - 8y - 2 = 0$.
261. Como el centro de la hipérbola es el punto $Q(3; 5)$, la ecuación de la asíntota que pasa por $(2; 9)$ pasa también por Q y se obtiene: $4x + y - 17 = 0$. Si el ángulo entre el eje focal y la asíntota conocida es θ , se encuentra que $\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{5}$, y como el eje focal es bisectriz entre las asíntotas, se encuentra que la pendiente de la otra asíntota es $-\frac{1}{4}$, y su ecuación: $x + 4y - 23 = 0$.
Para calcular la excentricidad, tendremos en cuenta que $e = \sec \theta = \frac{\sqrt{34}}{5}$.
262. Como las asíntotas de la hipérbola son las diagonales de un cuadrado, ellas son perpendiculares y la hipérbola es equilátera. Uno de los ejes de la hipérbola (el real o el conjugado) es la perpendicular a la ecuación del lado dado y pasa por el centro de la hipérbola: $3x + 2y = 0$. A continuación es posible determinar las pendientes de las asíntotas: 5 y $-\frac{1}{5}$, y sus ecuaciones son: $5x - y = 0 \wedge x + 5y = 0$. Finalmente, como una propiedad de la hipérbola señala que el producto de las distancias de un punto a las asíntotas es constante: si el punto es $P(x; y)$, se obtiene: $\frac{5x - y}{\sqrt{26}} \cdot \frac{x + 5y}{\sqrt{26}} = \text{constante}$, de donde: $5x^2 - 24xy - 5y^2 = k$. No es posible determinar el valor de "k" al no tener más datos, como sería por ejemplo un punto de la hipérbola.

263. Las hipérbolas son:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad e_1 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad e_2 = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{b}$$

de estas expresiones se deducen fácilmente las comprobaciones solicitadas.

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

264. Al eliminar el término rectangular mediante una rotación: como $\theta = 45^\circ$, porque $A = C$, se obtiene: $\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{36} = 1$.
(Se deja al alumno la gráfica, la cual debe mostrar los dos ejes coordenados XOY y X'OY').
265. Como el indicador $I = B^2 - 4AC = 0$, la cónica es del tipo o género parábola: parábola real o dos rectas paralelas.
Como $\operatorname{tg} \theta = \frac{24}{7}$, las ecuaciones de rotación son:
 $x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'$ e $y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'$.
Al reemplazar y efectuar: $y' = \pm 2,4$ (dos rectas paralelas).
El alumno debe observar que la ecuación es factorizable:
 $(3x - 4y - 12)(3x - 4y + 12) = 0$, y son dos rectas paralelas.
266. Como el indicador es $I > 0$ ($B^2 - 4AC = 9$), la ecuación es una hipérbola o un par de rectas que se cortan.
Como $\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{3}{4}$, $\Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 3$, usando las fórmulas de rotación, se obtiene:
 $(x')^2 - 9(y')^2 + 36 = 0$.
Por lo tanto es una hipérbola real.
El ángulo que forma el eje con una de sus directrices es δ .
 $\delta = 90^\circ + \alpha = 90^\circ + \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3$. Pero el enunciado pide señalar, no calcular, en consecuencia, bastaría con hacer un gráfico y dibujar el ángulo.
267. El indicador es -10000 ; por lo tanto es del género elipse.
Las ecuaciones de rotación son: $x = \frac{4x'}{5} - \frac{3y'}{5}$ e $y = \frac{3x'}{5} + \frac{4y'}{5}$.
Al reemplazar y simplificar, se obtiene:
 $\frac{(x' - 5)^2}{16} + \frac{(y' - 5)^2}{4} = 1$. La gráfica queda como tarea.
268. El indicador es $I = -15$, y la cónica es del género elipse. La ecuación transformada es: $\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{60} = 1$. Los extremos del eje menor, en el sistema original, son: $(\pm 3\sqrt{2}; \pm 3\sqrt{2})$.

269. Al aplicar las fórmulas de rotación, la ecuación de la directriz es: $x' = 1$; y el foco $F(5; 15)$, en el sistema $X'OY'$ (es decir: $x' = 5$ e $y' = 15$).
Ecuación de la parábola: $(y')^2 - 4x' - 30y' + 213 = 0$. (Al aplicar la definición).
270. Como el indicador es cero, es de género parábola. Como es factorizable (siempre se debe hacer el intento): $(3x - 4y + 5)(3x - 4y - 5) = 0$, se trata de dos rectas paralelas (caso degenerado de la parábola), cuyo gráfica es inmediata.
271. Al trasladar se tiene con: $13 = x' + 7$; $11 = y' + 3$: $P(6; 8)$.
Al rotar: $6 = 0,6x'' - 0,8y''$; $8 = 0,8x'' + 0,6y''$: $P(10; 0)$, que es la respuesta.
272. Como resulta $I = B^2 - 4AC > 0$, es del género hipérbola.
Con las ecuaciones de rotación: $x = 0,2(3x' - 4y')$ $\wedge$ $y = 0,2(4x' + 3y')$, se obtiene: $3(y')^2 - 2(x')^2 = 6$.
La gráfica es inmediata, y se obtienen luego las ecuaciones de los ejes: focal: $4x + 3y = 0$ y normal: $3x - 4y = 0$.
273. Las relaciones: P, Q y R, al completar cuadrados, son:
P: $16(x - 5)^2 + 25(y + 1)^2 = -1175$ $\emptyset$
Q: $16(x - 5)^2 + 25(y + 1)^2 = 1250$ Elipse
Centro: $(5; -1)$, $a = \frac{25\sqrt{2}}{4}$, $b = 5\sqrt{2}$, etc.
R: $16(x - 5)^2 + 25(y + 1)^2 = 850$ Elipse
Centro: $(5; -1)$, $a = \frac{5\sqrt{34}}{4}$, $b = \sqrt{34}$, etc.
274. Teoría. Al efectuar una rotación de ejes, se elimina el término rectangular, obteniendo: $(3x')^2 + 8(y')^2 + 6\sqrt{5}x' - 9 = 0$: se trata de una elipse real con centro en $(-\sqrt{5}; 0)$, cuya excentricidad es $\frac{\sqrt{10}}{4}$.
275. La ecuación es una parábola si tiene un término cuadrático en una variable y lineal en la otra, y ello ocurre cuando $k = 0$: $x^2 = 0,5y$. Con $k = 4$, resulta una ecuación que no tiene representación real.
La ecuación será hipérbola, si los coeficiente de los términos cuadráticos son de signo diferente: $(k - 4)k < 0$, de donde: $0 < k < 4$. Para que la hipérbola sea degenerada y represente dos rectas que se cortan, debe ser cero el segundo miembro.

Al completar cuadrados se tiene $(k - 4)x^2 + k(y + \frac{1}{k})^2 = \frac{1 - k^2}{k}$, es decir, debe ser cero el segundo miembro, de donde: $k = \pm 1$. Pero la condición de ser hipérbola elimina la solución negativa, por lo tanto, $k = 1$, y la hipérbola degenera en dos rectas: $y = \pm\sqrt{3}x - 1$.

276. Como $A = C$, el ángulo de rotación es 45° , de donde resulta la hipérbola equilátera:

$$(x' + \sqrt{2})^2 - (y' + \sqrt{2})^2 = 1$$

Finalmente con relación al sistema $X'OY'$, se tienen los focos $(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ y $(0; -\sqrt{2})$, puntos que en el sistema original, son: $F_1(-1; -3)$ y $F_2(1; -1)$.

Las directrices tienen pendiente -1 , se encuentran a una distancia igual a $\frac{a^2}{c}$ del origen, y como $a = b = 1$ y $c = \sqrt{2}$, las directrices son:

$$x + y + 1 = 0 \quad \wedge \quad x + y + 3 = 0.$$

277. Al reemplazar las ecuaciones de rotación, se obtiene:

$$(\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)x' - (\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta)y' - 4 = 0.$$

Si $\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta = 0$, $\theta = 30^\circ$ y la ecuación es: $y' + 2 = 0$

Si $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 0$, $\theta = 120^\circ$ y la ecuación es: $x' + 2 = 0$.

278. Por el indicador es de género hipérbola. El ángulo de rotación necesario para eliminar el término cuadrático es 30° , y resulta la hipérbola: $3x'^2 - y'^2 = 9$, cuya gráfica es simple y de excentricidad igual a 2.

279. Por el indicador (< 0), la cónica es del género elipse.

Si intersectamos el diámetro con la curva, encontramos: $A(-3; 3,5)$ y $B(5; -0,5)$, y el centro de la cónica es el punto medio del diámetro, es decir: $Q(1; 0,75)$, y se trata de una elipse.

Es una elipse real porque las otras posibilidades han quedado descartadas al encontrar dos puntos como extremos del diámetro dado.

280. Como el indicador es cero, la ecuación es del género o tipo parábola, y al reemplazar las ecuaciones de rotación, se encuentra: $y'^2 = 8x'$, y $F(\frac{6}{5}; \frac{8}{5})$ es el foco en el sistema original o primitivo.

281. Es del género parábola porque el indicador es cero.

Realizando las operaciones usuales, se llega a las rectas $y' = 0 \wedge y' = \frac{6\sqrt{5}}{5}$,
y se trata de una parábola degenerada.

282. Utilizando el indicador, son respectivamente de los géneros: elipse, hipérbola y parábola.

Degeneran en: un punto $(-1; 1)$,

dos rectas secantes: $x - y = 0 \wedge x + 3y = 0$,

y dos rectas paralelas: $x - y - 2 = 0 \wedge x - y - 1 = 0$.

283. Luego de hacer el gráfico correspondiente, se determinan las ecuaciones pedidas en el sistema $X'OY'$: Eje normal: $y' - 2 = 0$, asíntotas:

$4x' - 3y' + 2 = 0 \wedge 4x' + 3y' - 10 = 0$.

Como las ecuaciones de rotación son:

$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' & x' &= \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \\ y &= \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' & y' &= -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \end{aligned} \quad \text{de donde:}$$

Expresiones que permiten encontrar en el sistema original:

Eje normal: $3x - 4y + 10 = 0$, asíntotas: $7x + 24y - 50 = 0 \wedge 5x + 2 = 0$.

ÁLGEBRA VECTORIAL

284. Como: $\vec{x} = (-3; 19; -10)$; $\vec{y} = (5; -12; 10)$, resulta: $\vec{n} = (-1; 14; -4,5)$. No es posible determinar lo solicitado, porque no se pueden sumar ni restar un vector (minuyendo) con un número (sustraendo). Si el alumno efectúa, obtendría: $(3; 47; -7) - 7\sqrt{13}$, expresión imposible de efectuar vectorialmente. Antes de efectuar cualquier cálculo, el alumno debe verificar la consistencia vectorial de la operación, y no perder tiempo realizando cálculos inútiles con pérdida de tiempo, para finalmente darse cuenta de que no es posible efectuar dichas operaciones.
285. En el 1^{er} caso, efectuando operaciones: $m + n + l = 0$
En el 2^{do} caso, como $|\vec{x}| = 0$ implica: $\vec{x} = \vec{0}$, que sólo es posible al ser nulas sus componentes, de donde: $m + n + l = -1$.
286. Demostración: Bastará desarrollar el primer miembro, tomando en cuenta que: $|\vec{a} + \alpha\vec{b}|^2 = (\vec{a} + \alpha\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \alpha\vec{b})$, y simplificar utilizando y nombrando las propiedades, para demostrar que el primer miembro es igual al segundo miembro.
Para la segunda parte, como $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, su módulo es cero y se debe cumplir: $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$, y al desarrollar, se obtiene: $M = -\frac{77}{2}$.
287. El producto escalar solicitado es: 118.
Los vectores de menor a mayor, según sus módulos, son: $\vec{d}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$ y $\vec{b}$.
Los vectores son linealmente dependientes al cumplirse: $\vec{a} + \vec{b} + 0\vec{c} - 8\vec{d} = \vec{0}$.
288. Un conjunto de vectores son linealmente dependientes, si la ecuación vectorial: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \dots + \omega\vec{w} = \vec{0}$, tiene una solución diferente de: $\alpha = \beta = \gamma = \dots = \omega = 0$. (El ejemplo puede ser: $2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c} = -\vec{0}$).
Los vectores dados son LD, cuando: $x = -1 \vee x = 2$.
289. La proposición (a) es verdadera.
Un conjunto de vectores es L.I. o L.D. porque la ecuación vectorial $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ tiene como solución la trivial o tiene una solución diferente.
La proposición (b) es falsa.
En efecto, si $\vec{a} = \vec{0}$, $\lambda_1 \neq 0$ y se cumple: $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ y el conjunto de vectores es L.D.

290. El conjunto C_1 es linealmente independiente.
 Los conjuntos C_2 y C_4 son linealmente dependientes:
 $(1; 7; 17) = 3(2; 1; 4) - 5(1; 2; -1)$, y
 $(2; 4) = 2(\sin^2 \theta; 1) + 2(\cos^2 \theta; 1)$.
 El conjunto C_3 no es comparable, porque sus vectores no pertenecen a un mismo espacio vectorial.
291. Teoría. Como se cumple: $\vec{b} = -2\vec{a}$, los vectores son linealmente dependientes.
292. i. Son linealmente dependientes (uno es múltiplo del otro).
 ii. Son linealmente dependientes: $-(2; 1) + 6(1; 1) = (4; 5)$.
 iii. $r + s + t = -3 - 1 + 0 = -4$
 iv. Si el módulo del vector es cero, cada componente de él es cero, de donde: $p + q + r = 0 + 1 - 2 = -1$.
293. Si los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son linealmente dependientes, se tiene que cumplir:
 $2\vec{a} + (\lambda - 1)\vec{b} = k[3\vec{a} + (\lambda - 3)\vec{b}]$, e s d e c i r :
 $(2 - 3k)\vec{a} + (\lambda - 1 - k\lambda + 3k)\vec{b} = \vec{0}$. Como los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes, los coeficientes deben ser cero, de donde
 $k = \frac{2}{3}$ y $\lambda = -3$.

GEOMETRÍA VECTORIAL

294. V F F V V F F

295. V V F F F V F

296. No existe valor para a ; -24 ; $0,5$; 36 ; $m = \pm 6$

297. V V F V V

298. Las dos verificaciones son inmediatas: a) $\vec{AB} = -0,20\vec{AC}$; b) Los módulos de los vectores $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ y $\vec{AC}$, son: $\sqrt{142}$, $6\sqrt{142}$ y $5\sqrt{142}$. Explicación:
 a) Si un vector es múltiplo de otro, ellos son paralelos, y como tienen un punto común, los tres puntos que los determinan son colineales.
 b) Si la suma de dos de los módulos dan el módulo del tercero, los puntos son colineales, por constituir un caso extremo de la desigualdad triangular.
 Otros métodos: a) Área igual a cero, ($\vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{0}$); b) Ángulos directores o números directores. c) Ángulo entre $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$, es 0° o 180° .

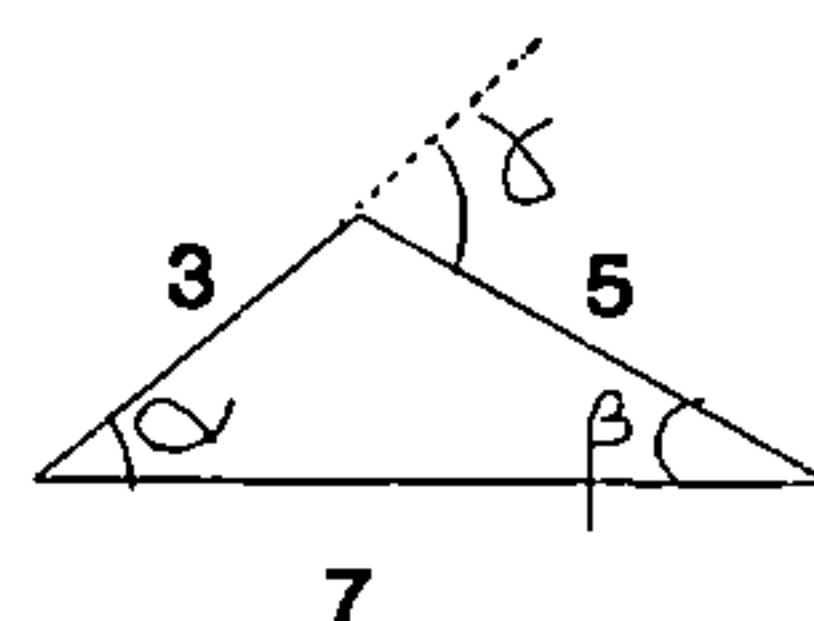
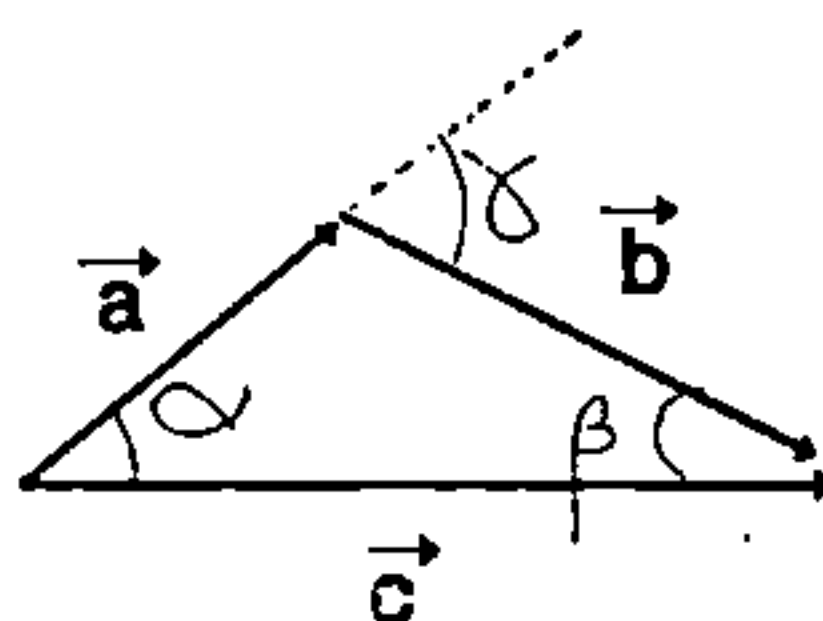
299. Como $\vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{CD}$ es inmediato, que la base menor del trapecio es AB y la mayor CD. Además, como $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = -15$ y $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -7$, los ángulos agudos son A y B. El área del trapecio es $\frac{3\sqrt{149}}{2} u^2$.

300. La superficie del triángulo es $\frac{3\sqrt{366}}{2} u^2$.
 $M(5; 6; 3,5)$, punto medio de AC, también lo es de BD. Entonces, $D(3; 13; -1)$, y ABCD es un paralelogramo.

301. El perímetro del triángulo ABC es un número entero: $36u$.
 El punto isoperimétrico Q, es: $Q(\frac{8}{5}; \frac{14}{5}; 3)$. (El punto isoperimétrico es también el punto de intersección de las cevianas que van a los puntos de contacto de las circunferencias exinscritas).
 (Al construir la figura, BQ y QC miden $4u$ y $1u$, en consecuencia $\vec{CQ} = \frac{1}{5}\vec{CB}$).

302. Si los vectores de posición a partir de un origen O , son: $\vec{x} = \vec{OM}$, $\vec{y} = \vec{ON}$ y $\vec{z} = \vec{OP}$, debe cumplirse: $\vec{MN} = \lambda \vec{MP}$, donde λ es un escalar. Como $\vec{y} - \vec{x} = \lambda (\vec{z} - \vec{x})$, se cumple $3\vec{a} - 4\vec{b} = \lambda (6\vec{a} - 8\vec{b})$, expresión verdadera con $\lambda = \frac{1}{2}$.
303. Si $P(x; 6; z)$ es el punto buscado, se debe cumplir: $\vec{AB} = \lambda \vec{AP}$, de donde: $P(1; 6; 8)$.
Si Q es un punto del plano YZ , $Q(0; y; z)$ satisface $\vec{AB} = \beta \vec{AQ}$, de donde $Q(0; 5; 7)$.
Como $|\vec{CA}| > |\vec{AB}| > |\vec{BC}|$, el mayor lado es AC y el ángulo mayor es B . Pero como $\vec{BC} \cdot \vec{BC} = 0$, B es recto.
304. Los vectores son: $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (1; -3; 5)$ y $\vec{c} = (2; 1; -4)$.
Como $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, el triángulo es rectángulo.
Como $|\vec{a}| = \sqrt{14}$ y $|\vec{c}| = \sqrt{21}$, el menor ángulo del triángulo es el formado por los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$. $\cos A = \frac{\vec{b} \cdot (-\vec{c})}{|\vec{b}| |\vec{c}|} = \frac{\sqrt{15}}{5}$,
 $\therefore A = \arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$. El área es: $\frac{7\sqrt{6}}{2} u^2$.
305. DEMOSTRACIÓN. (Considere vectores entre cada par de puntos consecutivos y realice la suma vectorial en cada cuadrilátero $ABPQ$ y $CDPQ$, y sumar convenientemente y considerar que $\vec{BP} = \vec{PC}$ y $\vec{AQ} = \vec{QD}$, logrará la demostración).
306. Como son ceros los productos de vectores perpendiculares, se obtiene:
 $m = n = 3 \wedge l = 4$.
307. El vector paralelo al plano XY , es de la forma: $(x; y; 0)$, y la condición dada: $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ indica que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, son perpendiculares. Son dos los vectores que satisfacen las condiciones dadas: $\pm(6; 8; 0)$.
308. Como Q es punto medio de BC y M es punto medio de AC : $C(-1; 1; 10)$.
Como M es punto medio de AC , y M es punto medio de BD : $D(1; -2; 16)$.
309. Como $\vec{AB} = \vec{DC}$, se cumple: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

310. Como se nos pide determinar los productos escalares, antes debemos hallar los cosenos de los ángulos que forman cada par de vectores. Para ello, hacemos uso de la ley de los cosenos, y determinamos que los cosenos



de los ángulos α , β y γ son iguales a: $\frac{11}{13}$, $\frac{13}{14}$ y $\frac{1}{2}$, y con estos valores es fácil comprobar que no acertó el alumno: $16,5 + 32,5 \neq 0,5$. (Tenga presente que el ángulo que forman dos vectores es el que forman sus direcciones positivas).

311. i. Uno de los vectores debe ser un múltiplo del otro: $\vec{m} + \vec{n} = k(\vec{m} - \vec{n})$, de donde se obtiene: $\vec{m} = -\frac{1+k}{1-k} \vec{n}$. Es decir los vectores deben ser paralelos o colineales.
- ii. Al calcular el coseno del ángulo que forman los dos vectores dados, se encuentra que el numerador es cero, por lo que ellos son perpendiculares, y forman un ángulo de 90° .

312. Se puede demostrar que el área del paralelogramo es igual al área que forman los vectores de sus diagonales. El área es: $5\sqrt{3} u^2$.

313. Al graficar, se observa que: $\vec{d} = -\vec{a}$ y $\vec{e} = -\vec{b}$. Por otro lado, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 2\vec{b}$, de donde: $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$ y $\vec{f} = \vec{a} - \vec{b}$, por ser los vectores $\vec{c}$ y $\vec{f}$ vectores opuestos.

314. Al construir el gráfico correspondiente, se puede aplicar la ley de los senos: $\frac{|\vec{b}|}{\sin 30^\circ} = \frac{|\vec{a}|}{\sin 15^\circ}$. De donde $\vec{b} = 6 + 6\sqrt{3}$.

315. Las longitudes de los lados del triángulo son: $7\sqrt{3}$, 15 y $\sqrt{78}$. El punto de ordenada 5 es (1; 5; 8). El ángulo A del triángulo es: $\arccos \frac{7}{5\sqrt{3}}$, y el exterior será: $180^\circ - \arccos \frac{7}{5\sqrt{3}}$, y el área del triángulo es: $\frac{7\sqrt{234}}{2} u^2$.

316. Si escribimos: $\vec{a} = r\vec{b} + s\vec{c}$, se encuentra $r = 2$ y $s = 1$. Entonces las respuestas son: $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$ y $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

317. El triángulo es isósceles porque: $d_{AB} = d_{AC} = 9$ u. Si los vectores dirección de las mediatrices de los lados iguales son: $\vec{r}$ y $\vec{s}$, se tiene que cumplir: $\vec{r} = \vec{n} \times \vec{AC}$ y $\vec{s} = \vec{n} \times \vec{AB}$, donde $\vec{n} = (10; 12; 17)$ es el vector normal al plano del triángulo ABC. Finalmente, se obtiene para los dos vectores dirección solicitados: $(31; -176; 106)$ y $(-58; 37; 8)$. (Sólo se pedía uno de ellos).
318. De los datos dados resultan los vértices: $A(2; 2; 0)$ y $B(2; 2; 2)$; el cálculo del vector es directo: $\vec{m} = (4; -4; 0)$, y el ángulo resulta ser 45° .
319. El dato dado nos indica que: $\vec{AB} \cdot \vec{CB} = 0$, es decir, el triángulo es rectángulo, y la hipotenusa es AC, y el punto medio de AC es el circuncentro del triángulo. En consecuencia, $\vec{x} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$.
320. Al calcular los respectivos módulos, se encuentra: $d_{AB} < d_{BC} < d_{AC}$. El área del triángulo AMB es: $0,75$ u².
321. Con el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y sus módulos, se encuentra $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}$. Luego es posible determinar el módulo de la suma y el módulo de la diferencia de estos vectores, haciendo uso de $\sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b}}$, obteniendo: $\sqrt{7}$ u. y 1 u. Luego, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 2$. Finalmente: $\cos \theta = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{7}}$, y $\theta = \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}$.
322. Son dos los vectores que cumplen las condiciones: $(-2\sqrt{5}; 4\sqrt{5})$ y $(2\sqrt{5}; -4\sqrt{5})$. Los alumnos deben observar que se trata de un problema del plano, por tener sólo los vectores unitarios $\vec{i}$ y $\vec{j}$. (Para que sea un problema de $\mathbb{R}^3$, tendría que mencionarlo el enunciado). En consecuencia, el vector buscado es un múltiplo del vector ortogonal del vector dado:
Como $\vec{a} = (4; 2)$, entonces $\vec{a}^\perp = (-2; 4)$; el vector buscado es $|k \vec{a}^\perp| = 10$.
323. Los vectores buscados son: $\vec{PQ} = (\frac{33}{13}; \frac{56}{13})$ $\vec{m} = (-56; 33)$
Para determinar el vector $\vec{PQ}$ encuentre por trigonometría sus cosenos directores; el primer ángulo director del vector es igual a la suma de los ángulos cuyas tangentes son: $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{12}$. El vector $\vec{m}$ se halla utilizando el concepto de vector ortogonal.

324. Como $\vec{AB} = (3; 4)$, se cumple: $\vec{AB}^\perp = (-4; 3)$. Como el rectángulo se encuentra en el primer cuadrante: $\vec{AD} = -2 \vec{AB}^\perp$, de donde $D(10; 0)$ y como $\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{DC}$, donde $\vec{DC} = \vec{AB}$, se obtiene: $C(13; 4)$. Fácilmente, el lado del cuadrado es el módulo del vector que une los puntos A y C, de donde, el área del cuadrado es 125 u^2 .

Por otro lado, como $\text{tg CAD} = \frac{1}{2}$, y el ángulo CAE es de 45° , se tiene que la medida del ángulo $\text{DAE} = 45^\circ - \text{arc tg } \frac{1}{2}$. Si tomamos tangente a ambos miembros, se obtiene que la medida del ángulo DAE es $\text{arc tg } \frac{1}{3}$.

325. El vector unitario es $\vec{u}_a = (\cos 60^\circ; \cos 120^\circ; \cos \gamma)$ y como $|\vec{u}_a| = 1$, se obtienen dos vectores unitarios: $\vec{u}_a = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$.
Como $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{u}_a$, son dos los vectores: $(2; -2; \pm 2\sqrt{2})$.
Si los tres ángulos directores son iguales, se tiene $\vec{u}_b = (\cos \phi; \cos \phi; \cos \phi)$,
 $\therefore \cos \phi = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, entonces: $\vec{b} = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}(1; 1; 1)$.

326. Como la recta dada tiene $m = -\sqrt{3}$, la inclinación de la recta es 120° .
Por geometría, los ángulos directores del vector son $\alpha = 195^\circ$ y $\beta = 105^\circ$.
En consecuencia el vector buscado es:
 $\vec{a} = |\vec{a}|(\cos(150 + 45)^\circ; \cos(60 + 45)^\circ)$.
La respuesta es: $\vec{a} = (-3\sqrt{3} - 3; -3\sqrt{3} + 3)$.

327. Como $\vec{AB} = |\vec{AB}| \vec{u}$, y el vector unitario de AB es $(\cos \alpha, \cos \alpha, \cos \alpha)$ y se sabe que $\sum \cos^2 \alpha = 1$, se encuentra para $\vec{AB}$ dos valores: $(\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}; -\sqrt{3})$. En consecuencia, existen dos puntos que pueden ser extremos del vector AB: $B_1(4\sqrt{3}; 3\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$ y $B_2(4\sqrt{3}; 3\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.

328. Teoría.

329. Se comprueba usando vectores que el trapecio es rectángulo ($\angle B = \angle C = 90^\circ$) y que el ángulo obtuso es D.
El punto del lado DC que unido a B, forma el trapecio isósceles ABED es $E(6; 5; 5)$.

Un procedimiento es: se calcula $\vec{AH} = \text{proyección de } \vec{AD} \text{ sobre } \vec{AB}$, luego se tiene: $\vec{OC} + \vec{CE} = \vec{OE}$, donde $\vec{CE} = -\vec{AH}$.

330. Al ser perpendicular al cartesiano $\vec{k}$, el vector que se busca es de la forma: $(x; y; 0)$. Al hacer uso de los datos, se encuentra como respuesta: $(2; 5; 0)$.
331. Como el ángulo que forman los vectores es el mismo que forman sus vectores unitarios, la bisectriz de los unitarios es también la bisectriz de los vectores dados.
Al sumar los vectores unitarios, el vector suma tiene la dirección de la bisectriz buscada. Entonces, como: $\vec{u}_a + \vec{u}_b = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, la dirección del vector suma, es: $|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$.
(Un gráfico de la suma de los vectores unitarios permite demostrar que el vector suma es la bisectriz del ángulo que ellos forman).
332. Si ubicamos el primer vector $\vec{a}$ con origen en el origen de coordenadas, sobre el plano XZ, formando un ángulo de 30° con el eje X, de tal manera que su extremo esté debajo del plano XY, el segundo vector $\vec{b}$ lo ubicamos con origen también en el origen de coordenadas, sobre el plano YZ, formando un ángulo de 45° con el eje Z, de tal manera que se encuentre sobre el plano XY. Entonces, el ángulo buscado es el que forman los dos vectores descritos, y este ángulo es el que forman sus vectores unitarios.
Entonces, tenemos:

$$\vec{u}_a = (\cos 30^\circ; \cos 90^\circ; \cos 120^\circ)$$

$$\vec{u}_b = (\cos 90^\circ; \cos 45^\circ; \cos 45^\circ)$$
Al calcular: $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, es decir: $\theta = \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{4})$.
333. Como $\text{Proy}_{\vec{b}} \vec{a} = (-1; 2; -3)$, se cumple, por una propiedad (las proyecciones de un vector sobre vectores paralelos son iguales): $\text{Proy}_{(-\frac{2}{3}\vec{b})} \vec{a} = (-1; 2; -3)$
Si $\vec{a} = \lambda(-1; 2; -3)$, $\lambda > 0$, es fácil determinar $\lambda = 14$: en consecuencia: $\vec{a} = (28; 54; 14)$.
334. Si $H(x; y; z)$, al considerar: $\vec{BH} = \text{Proy}_{\vec{BC}} \vec{BA}$, se encuentra: $H(1; 3; 1)$.
Para hallar las coordenadas del punto D solicitado, se puede escribir: $\vec{d} = \vec{c} + \vec{CQ} + \vec{QD}$, de donde $\vec{d} = (9; 7; 5)$, y $D(9; 7; 5)$.
335. Como $\vec{u} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$, y la suma de los cuadrados de los cosenos directores es igual a la unidad, se obtiene: $\vec{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. (Según el enunciado el segundo coseno director es negativo).
De donde: la componente buscada es -2 , y la proyección: $(-\sqrt{2}; 1; -1)$.

336. El vector buscado es $\vec{a} = (x; y; 0)$. Al tener la misma proyección sobre el vector $\vec{i}$, entonces, $x = 7$. Finalmente, el módulo del vector $\vec{a}$ es: $\sqrt{7^2 + y^2}$ y es igual al módulo del vector dado: $\sqrt{7^2 + 6^2 + 8^2}$, de donde: $y = \pm 10$. Por lo tanto, existen dos vectores solución: $(7; \pm 10; 0)$.
337. Si observamos la figura, al ser el triángulo DEF de lados paralelos e iguales a la mitad de los lados del triángulo ABC, podemos determinar lo solicitado sin tener que recurrir al cálculo de los vértices del triángulo ABC. El cálculo $\text{Proy}_{\vec{BA}} \vec{DE}$ se realiza sin dificultad ya que $\vec{BA} = 2\vec{EF}$, y resulta: $(5; 2; -4)$. El área solicitada es igual al área del triángulo DEF, resultando: $2\sqrt{1305} \text{ u}^2$.
338. Por la desigualdad triangular se puede escribir: $|\frac{\vec{a}}{5} + \frac{\vec{b}}{6}| < |\frac{\vec{a}}{5}| + |\frac{\vec{b}}{6}|$, que al ser los vectores dados unitarios, se convierte en: $|\frac{\vec{a}}{5} + \frac{\vec{b}}{6}| < |\frac{1}{5}| + |\frac{1}{6}|$ y también: $|\frac{\vec{a}}{5} + \frac{\vec{b}}{6}| < \frac{11}{30}$. Queda demostrado que la expresión es menor que la unidad. Procedemos a calcular el módulo de cada miembro: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, que se transforma es: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$. Por otro lado, trabajando con el segundo miembro de la expresión dada: $(|\vec{b}|; |\vec{a}|)^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2$. Al igualar los segundos miembros, se obtiene: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, que demuestra que los vectores son perpendiculares.
339.
$$\text{Proy}_{\vec{b}} \vec{a} \cdot \text{Proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$
$$\text{Proy}_{\vec{b}} \vec{a} \cdot \text{Proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{b}| |\vec{a}|^2} (\vec{a} \cdot \vec{b}), \text{ como el cociente es igual a } \cos^2 \theta, \text{ queda demostrada la igualdad.}$$
340. * Al efectuar ordenadamente la expresión dada, se obtiene: $5 \vec{a} \times \vec{b}$, que es igual al producto de sus módulos por el seno del ángulo que forman, obteniendo: 60 como respuesta.

** Los datos son: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{34}$, $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 4$ y $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 3$. Si elevamos al cuadrado las dos últimas expresiones y las sumamos, se obtiene: $|\vec{a}| |\vec{b}| = 5$. Si elevamos al cuadrado el primer dato, se obtiene: $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 26$. Conociendo la suma de los cuadrados y su producto, los módulos son 1 y 5. (Dos posibles respuestas).

341. Si los puntos dados son A, B y C, los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son: $(3; 3x - 1; 0)$ y $(-1 - 2x; 3 + 2x; 0)$, al calcular el área como un medio del módulo del producto vectorial de ellos, se obtiene primero:
 $\vec{AB} \times \vec{AC} = (0; 0; 6x^2 + 7x + 8)$, y su módulo:
 $|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (6x^2 + 7x + 8)^2}$, que es igual a:
 $|\vec{AB} \times \vec{AC}| = |6x^2 + 7x + 8|$. Entonces, por las condiciones dadas:
 $6x^2 + 7x + 8 = \pm 46$, de donde el único valor entero es $x = 2$.
342. El módulo del producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ es numéricamente igual al área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
 Se demuestra la Identidad de Lagrange, reemplazando en el primer miembro:
 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$.
343. Como los vectores $\vec{AB} = (2; -2; -3)$, $\vec{AC} = (4; 0; 6)$ y $\vec{AD} = (-7; -7; 7)$, el volumen del tetraedro es: $\frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD})|}{6} = \frac{154}{3} u^3$. Como el volumen de un tetraedro es un tercio del área de la base por la altura, y como el área del triángulo ABC es $14 u^2$, la altura que parte del vértice D es $11 u$.
344. DEMOSTRACIÓN. Como $\vec{AB} \times \vec{AC} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})$, al efectuar, se comprueba que: $\vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$, expresión que es el doble del área del triángulo. Por otro lado, el vector: $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$ es perpendicular al plano del triángulo ABC, con lo cual queda demostrada la expresión: $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 2S \vec{u}$.
345. Existe la llamada relación de Lagrange: $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.
346. Trabajando por partes: $(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = |\vec{p} \times \vec{q}|^2$. El primer miembro de esta expresión es igual a $|\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2 \sin^2 \theta$. Por otro lado, $(\vec{p} \cdot \vec{q})^2 = |\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2 \cos^2 \theta$. Al sumar ordenadamente, se obtiene en el segundo miembro: $|\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2$, cuyo valor es 225. Y la expresión se puede determinar.

347. El triple producto escalar de tres vectores, llamado también producto mixto o producto paralelepípedo, es un escalar; numéricamente es el volumen del paralelepípedo que forman los vectores. Se define como:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades:

1. Si el producto escalar de tres vectores es cero, los vectores son coplanares.
2. Se puede escribir sin los paréntesis: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$, porque necesariamente primero debe efectuarse el producto vectorial.
3. Son iguales los productos: $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$, también son iguales los productos: $\vec{a} \cdot \vec{c} \times \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b} \times \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} \times \vec{c}$, pero unos y otros lo son sólo en valor numérico.

348. Si el vector buscado $\vec{x}$ es perpendicular a los vectores dados, se debe cumplir: $\vec{x} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, de donde $\vec{x} = \lambda(1; -1; -1)$, y con la otra condición: $\vec{x} = (-3; 3; 3)$.

349. Escribimos la primera identidad en la forma convencional:

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot (\vec{c} + \vec{d}).$$

Demostraremos que el segundo miembro es igual al primero: Efectuando el producto, porque el producto escalar es distributivo: $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{d}$, y quedó demostrado.

Escribimos la segunda identidad en la forma convencional:

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot (\vec{c} + \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Por la distributividad del producto escalar, al desarrollar el primer miembro, se obtiene: $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b} \cdot \alpha \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} \cdot \beta \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$. Pero el segundo y tercer término del primer miembro son $\vec{0}$, porque el producto mixto es cero vector, si dos vectores son paralelos o iguales. Queda demostrado que el primer miembro es igual al segundo.

PLANO EN EL ESPACIO

350. Será necesario dividir el triángulo rectángulo AOB en tres partes iguales mediante los segmentos OP y OQ, donde P y Q son los puntos de trisección del segmento AB: $P(4; 3; 0)$ y $Q(2; 6; 0)$. Los planos buscados pasan por el eje z y por los puntos P y Q: $3x - 4y = 0 \wedge 3x - y = 0$.
351. La normal al plano es $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$. Es decir: $\vec{n} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})$. Efectuando el producto vectorial indicado, teniendo la propiedad distributiva y el hecho de ser: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{b}$, etc., nos permite llegar a lo que se pide demostrar.
352. El plano mediatriz es: $x + 2y = 9$.
El plano es paralelo al eje z y sus intersecciones con los ejes x e y son los puntos: $(9; 0; 0)$ y $(0; 4,5; 0)$.
353. La ecuación del lugar geométrico es: $2x - y - z - 1 = 0$.
Es un plano perpendicular al segmento AB en su punto medio $M(1; 2; -1)$.
El punto C es cualquier punto del plano hallado, excepto el punto M. Este punto M pertenece al plano, pero no pertenece al lugar geométrico que se pide hallar (porque los puntos A, M y B, son colineales).
354. Si $P(1; 1; -3)$ es el punto de contacto, se tienen dos esferas tangentes al plano $x + 2y + 2z + 3 = 0$. El centro de estas esferas está sobre la perpendicular al plano en el punto P, a 3 unidades del plano. Si el centro es Q, se tiene que cumplir: $\vec{OQ} = \vec{OP} \pm 3\vec{u}$, donde el vector unitario es de la normal al plano. Los centros son: $Q_1(2; 3; -1)$ y $Q_2(0; -1; -5)$.
355. Como la normal del plano buscado es: $(2; 0; -1) \times (0; 1; 0) = (1; 0; 2)$, la ecuación del plano que pasa por el punto: $(2; -1; 1)$, es $x + 2z - 4 = 0$.
356. Los planos son paralelos si: $m = -4$ y $n = 3$.
Los planos son perpendiculares si: $m - 3n = 9$.
357. Los planos son paralelos cuando $m = -6$ o $m = 5$, y p es real.
Los planos son perpendiculares cuando se cumple: $13m + 30p + 3 = 0$.
358. Como las normales a los planos son: $(A_1; B_1; C_1)$ y $(A_2; B_2; C_2)$, el coseno del ángulo obtuso entre los planos es: $-\frac{|A_1A_2 + A_2B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.
Los planos serán perpendiculares si sus normales lo son, debiendo cumplir: $A_1A_2 + A_2B_2 + C_1C_2 = 0$.

359. Analizando los productos vectoriales de los pares de vectores que parten del vértice A, se encuentra que son coplanares los puntos ACDE, y es B el punto que no pertenece al plano: $x + 2y + 3z - 6 = 0$.
El volumen del sólido, $\frac{20}{3} u^3$, se determina como un tercio de la superficie de la base por la altura.
360. Como debe cumplirse: $d_{AQ} = d_{Q(\text{Plano})}$, donde $Q(0; b; 0)$, se encuentra la ecuación: $13b^2 - 108b + 164 = 0$, ecuación de la cual se obtiene para b dos valores: $Q_1(0; -\frac{82}{13}; 0)$ y $Q_2(0; -4; 0)$.
361. Si $C(x; y; z)$ y se cumple: $|\vec{AC}| = |\vec{BC}|$, se obtiene:
 $4x - 3y - 9z + 9 = 0$, y el lugar geométrico es un plano, del cual hay que eliminar $M(0; \frac{9}{2}; -\frac{1}{2})$, el punto medio de AB, puesto que C no puede ocupar la posición M porque no existiría triángulo.
362. Planos paralelos, si: $a = -4, b \neq -5$.
Planos perpendiculares, si: $a = \frac{9}{5}, b \in \mathbb{R}$.
Coincidentes, si: $a = \infty, b = -5$.
Secantes, si: $a \neq -4, b \in \mathbb{R}$.

RECTA EN EL ESPACIO

363. Según los datos, se tiene: $A(a; 3)$ y $C(c; 3)$, el punto medio de AC es $M(2,5; 3)$, en consecuencia $a + c = 5$. Como $\overrightarrow{BC} = \text{Proy}_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{AB}$, se cumple: $\overrightarrow{BC} = \lambda (2/5; 1/5)$, de donde $\lambda = 5$ y $c = 4$. Entonces, $A(4; 3)$ y $C(1; 3)$ y el área del triángulo es $1,5 u^2$.
364. La ecuación vectorial es: $L_{AB}: (x; y; z) = (3; 0; 4) + t(6; -3; 1)$. (Como el enunciado no señala una manera en particular, la respuesta puede ser dada en otra forma).
La ecuación general del plano mediatriz es: $6x - 3y + z + 4 = 0$. (El plano mediatriz es el plano perpendicular al segmento dado en su punto medio).
365. La ecuación general del plano es:
 $x - 2y + 3z - 10 = 0$. (Puede darse también una vectorial).
La ecuación vectorial de la mediana que pasa por el vértice C , es:
 $(x; y; z) = (10; 0; 0) + t(4; -1; -2)$.
366. La ecuación buscada es: $13x - 14y + 11z + 51 = 0$.
(La recta que contiene al plano pasa por $(1; 3; -2)$, aquí el alumno debe tener cuidado al tomar las coordenadas del punto de paso, y tiene como vector dirección $\vec{n}_1 = (3; 2; -1)$. (Debe recordarse que las componentes del vector dirección en la forma paramétrica, están afectados por el parámetro), y el vector dirección de la recta paralela al plano es $\vec{n}_2 = (-1; 3; 3)$. El vector dirección del plano será: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (13; -14; 11)$, y pasa por $Q(1; 3; -2)$).
367. Puntos de intersección: $P_1(3; 0; 2)$ y $P_2(0; 6; -7)$. (Se encuentran resolviendo las ecuaciones dadas, primero con $y = 0$, y luego con $x = 0$, ecuaciones que representan los planos cartesianos).
La distancia buscada es: $d = \frac{\sqrt{42}}{2}$.
368. La ecuación general de la proyección de la recta L sobre el plano XY está dada por el sistema formado por la ecuación del plano que pasa por L y es perpendicular al plano XY (este es el plano proyectante sobre el plano XY) y la ecuación del plano XY , es decir: $\begin{cases} x+2y-4=0 \\ z=0 \end{cases}$.
El plano perpendicular a L que pasa por $(1; 1; 1)$, tiene por vector normal el vector dirección de L : $\vec{n} = (1; -1; 1) \times (2; 1; 1) = (2; -1; -3)$. Su ecuación es: $2x - y - 3z + 2 = 0$.

369. El plano tiene como vector dirección: $(1; 1; -1) \times (2; -1; 1) = (0; -3; -3)$, y con el punto de paso, su ecuación es: $y + z - 3 = 0$. Si A' y B' son las proyecciones de los puntos A y B sobre el plano, se tienen las rectas perpendiculares al plano:
- $$(x; y; z) = (1; 2; 3) + t(0; 1; 1)$$
- $$(x; y; z) = (2; 1; 0) + s(0; 1; 1)$$
- Al intersectar estas rectas con el plano, se obtiene: $A'(1; 1; 2)$ y $B'(2; 2; 1)$, y el módulo de la proyección es la distancia $A'B'$, es decir: $\sqrt{3}$ u.

370. Como las rectas son:
- $$L_1: (x; y; z) = (-12; 0; -34) + t(3; -1; 4)$$
- $$L_2: (x; y; z) = (-12; 0; -1) + t(3; -1; 1)$$
- $$L_3: (x; y; z) = (-7; 5; 9) + t(3; -1; 4)$$

Las rectas paralelas son: L_1 y L_3 .

La distancia entre ellas es: $d = 25$ u.

La ecuación del plano que ellas forman es: $63x + 109y - 20z + 76 = 0$. (Se encuentra el vector dirección del plano haciendo el producto vectorial de una de las rectas y el vector que une dos puntos de ellas). El punto $(21; -11; 10) \in$ plano.

371. La ecuación de la altura buscada es: $\frac{x-3}{a_1} = \frac{y-1}{a_2} = \frac{z+3}{a_3}$ donde $(a_1; a_2; a_3)$ es un vector dirección de la altura BH . Como $\vec{AH} = \text{Proy}_{AC} \vec{AB}$, se obtiene $H(\frac{53}{17}; -\frac{7}{17}; -\frac{29}{17})$. Por lo tanto, una respuesta es: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-12} = \frac{z+3}{-25}$.

372. El vector dirección $\vec{n}$ de la perpendicular común es $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Así se obtiene $\vec{n} = (2; -3; -4)$. Un punto de paso de la perpendicular común es la intersección de dos planos, cada uno de los cuales contiene a una de las rectas y es perpendicular a la otra. Estos planos son: $17x + 18y - 5z + 67 = 0$; $11x - 2y + 7z + 55 = 0$. (El primero pasa por P_1 , y su normal es $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, el segundo pasa por P_2 y su normal es $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$).

Un punto de paso es $Q(-\frac{155}{29}; \frac{93}{29}; 1)$. Con el vector dirección de la perpendicular y un punto de paso, es posible escribir una solución al problema.

373. El plano equidistante de las rectas dadas es: $x + 8y + 5z - 61 = 0$. (Las rectas dadas se cruzan; en consecuencia, el plano buscado es el plano paralelo medio de los dos planos paralelos que contienen a las rectas dadas). Los puntos de las rectas, cuya distancia es mínima son: $P(2; 13; 0)$ y $Q(1; 5; -5)$. (La determinación de uno de estos puntos es el siguiente: Si los planos paralelos que contienen las rectas son P_1 y P_2 , que contienen a las rectas L_1 y L_2 , debemos encontrar los planos Q_1 y Q_2 , perpendiculares a los planos paralelos P_1 y P_2 , y que pasen por las rectas dadas. Luego, será necesario intersectar convenientemente los planos Q con las rectas L , para hallar los puntos solicitados).
374. Si consideramos $P(x; y; z)$ como un punto genérico del plano, $P_0(x_0; y_0; z_0)$ el punto conocido de la recta dada, al hacer un esquema con los datos, se puede observar que los vectores: $\vec{P_1P}$, $\vec{P_0P_1}$ y $\vec{a} = (l; m; n)$ son coplanares, en consecuencia su producto mixto es cero, y se puede escribir:
- $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$
375. Si la recta se apoya sobre el plano, los vectores dirección de la recta y del plano son perpendiculares, y el punto de paso de la recta satisface la ecuación del plano, y se tiene: $A = 3$, $D = -23$, y la ecuación del plano es $3x + 2y - 4z - 23 = 0$. La ecuación proyectante de la recta sobre el plano XY es un plano perpendicular al XY , que pasa por la recta, y es de la forma: $Ax + By + D = 0$. El punto de paso de la recta está en el plano: $3A + B + D = 0$. Por otro lado, los vectores dirección del plano y de la recta son perpendiculares: $4A - 4B - 3(0) = 0$. En consecuencia, el plano buscado es: $x + y - 4 = 0$.
376. Como se tiene el punto de paso de la trayectoria y los cósenos directores, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son: $l = \begin{cases} x = -6 + t \\ y = 13 - t \\ z = 11 - t \end{cases}$. (Se toma como vector dirección de la recta un vector proporcional a los cosenos directores). El disparo destruye el cristal, el punto de impacto es $Q(4; 3; 1)$, al intersectar la trayectoria con el rectángulo determinado por las cuatro esquinas del vidrio.

377. La ecuación del plano buscado es: $x + y + z - 6 = 0$. Es el plano paralelo medio de los planos paralelos que contienen a las rectas que se cruzan.
378. El vector dirección de la recta dada es :
 $(1; -2; -4) \times (2; 3; -5) = (22; -3; 7)$, y un punto de paso de ellas,
 $(\frac{120}{7}; -\frac{10}{7}; 0)$, se tiene la ecuación vectorial de la recta:
 $(x; y; z) = (\frac{120}{7}; -\frac{10}{7}; 0) + t(22; -3; 7)$. El plano proyectante sobre el plano XY, es un plano paralelo al eje Z, que pasa por la recta, y su ecuación es: $3x + 22y + 20 = 0$.
 El plano proyectante sobre el plano: $x + y + z - 1 = 0$, es un plano de ecuación: $2x + 3y - 5z - 30 = 0$. Este plano tiene como punto de paso el punto $(\frac{120}{7}; -\frac{10}{7}; 0)$, y su vector dirección es perpendicular a los vectores de la recta y al $(1; 1; 1)$.
379. Las rectas l_1 y l_2 son paralelas porque el vector dirección de l_1 : $\vec{a} = (2; -1; -1)$
 es proporcional al vector dirección de l_2 : $\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-8; 4; -4)$.
 Para hallar el plano, será necesario tomar un vector $\overrightarrow{AB}$, donde A y B son puntos cualesquiera de las rectas, y con el vector dirección de una de las rectas determinar el vector normal al plano que se pide. Este plano, en el cual se encuentra la circunferencia, es: $2x + 9y + 5z + 7 = 0$.
 Por otro lado, como el centro de la circunferencia está sobre la paralela media de los planos dados, se obtiene: $b + c = -3$.
380. Ecuaciones de las aristas: $L_{BB'}: (x; y; z) = (7; -1; 0) + t(0; 0; 1)$, o como intersección de los planos $x = 7 \wedge y = -1$.
 $L_{DD'}: (x; y; z) = (3; 7; 0) + s(0; 0; 1)$, o también como intersección de los planos: $x = 3 \wedge y = 7$.
 Ecuación del plano $A'B'C'D'$: su normal es el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{B'A'} \times \overrightarrow{B'C'}$, y su ecuación es: $2x + y + 5z - 38 = 0$.
 Como $D'(3; 7; z)$ y está en el plano hallado, $D'(3; 7; 5)$.

381. Verificación: $d_1 = d_2 = \frac{11\sqrt{14}}{14} u$.
 Debe movilizarse en forma paralela a la intersección de los planos dados, y esta dirección es: $\vec{a} = (5; -11; -7)$. Con la dirección hallada y el punto P, la ecuación de la trayectoria es: $\frac{x+3}{5} = \frac{y-10}{-11} = \frac{z-5}{-7}$, o también:
 $(x; y; z) = (-3; 10; 5) + t(5; -11; -7)$, o respuesta similar.
382. DEMOSTRACIÓN. Bastará determinar la intersección del plano dado con la recta de ecuación: $(x; y; z) = t(A; B; C)$.
383. La ecuación general del plano es: $x + y + z - 6 = 0$. Al transformar la ecuación a la forma segmentaria, se tiene las intersecciones con los ejes: $(6; 0; 0)$, $(0; 6; 0)$ y $(0; 0; 6)$.
 La traza con el plano $x = 4$, es una recta, intersección de dos planos:

$$\begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x = 4 \end{cases}, \text{ o en forma proyectante: } \begin{cases} y + z - 2 = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

 La recta que parte del origen es: $(x; y; z) = t(1; 1; 1)$, al intersectarla con el plano, se tiene: $(2; 2; 2)$.
384. Los puntos son coplanares, al cumplirse: $\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD})$.
 Como $e = \frac{d_{CD}}{d_{c(\text{directriz})}}$, se obtiene: $e = 2$, por lo que la cónica es una hipérbola.
 Como la excentricidad es 2, C es punto medio entre el foco D y centro Q, de donde: $Q(2; 0; 0)$.
385. Como los planos dados son paralelos, el punto medio del segmento está en el plano paralelo medio. Al intersectar el plano paralelo medio con la recta dada, se obtiene: $N(4; 1; 2)$, y la ecuación que pasa por M y N es:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z+1}{3}.$$
386. Si el plano pasa por la primera recta dada, se puede tomar como punto de paso $(1; 3; -2)$ y un vector contenido en el plano que se busca es $(3; 2; -1)$.
 Por otro lado, al ser paralelo a la segunda recta, el vector dirección de dicha recta es un múltiplo de $(2; -1; 1) \times (1; 2; -1)$, es decir: $(1; -3; -5)$.
 En consecuencia, el vector normal al plano buscado es un múltiplo de:
 $(3; 2; -1) \times (1; -3; -5)$, es decir: $(13; -14; 11)$, y con el punto de paso $(1; 3; -2)$, se obtiene: $13x - 14y + 11z + 51 = 0$.

387. Si la ecuación dada es elemento del espacio bidimensional, representa una recta, que pasa por los puntos $(3; 0)$ y $(0; 2)$, con lo cual es fácil graficar. Si es del espacio tridimensional, la ecuación representa un plano perpendicular al plano cartesiano XY , y pasa por los puntos $(3; 0; 0)$ y $(0; 2; 0)$, plano que es fácil representar puesto que también es paralelo al eje Z .

Las distancias del origen a la recta y al plano son iguales a $\frac{6\sqrt{13}}{13}u$.

388. Las intersecciones de los planos 1° y 3° , determinan una recta, cuyo vector dirección es: $(1; -2; 1) \times (1; -3; 2) = (1; 1; 1)$. Los planos 2° y 3° , determinan otra recta cuyo vector dirección es: $(2; 1; -1) \times (1; -3; 2) = (1; 5; 7)$.

Como se nos pide el ángulo entre las rectas, el que forman sus vectores dirección hallados, y resulta: $\theta = \arccos \frac{13}{15}$.

389. Si corta a uno de los ejes cartesianos, sólo uno de los puntos $(x; 0; 0)$, $(0; y; 0)$ ó $(0; 0; z)$, debe satisfacer la ecuación de la recta (es decir el par de ecuaciones de planos dadas): sólo satisface el punto $(0; -4; 0)$. Los números directores de la recta es cualquier terna de números del vector dirección de la recta. Es decir, un múltiplo del vector: $(2; 2; 1) \times (4; -1; -3)$. Una terna es: $(1; -2; 2)$.

390. El plano Q que contiene al triángulo, perpendicular al dado, es:
 $5x - 6y + 8z - 31 = 0$. Este plano se encuentra, determinando un vector normal, resultado de multiplicar vectorialmente el vector normal del plano P con el vector que une los puntos A y B , y utilizando uno de los puntos A o B como punto de paso. Las coordenadas del vértice C se encuentran, determinando previamente las coordenadas del baricentro G , como intersección del plano Q con la recta que lo contiene: $G(9; 1; -1)$. El vértice $C(17; -3; -9)$, se determina utilizando el hecho de que las coordenadas del baricentro son el promedio de las coordenadas de los vértices. La ecuación de la recta que contiene a la proyección del triángulo sobre el plano P , es la formada por el sistema del plano P y del plano Q , es decir:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z - 22 &= 0 \\ 5x - 6y + 8z - 31 &= 0 \end{aligned}$$

391. El plano que pasa por el eje Z, es: $Ax + By = 0$, y como pasa por el punto $(2; 3; 5)$, se cumple: $2A + 3B = 0$. Esta ecuación se satisface para $A = 3$ y $B = -2$, por lo que la ecuación del plano buscado es: $3x - 2y = 0$.
- La primera recta solicitada en el enunciado, es: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$, ecuación que también puede escribirse: $(x; y; z) = (2; 3; 5) + t(0; 0; 1)$.
- La segunda recta tiene como vector dirección la normal al plano, y su ecuación es: $(x; y; z) = (5; 2; 0) + t(3; -2; 0)$. Es conveniente señalar que también puede darse como una relación:
- $$L_2 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / (5; 2; 0) + t(3; -2; 0)\}.$$
392. La recta que pasa por A y es perpendicular al plano dado, es:
 $(x; y; z) = (1; 3; 0) + t(1; 2; 1)$
 Al intersectar el plano dado con la recta perpendicular, se obtiene el punto: $M(0; 1; -1)$. entonces, M es punto medio del segmento AA' , de donde $A'(-1; -1; -2)$.
393. Al resolver el sistema formado por las ecuaciones de las rectas, como es $y = 3$, necesariamente $t = -2$, de donde $x = 1$ y $z = 1$, valores que no satisfacen el sistema. Por lo tanto las rectas se cruzan.
- El plano buscado tiene por vector normal el producto vectorial de los vectores dirección de las rectas dadas: $(1; -1; 0) \times (3; 0; 2) = (-2; -2; 3)$, y como punto de paso un punto de la recta l_2 : $(2,5; 3; 0)$. Entonces, el plano buscado es: $2x + 2y - 3z - 11 = 0$.
394. Como B está en L_1 , se cumple: $B(t; -4 + 5t; 4 - 3t)$, y en forma similar, por estar C en L_2 : $C(s; -1 + 2s; -2 + 3s)$. Por otro lado, a partir de: $\vec{AB} = \lambda \vec{AC}$, se obtiene: $t = s = 1$.
- En consecuencia los puntos B y C coinciden $(1; 1; 1)$ y la ecuación de la recta es: $(x; y; z) = (1; 1; 1) + k(1; 2; 3)$.
395. Se determina la ecuación del plano de la base BCD:
 $2x - 6y - 9z - 22 = 0$ y la altura es la distancia del punto A a dicho plano:
 $h = 8$ u.
396. El plan propuesto en el enunciado es correcto: la recta que pasa por Q y el punto simétrico $P'(8; 8; -12)$, es: $(x; y; z) = (0; 0; 20) + t(1; 1; -4)$.
 Si $z = 0$, se obtiene: $H(5; 5; 0)$.
397. El plano buscado pasa por el punto de paso de la recta: $(1; -2; 2)$ y su vector dirección es: $(2; -3; -2) \times (3; 2; -1) = (7; -4; 13)$. La ecuación general del plano es: $7x - 4y + 13z - 41 = 0$.

398. La recta buscada pasa por $A(0; 0; 6)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos B y C . La recta es la intersección de dos planos: el que contiene al triángulo y el que pasa por A y es perpendicular a la recta L_{BC} :
- $$\begin{cases} 2x + y - 2z + 12 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (\text{Es posible también hallar } H, \text{ proyección de } A \text{ sobre la recta } L_{BC}, \text{ y dar como respuesta la recta que pasa por } A \text{ y } H, \text{ pero los cálculos se complican, al resultar radicales}).$$
399. El punto de paso de la recta puede ser el punto $(2; -3; 6)$. Como las rectas dadas son paralelas, el vector dirección se obtiene al calcular el producto vectorial del vector dirección de una de las rectas: $(4; -3; 2)$ por el vector determinado por dos puntos de paso (uno de cada una de las rectas): $(9; -8; 3)$, es decir: la normal del plano es: $(7; 6; -5)$, y la ecuación del plano es: $7x + 6y - 5z - 19 = 0$.
400. Se comprueba que: $\vec{AC} = 6\vec{AB}$ y $|\vec{AB}| + |\vec{BC}| = |\vec{AC}|$. En el primer caso, al ser un vector múltiplo de otro, y tener A como punto común, los tres puntos son colineales. En el segundo caso, al ser el todo igual a la suma de las partes, los puntos son colineales, ya que si ellos formaran un triángulo, se debería cumplir la desigualdad triangular.
- Si $Q(x; y; 0)$ es el punto del plano, se cumple: $\vec{AQ} = \lambda \vec{BQ}$, de donde $\lambda = \frac{2}{7}$, y $Q(\frac{62}{9}; 173; 0)$.
401. Eje focal: el eje focal pasa por el vértice y tiene como dirección un múltiplo del vector $\vec{VF}$: $(x; y; z) = (2; 3; 7) + t(0; 1; -1)$.
El punto simétrico es: $(2; 4; 6)$.
Como la directriz es perpendicular a las direcciones de los vectores normal al plano y al vector $\vec{VF}$: $(1; 1; 1) \times (0; 1; -1) = (2; -1; -)$, se tiene que las ecuaciones paramétricas de la directriz son:
 $x = 2 + 2r, y = 4 - r, z = 6 - r$.
402. Dibujada la caja descrita, la recta que pasa por el punto $P(0; 8; 6)$ y dirección $(1; -2; -3)$: $(x; y; z) = (0; 8; 6) + t(1; -2; -3)$, intersecta al espejo en el punto $Q(2; 4; 0)$. Como el ángulo de incidencia es igual al ángulo reflejado, el rayo de luz debe seguir la dirección de una recta que pasa por Q y por el punto P' , simétrico del punto P con respecto al espejo: $P'(0; 8; -6)$. Como la ecuación $L_{P'Q}$ es: $(x; y; z) = (2; 4; 0) + r(1; -2; 3)$. Esta recta intersecta al plano $y = 0$, en el punto $S(4; 0; 6)$. (La recta también intersecta al plano $x = 5$ en $(5; -2; 9)$, pero este punto no se encuentra en la caja descrita).

403. Como los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son: $(2; 3; 1)$ y $(4; 3; -3)$, el vector dirección del plano es un múltiplo del producto vectorial de ellos, y la ecuación del plano es: $6x - 5y + 3z - 4 = 0$.
Si H es el pie de la altura que parte de B, la dirección de la altura BH es perpendicular al vector dirección del plano y al vector dirección del lado AC. En consecuencia, efectuando el producto vectorial, se encuentra que el vector dirección de BH, es: $(3; 15; 19)$, y una ecuación paramétrica de BH, es:
 $x = 3 + 3t, y = 1 + 15t, z = -3 + 19t$.
404. Los dos puntos de la circunferencia, cuyo centro es el punto $(5; 6; 12)$ sugeridos en el enunciado son: $A(6; 6; 12)$ y $B(4; 6; 12)$, de donde se tienen las ecuaciones de las rectas:
 $L_{PA}: (x; y; z) = (5; 6; 12) + t(1; 0; -3)$
 $L_{PB}: (x; y; z) = (5; 6; 12) + t(-1; 0; -3)$
Al intersectar con el plano $3x + 4y - 30 = 0$, se obtienen los puntos solución: $(10; 6; 0)$ y $(2; 6; 6)$.
405. La canica se desliza desde el punto A siguiendo la recta de máxima pendiente: recta contenida en el plano dado y es perpendicular a la intersección del plano con el plano horizontal XOY. La dirección de la recta es un múltiplo del producto vectorial del vector dirección del plano $(3; 4; 2)$ y del vector que une los puntos $B(4; 0; 0)$ y $C(0; 3; 0)$, intersecciones del plano con los ejes x e y: encontramos como vector dirección de la recta: $(6; 8; -25)$. En consecuencia, la ecuación de la recta es:
 $(x; y; z) = (0; 0; 6) + t(6; 8; -25)$. Si esta recta intersecta al segmento BC en H, el recorrido de la canica es la distancia AH, la cual resulta: $\frac{2\sqrt{261}}{5} u^2$.
406. Si la diagonal del paralelepípedo es AF, se tiene que cumplir:
 $\vec{OF} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BE} + \vec{EF}$, donde E se encuentra en el mismo plano que los vértices A B y C, formando el paralelogramo ABEC.
Reemplazando, se obtiene:
 $\vec{OF} = (-4; 9; 7)$. Conocido el vértice F, la ecuación buscada es:
 $L_{AF}: (x; y; z) = (8; 6; 1) + t(6; -2; -3)$.
407. a) La ecuación: $y = 12$, representa en el plano una recta paralela al eje x, y en el espacio tridimensional, un plano paralelo al plano cartesiano XZ.
b) La ecuación $4x + 3y = 24$, representa en el plano, una recta que corta pasa por los puntos $(6; 0)$ y $(8; 0)$. En el espacio tridimensional, representa un plano paralelo al eje de las cotas o sea perpendicular al plano XY.

408. La normal al plano buscado es el producto vectorial del vector que une los puntos A y B, con la normal al plano dado: $(5; -3; 6)$; es decir, la normal es $(3; 3; 1)$, y la ecuación general del plano es: $3x + 3y - z - 4 = 0$. Las ecuaciones paramétricas del plano pueden ser, tomando como punto de paso el punto B y como vectores dirección: la normal al plano dado y el vector AB, resultando:

$$\begin{aligned}x &= -2 + 5t + 6s \\y &= 3 - 3t - s \\z &= -1 + 6t + 15s\end{aligned}$$

409. Como el vector dirección de la recta es: $(4; 3; 9) \times (2; 2; 3) = (-9; 6; 2)$, y este vector dirección de la recta es perpendicular al vector normal al plano, la recta y el plano son paralelos.

La distancia del origen al plano es: $\frac{11\sqrt{29}}{29}$ u., y la distancia del origen a la recta, es: $\frac{\sqrt{3970}}{11}$ u.

410. El plano pasa por $M_0(1; 2; -3)$ y su normal es:
 $(2; -3; 3) \times (3; -2; -1) = (9; 11; 5)$.
 La ecuación del plano es: $9x + 11y + 5z - 16 = 0$.

411. El área del triángulo es: $\frac{\sqrt{744}}{2}$ u².

La ecuación de la recta que pasa por B y C, es:

$$(x; y; z) = (1; 5; 8) + t(2; 6; 5)$$

La ecuación de la altura que pasa por el vértice A, es:

$$(x; y; z) = (1; 1; 1) + t(59; 47; 80).$$

(Pasa por A, y su vector dirección es perpendicular al vector normal al plano del triángulo $(11; -7; 4)$ y al vector que une los puntos B y C).

412. La ecuación vectorial del eje focal es inmediato:
 $(x; y; z) = (15; 3; 4) + t(1; 1; 1)$, donde $(1; 1; 1)$ es un múltiplo del vector que une los puntos F y V.
 El vector dirección de la directriz es perpendicular al vector $(1; 1; 1)$ y al normal al plano, resultando ser: $(1; -1; 0)$, y pasa por un punto D(17; 5; 6), que se determina por ser V punto medio del segmento FD. Con todo esto, la ecuación de la directriz es: $(x; y; z) = (17; 5; 6) + k(1; -1; 0)$.

MATRICES

413. $F \ V \ F \ V \ F \ F \ V \ F \ F \ F$

414. $B^t A^t + C^t B^t$

$$A^2 + AB + BA + B^2$$

$$A^2 + AB + BA + B^2$$

$$A^{-1} = A^t = A; BA^{-1}$$

415. Las tres matrices que se piden determinar se calculan siguiendo los esquemas siguientes: halle A^2 , y al multiplicar por A , obtiene A^3 ; halle B^2 , multiplique luego B^2 por B^2 , y halla B^4 , finalmente multiplique A^3 por B^4 . Realizadas las

operaciones, se obtiene: $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 12 & -15 & -18 \\ -12 & 18 & 16 \end{bmatrix}$, $B^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y

$$A^3 B^4 = [O].$$

416. Al efectuar A^2 , teniendo en cuenta la condición dada, se obtiene:

$$A^2 = \begin{bmatrix} x^2-1 & xy & xz \\ xy & y^2-1 & yz \\ xz & yz & z^2-1 \end{bmatrix}, \text{ y } B = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{bmatrix}.$$

Debemos comprobar ahora que $AB = BA$. Efectuando cuidadosamente, teniendo siempre en cuenta la condición dada, se comprueba que:

$$AB = BA = [O].$$

417. Las matrices solicitadas son:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

418. Como $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 6 & 0 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \end{bmatrix}$, la matriz buscada es: $\begin{bmatrix} -8 & 2 & 0 \\ -2 & -17 & 3 \\ 2 & 0 & -15 \end{bmatrix}$.

419. Del análisis de las matrices, se obtiene: que la matriz B debe ser de orden 5×4 , y la matriz C de orden 3×4 . Para la otra parte de la pregunta, se simplifica la expresión dada utilizando: $P^t = P$ y $Q^t = -Q$, llegando a: $X = P - 2I$.

Se obtiene la matriz P y luego la matriz X:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Debe observarse que se define la matriz Q, pero no se utiliza.

420. Al analizar el orden de la operación indicada: $(2 \times 3 + 2 \times 3 _x_) 3 \times 1$, se deduce que $_x_$, el orden de la matriz B es: 3×3 , y la matriz B. es:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}, \text{ y la matriz } Q = A \# B, \text{ es: } Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 8 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

La matriz buscada es: $\begin{bmatrix} 73 \\ -14 \end{bmatrix}$, por ser la matriz $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

421. Al utilizar los datos, como $TT^t = P$, operando convenientemente, se obtiene:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -5 \\ -3 & -5 & 26 \end{bmatrix}$$

422. * La matriz premultiplicadora es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

El ejemplo es fácil de proponer.

- * La matriz A es:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Como $M = 2A$, al efectuar A^2 se obtiene I. En consecuencia, haciendo uso de una propiedad de las matrices, la demostración es inmediata.

423. Como $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$, al ser las matrices permutables o conmutables e involutivas, se tiene:

$$(A + B)^2 = 2I + 2BA.$$

Al efectuar, la traza es: 4.

424. Como $M = (C + D)(2C - D) = 2C^2 - CD + 2DC - D^2$, se tiene:

$$\text{Si } C \text{ y } D \text{ son permutables: } M_1 = 2C^2 + CD - D^2.$$

$$\text{Si } C \text{ y } D \text{ son involutivas: } M_2 = I - CD + 1DC.$$

$$\text{Si } C \text{ y } D \text{ son idempotentes: } M_3 = 2C - CD + 2DC - D.$$

$$\text{Si } C \text{ y } D \text{ son permutables e involutivas: } M_4 = 2I - 3CD - D^2.$$

425. Teoría.

La matriz A es periódica de período 3 al obtener: $A^4 = A$.

La matriz B es idempotente, porque $B^2 = B$.

426. Como $A^3 = -I$, resulta $A^6 = I$ y lo solicitado, $A^6 + 2A$, es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$I + 2A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

427. Para despejar la matriz X , de la ecuación $AXB = C$, se premultiplica por A^{-1} , y luego se posmultiplica por B^{-1} , es decir se obtiene: $X = A^{-1}CB^{-1}$,

resultando: $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ dado que las inversas de A y B son inmediatas por Gauss-Jordan.

En la segunda parte, al invertir ambos miembros del dato, se obtiene para la segunda matriz: $Y = (Y^{-1})^{-1}$, resultando:

$$Y = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 3 \\ 8 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

428. i) Costos por unidad:

$$\begin{bmatrix} 47,50 & 57,75 \\ 27,00 & 23,75 \\ 81,00 & 95,00 \\ 12,00 & 15,00 \end{bmatrix}$$

- ii) Matriz pedido: [20 200 50 60]

Matriz cantidades: [220 890 105 125 70]

- iii) Matriz costo del pedido: [157,00 76,00 192,14]

429. Por Gauss – Jordan, se obtiene:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 5 & 13 \\ 1 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

430. Como $AB = BA$, al premultiplicar por A^{-1} , se obtiene: $B = A^{-1}BA$. Si luego se posmultiplica por A^{-1} , se obtiene: $BA^{-1} = A^{-1}B$, que era lo que se quería demostrar.

Se nos pide demostrar: $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$, cuando $A^4 = [0]$.

Podemos demostrar que ambos miembros son iguales, al comprobar que al posmultiplicar ambos por $I + A$, se obtiene el mismo resultado (se está realizando una demostración indirecta):

$$(I - A)^{-1}(I - A) = I$$

$$(I + A + A^2 + A^3)(I - A) = I^2 - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + A^3 - A^4 = I.$$

431. Como $AXB = C$, entonces, premultiplicando por la inversa de A , y luego posmultiplicando por la inversa de B , se obtiene: $X = A^{-1}CB^{-1}$. Efectuando los cálculos (realizando las inversiones por Gauss-Jordan, son matrices de dos por dos):

$$X = \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}$$

432. Al efectuar convenientemente las multiplicaciones (y sin cometer errores), se encuentra que: $J^4 = I$. Es decir, la matriz es periódica de período 4. Del análisis de los productos hallados, se puede concluir: $J^2 = -I$, $J^3 = -J$ y $J^4 = I$.

Al generalizar, se encuentra que se cumple:

$$J^{4k} = I, J^{4k+1} = J, J^{4k+2} = -I \text{ y } J^{4k+3} = -J.$$

Finalmente: $J^{15} = J^{4k+3} = -J$. Al invertir por Gauss-Jordan, se encuentra: $(J^{15})^{-1} = J$. (Una manera de evitar el cálculo de la inversa solicitada, es: como $J^{15}J = I$, la inversa de J^{15} es J).

433. Se invierte por Gauss-Jordan, buscando trabajar con enteros hasta donde sea posible. Algunas indicaciones: primero eliminar los decimales, multiplicando todas las filas por 10. Luego, disminuimos la primera fila en la última. A continuación, tomamos quinta a la primera fila. A continuación, efectuamos: $2^{\text{da}} - 1^{\text{ra}}$ y $3^{\text{ra}} - 2^{\text{da}}$. Luego dividimos la segunda fila entre dos. Terminamos el proceso con enteros, haciendo: $2^{\text{da}} - 3^{\text{ra}}$. En este momento, será necesario dividir la segunda fila entre -25 , y el resto del proceso es con decimales, lo cual es inevitable. La matriz inversa, es:

$$\begin{bmatrix} 1,56 & -0,20 & -0,36 \\ -0,04 & 1,80 & -0,76 \\ -0,44 & -0,20 & 1,64 \end{bmatrix}$$

El enunciado solicita verificar el producto, para lo cual bastará efectuar el producto $AA^{-1} = I$. (Debemos indicar que los cálculos con decimales se facilitan trabajando siempre con dos decimales, a fin de evitar errores).

434. Premultiplicando por la inversa de A: $A^{-1}AX + A^{-1}B = A^{-1}A$, se obtiene:
 $X = I - A^{-1}B$, por ser $A^{-1}A = I$.

Como A y B son regulares, por Gauss-Jordan:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right).$$

Finalmente, se obtiene al ejecutar: $X = I - A^{-1}B$

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -9 & -44 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

435. Al invertir A por los métodos usuales, se obtiene:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

y la suma de sus elementos es 2.

Como $B^2 = 2B$, al premultiplicar por la inversa de B, se obtiene: $B = 2I$. En consecuencia $B^{-1} = 0,5I$, y la suma de los elementos de la matriz B es también 2, por ser la matriz B de orden 4.

DETERMINANTES

436. F F V V V F V

437. abc ; $|k|^4$; 21; 1 y 3

438. 1 y - 2; -10; 20

439. Se puede suponer la matriz buscada como:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a-1 \end{bmatrix},$$

matriz cuya traza es -1. Al hallar A^3 , e identificar, se obtiene que A es la matriz unidad o identidad.

440. Como se pide determinar $A^t B$, y B es cuadrada de orden 3, A^t debe ser una matriz de orden 4×3 , de manera que la matriz A sea de orden 3×4 , para que tenga 4 columnas como se menciona en el enunciado.

Tomando en cuenta la definición $a_{ij} = i + j - 2$, se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Por otro como el determinante de B es igual a 12, se obtiene para $x = 3$ ($x = 0$, se descarta por la condición dada).

Conocidas las matrices A y B, se encuentra:

$$A^t B^2 = \begin{bmatrix} -18 & 0 & 35 \\ -37 & 3 & 67 \\ -56 & 6 & 99 \\ -75 & 9 & 131 \end{bmatrix}$$

441. Al desarrollar el determinante, restando la primera fila de las demás, se obtiene: $k = 3$.

Al efectuar:

$$A + 2A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

La traza es la suma de los elementos de la diagonal principal: 18.

442. El desarrollo ii es correcto.

En el desarrollo i hay dos errores graves, el primero es afirmar que:

$A^2 = 2A \rightarrow A = 2$, por no existir división de matrices. El segundo error es afirmar que: $A = 2$, una matriz no puede ser igual a un número.

La inversa de la matriz B, es: $B^{-1} = \text{diag}(-\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{5})$, o también:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2 \end{bmatrix}$$

443. Las matrices B y D son singulares; sus determinantes son nulos.
Las matrices A y C son regulares o inversibles y sus inversas son

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } C^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

444. La matriz es singular ($|A| = 0$) si $x = \pm 0,5$
La inversa de la matriz A, es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

445. La inversa de la matriz dada por Gauss-Jordan, es:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

La respuesta a la pregunta es: Si el determinante de una matriz es diferente de cero, la matriz es regular. Por lo tanto, sólo será necesario comprobar que el determinante es diferente de cero.

446. Al realizar los siguientes cálculos: fila 1 – fila 6, fila 2 – fila 5, fila 3 – fila 4, se factoriza $(a - b)^3$. Luego en el determinante se efectúa: col 6 + col 1, col 5 + col 2, col 4 + col 3, obteniendo una matriz triangular, transformaciones que permiten demostrar que el primer miembro es igual al segundo.

El segundo determinante es una vandermondiana, y es equivalente a:

$$|P| = (\log 200 - \log 2)(\log 200 - \log 20)(\log 20 - \log 2),$$

que es igual a 2.

447. El determinante de la matriz $2A$, es 16. La matriz $A + A^{-1}$, es:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

448. Al desarrollar por los elementos de la primera columna e igualar a cero, resultan para la incógnita: 0 (raíz doble) y 5.

449. La matriz Q es:

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 & -10 \\ 1 & -2 & -5 & -8 \\ 3 & 0 & -3 & -6 \\ 5 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz Q es cero. (Basta sumar la primera fila a la segunda y tres veces la primera a la tercera, para tener dos filas iguales).

450. Demostración: (Los puntos dados satisfacen el determinante al tener, en cada caso dos filas iguales. Como a , c y e son diferentes, los puntos no se encuentran en una misma vertical. Finalmente, al desarrollar mediante los elementos de la primera fila, se obtiene una expresión de la forma:
 $Ax^2 + DX + Ey + F = 0$, forma general de la ecuación de una parábola de eje vertical.

451. Demostración: Como $A \text{ Adj } A = |A|I$, al tomar determinantes a ambos miembros, se obtiene: $|A| |Adj A| = |A|^n$. Finalmente: $|Adj A| = |A|^{n-1}$.

$$|A| = 1 \quad (\text{adj}A)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 5 \\ -1 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

452.

Efectuando, se encuentra: $X^t C = [-1 \ 0 \ 0]$

La suma de los elementos de la matriz ACB es -70 .

(Todos los cálculos son inmediatos: hallar $X = A^{-1}B = [1 \ 2 \ 3]^t$, calculando previamente $|A| = 1$ y A^{-1} ; luego, determinar la matriz

$C = \text{Adj } A = |A|A^{-1} = -A$, y finalmente efectuar: $X^t C$. La segunda parte:

$ACB = A(\text{Adj } A)B = |A|B = -1B$)

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

453. La única operación aplicable, sin que el valor de un determinante sufra alteración, es la operación: "A". Las otras dos sí alteran el valor. Al aplicar la operación "I", el signo del determinante cambia, y al aplicar la "M", el valor del determinante queda multiplicado por el número utilizado. Se corrigen alterando el signo cada vez que se realice una operación "I", y dividiendo por el número por el cual se multiplica una línea cada vez que se realice una operación "M".
Al resolver por Gauss-Jordan, se obtiene: $(x; y; z; w) = (2; 1; 5; 0)$.

454. Si $r[A] = r[A|B]$, el sistema $AX = B$ es consistente. Si $r[A] < r[A|B]$, el sistema $AX = B$ es inconsistente.
La solución del sistema propuesto es:

$$\begin{aligned} x &= 3 - 13t \\ y &= 1 - 5t \\ z &= -4 + 17t \\ u &= t \end{aligned}$$

o respuesta equivalente, siempre con un parámetro.

455. Es un sistema homogéneo, por lo tanto es consistente. Su solución tiene dos parámetros: $(\frac{2}{3}(-s-t); \frac{1}{3}(-s-t); t; s; 0)$, o respuesta equivalente.

456. El sistema es consistente indeterminado, con dos parámetros.
La solución del sistema es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Recuerde el alumno que su solución puede ser diferente, dependiendo de cómo se realizan las transformaciones de filas, y de cómo se elijan las columnas distinguidas. Lo importante es que la solución tiene dos parámetros, y todas las soluciones deben ser algebraicamente equivalentes).

457. Trabajando el sistema por Gauss-Jordan, al trasformarlo en una matriz escalonada, y al analizar, se obtiene:

Si $a \neq -\frac{12}{7}$, existe solución única, por cada valor que se asigne a b.

Si $a = -\frac{12}{7}$ y $b = 0$, existen múltiples soluciones.

458. Al efectuar transformaciones de filas, se obtiene que el sistema es consistente, si $k = 5$. Con este valor, la solución tiene dos parámetros:

$$x_1 = 0,8 - 0,2u + 1,8v$$

$$x_2 = 0,5 + 0,6u - 1,4v$$

$$x_3 = u$$

$$x_4 = v, \text{ o respuesta equivalente.}$$

459. Al efectuar transformaciones de filas, se obtiene la condición de consistencia:

$$c - 2b - a = 0$$

Como el número de incógnitas es 3 y el rango de la matriz ampliada es 2, la solución del sistema de ecuaciones tiene siempre un parámetro, es decir un grado de libertad y no puede tener solución única.

460. Al aplicar Gauss-Jordan se encuentra una única solución:

$$x = 6, y = -3, z = -3.$$

La interpretación geométrica es que son seis planos que pasan por un punto, el punto solución (6; -3; -3).

461. El sistema de ecuaciones que resuelve el sistema es:

$$x + y + z = 13$$

$$10x + 5y + z = 83$$

El sistema es consistente porque las ecuaciones representan dos planos no paralelos, luego su intersección son los puntos de una recta, y el sistema es consistente indeterminado.

Al resolver el sistema por Gauss-Jordan, se encuentra:

$$x = 6 - 4t$$

$$y = 4 + 9t$$

$$z = 3 - 5t$$

La única solución al problema propuesto es: (6; 4; 3).

462. Luego de realizar operaciones lineales, se deduce que:

Solución única, cuando: $b \neq 2$, $a \neq 0$; entonces:

$$x = \frac{2 - b}{a}, y = \frac{b - 2}{a}, z = 1$$

Solución múltiple con un parámetro: $b = 2$, $a \neq 0$; luego:

$$x = y = \frac{2 - 2t}{a}, z = t.$$

Solución múltiple, con dos parámetros: $b = 2$, $a \neq 0$, y se obtiene:

$$x = t, y = t, z = 1$$

Sistema inconsistente: $a = 0$, $b \neq 0$.

463. Se trabaja haciendo transformaciones elementales de filas, y se concluye en:

Sistema inconsistente: $a = 7$ $b \neq 3$

Sistema consistente determinado: $a \neq 7$

Sistema consistente indeterminado: $a = 7$ $b = 3$

Identificación de los tres casos:

Sistema inconsistente: Los planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas diferentes.

Sistema consistente indeterminado: Los planos se cortan en un punto común.

Sistema consistente indeterminado: Los tres planos pasan por una recta.

Este libro se terminó de imprimir en junio de 1999
en el Departamento de Impresiones
de la Universidad de Lima