

Jorge Chávez Salvador

*Matrices, determinantes y
sistemas de ecuaciones lineales*

*Universidad de Lima
Fondo de Desarrollo Editorial
1997*

84599



Colección Textos Universitarios
1997

© Jorge Chávez Salvador
© De esta edición
Fondo de Desarrollo Editorial
Universidad de Lima
Av. Javier Prado Este s/n, Lima 33
Casilla postal 852, Lima 100, Perú
Teléfono 437-6767
Fax 437-8066
E-mail fondo_ed@ulima.edu.pe
Internet <http://www.ulima.edu.pe>

Carátula Tapul

Impreso en el Perú.
ISBN 9972-45-019-8

*Para Evelyn, mi esposa,
y a mis hijos Pamela y Nicolás,
por el tiempo que me concedieron*

Índice

Presentación	xv
Introducción	xvii
1 MATRICES	
1.1 Introducción	1
1.2 Concepto de matriz	1
1.3 Notaciones	2
1.4 Las matrices como tablas de doble entrada	5
1.5 Igualdad de matrices	8
1.5.1 Definición	8
1.5.2 Matrices equidimensionales	9
1.5.3 Propiedades de la igualdad	10
Ejercicios y problemas propuestos	11
2 OPERACIONES CON MATRICES	
2.1 Introducción	15
2.2 Adición de matrices	15
2.2.1 Definición	15
2.2.2 Propiedades de la adición	17
2.3 Multiplicación de una matriz por un escalar	18
2.3.1 Definición	18
2.3.2 Propiedades de la multiplicación de una matriz por un escalar	19
2.4 Combinación lineal de matrices	24

2.5	Espacio matricial	25
	Ejercicios y problemas propuestos	26
3	MULTIPLICACIÓN DE MATRICES	
3.1	Introducción	29
3.1.1	Producto escalar de dos vectores	29
3.2	Producto de dos matrices	30
3.2.1	Introducción	30
3.2.2	Definición	30
3.2.3	Propiedades del producto de dos matrices	34
3.3	Esquemas de multiplicación	38
3.3.1	Introducción	38
3.3.2	Esquema horizontal	39
3.3.3	Esquema vertical	40
3.3.4	Otros esquemas	42
3.4	Verificación de la multiplicación	43
3.4.1	Verificación por premultiplicación	43
3.4.2	Verificación por posmultiplicación	45
3.4.3	Doble verificación	48
3.5	Potenciación de matrices	49
3.5.1	Introducción	49
3.5.2	Definición	49
3.5.3	Propiedades de la potenciación	52
3.5.4	Matriz idempotente	52
3.5.5	Matriz periódica	53
3.5.6	Matriz nulipotente	55
	Ejercicios y problemas propuestos	57
4	MATRICES ESPECIALES	
4.1	Introducción	63
4.2	Matriz nula	63
4.2.1	Definición	63
4.2.2	Notación	64
4.2.3	Propiedades	64
4.3	Matriz transpuesta	65
4.3.1	Definición	65
4.3.2	Notación	65
4.3.3	Propiedades	66
4.4	Matriz cuadrada	69
4.4.1	Introducción	69
4.4.2	Diagonal de una matriz cuadrada	70
4.4.3	Traza de una matriz cuadrada	70
4.4.4	Propiedades de la traza de una matriz cuadrada	71

4.5	Matrices simétricas y antisimétricas	73
4.5.1	Matriz simétrica.- Definición	73
4.5.2	Matriz antisimétrica.- Definición	73
4.5.3	Propiedades de las matrices simétricas y antisimétricas	74
4.6	Matrices triangulares	77
4.6.1	Matrices triangulares superiores	77
4.6.2	Matrices triangulares inferiores	78
4.6.3	Propiedades de las matrices triangulares	78
4.7	Matriz diagonal	85
4.7.1	Definición	85
4.7.2	Propiedades	85
4.8	Matriz escalar	87
4.8.1	Definición	87
4.8.2	Propiedades	88
4.9	Matriz identidad	89
4.9.1	Definición	89
4.9.2	Propiedades	90
4.10	Otras matrices especiales	90
4.10.1	Matriz involutiva	90
4.10.2	Matriz ortogonal	91
4.10.3	Función matricial	92
	Ejercicios y problemas propuestos	94
5	MATRIZ INVERSA	
5.1	Introducción	103
5.2	Definición y notación	103
5.3	Matrices regulares y singulares	106
5.4	Propiedades de la matriz inversa	109
5.5	Inversión de matrices especiales	112
	Ejercicios y problemas propuestos	118
6	TRANSFORMACIÓN DE MATRICES	
6.1	Introducción	121
6.2	Forma matricial de un sistema de ecuaciones	121
6.3	Transformaciones elementales de filas	122
6.4	Triangulación de Gauss	128
6.5	Diagonalización de Jordan	132
6.6	Matrices escalonadas	139
6.7	Matrices equivalentes por filas	144
6.8	Transformación elemental de columnas	144
6.9	Forma normal de una matriz	147
6.10	Rango de una matriz	148
	Ejercicios y problemas propuestos	151

7 MATRICES DE TRANSFORMACIÓN

7.1	Introducción	155
7.2	Matrices elementales	155
7.3	Inversa de una matriz elemental	164
7.4	Descomposición de una matriz regular como producto de matrices elementales	166
7.5	Transformación general de matrices	170
	Ejercicios y problemas propuestos	174

8 MÉTODOS DE INVERSIÓN DE MATRICES

8.1	Introducción	177
8.2	Inversión por solución de sistemas de ecuaciones lineales	178
8.3	Inversión por Gauss-Jordan	180
8.4	Inversión por matrices elementales	183
8.5	Inversión por matrices de transformación	187
8.6	Inversión por factorización	191
8.7	Inversión de matrices simétricas por el método de Fox	195
	Ejercicios y problemas propuestos	200

9 DETERMINANTES

9.1	Introducción	203
9.2	Permutaciones	203
9.3	Determinante de una matriz cuadrada	207
9.4	Definición general	210
9.5	Primeras propiedades	215
9.6	Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea	223
9.7	Más propiedades	229
9.8	Determinante de la matriz inversa	240
	Ejercicios y problemas propuestos	242

10 MATRIZ ADJUNTA

10.1	Introducción	251
10.2	Matriz adjunta	251
10.3	Propiedades de la matriz adjunta	254
10.4	Construcción de la matriz inversa de una matriz	258
	Ejercicios y problemas propuestos	261

11 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (NXN)

11.1	Introducción	263
11.2	Ecuación lineal	263

11.2.1	Definición	263
11.2.2	Ecuación lineal con una incógnita	264
11.2.3	Ecuación lineal con dos incógnitas	265
11.2.4	Ecuación lineal con n incógnitas	267
11.3	Sistema de ecuaciones lineales	271
11.3.1	Definición y notación	271
11.3.2	Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales	273
11.4	Sistemas consistentes e inconsistentes	274
11.5	Sistemas homogéneos y no homogéneos	276
11.6	Resumen de los sistemas de ecuaciones	278
11.7	Solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas	279
11.8	Métodos algebraicos	279
11.8.1	Eliminación por igualación	279
11.8.2	Eliminación por sustitución	280
11.8.3	Eliminación por reducción	280
11.8.4	Regla de Cramer	281
11.9	Métodos matriciales	284
11.9.1	Sistemas equivalentes	284
11.9.2	Triangulación de Gauss	285
11.9.3	Diagonalización de Jordan	288
11.9.4	Verificación de la solución de un sistema	291
11.9.5	Por inversión de matrices	292
	Ejercicios y problemas propuestos	296
12	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (MXN)	
12.1	Introducción	299
12.2	Rango de la matriz de coeficientes	299
12.3	Rango de la matriz ampliada	300
12.4	Análisis de los sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas	302
12.5	Teoremas de Rouché-Frobenius	311
	Ejercicios y problemas propuestos	319
	APÉNDICES	
I	Construcción de ejercicios con matrices enteras	324
II	Matrices particionadas o por cajas	329
III	Otras notaciones	336
IV	Inversas unilaterales	338
V	Otras verificaciones	341
VI	Aplicaciones a la Geometría Analítica	345
VII	Métodos chinos	355

<i>RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS</i>	<i>359</i>
<i>LIBROS CONSULTADOS</i>	<i>379</i>
<i>ÍNDICE ANALÍTICO</i>	<i>381</i>

Presentación



Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, del profesor Jorge Chávez, es el fruto del ejercicio de más de veinte años en la docencia universitaria.

El respaldo de esos años, la solvencia académica y el contacto permanente con los estudiantes que ingresan a la vida universitaria han permitido al autor preparar el presente texto con el material adecuado a los programas de enseñanza de la matemática en las universidades peruanas.

Por su nivel está dirigido a los alumnos de los cursos básicos universitarios, pudiendo ser o no precedido por un curso de álgebra vectorial. Deja de lado, por consiguiente, demostraciones rigurosas que exceden dicho nivel y permite el acceso a estudiantes no interesados en matemática pero que deben conocerla y manejarla adecuadamente para proseguir sus estudios profesionales.

*Teresa Mouchard Seminario
Directora del Programa de
Estudios Generales*

Introducción

Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales tiene como objetivo fundamental que los conceptos de estos tres grandes temas puedan ser aplicados y desarrollados en los diferentes procedimientos de cálculo. En lo que fue posible se incluyeron las nociones básicas, como los procedimientos de cálculo, los que deben quedar siempre en la mente de los alumnos para futuras aplicaciones en diferentes campos de acción, como la ingeniería, economía, administración, contabilidad, psicología y otros.

En el capítulo 1 se presentan los conceptos básicos de matrices, y en el capítulo 2 las operaciones matriciales de suma de matrices y multiplicación de una matriz por un escalar. La tercera operación matricial, multiplicación de matrices, se presenta en el capítulo 3 por ser una operación nueva para los estudiantes. El capítulo 4 trata de las matrices especiales, demostrando cómo se realiza con ellas las operaciones descritas en los capítulos previos. La matriz inversa, por su importancia, se presenta en el capítulo 5.

Las transformaciones matriciales se presentan en el capítulo 6. En éste se introduce al alumno en la solución matricial de sistemas de ecuaciones lineales, limitándonos a resolver sistemas consistentes determinados. No se debe proseguir el estudio del texto sin dominar la multiplicación de matrices y las transformaciones elementales de filas, procedimientos que se utilizan permanentemente en los capítulos siguientes. El capítulo 7 demuestra que las transformaciones de matrices no son una operación diferente a las ya estudiadas.

El capítulo 8 está dedicado a los procedimientos para la inversión de matrices¹, siendo el más importante el de Gauss-Jordan².

1 En un curso regular se puede limitar el estudio de este capítulo a los dos primeros procedimientos. Se debe señalar la utilidad de los otros métodos, los que podrán ser estudiados independientemente y ser aplicados en la inversión de matrices. Los métodos que se incluyen en el texto se fundamentan en diversas propiedades que se presentan en capítulos previos.

2 La inversión por Gauss-Jordan es adecuada para invertir matrices sin la intervención de calculadoras o computadoras, y se adecua a las evaluaciones en clase en los cursos introductorios.

El capítulo 9 trata la teoría de los determinantes. Hemos utilizado la clásica presentación por permutaciones, logrando reducir todas las propiedades operativas a diez, las que permiten resolver, "a mano", determinantes numéricos y literales. En este capítulo se insiste en demostraciones con el fin de preparar a los estudiantes para problemas literales. En el capítulo 10 se estudia la matriz adjunta, con el fin de presentar la construcción de la matriz inversa por medio de ella. Esta construcción de la inversa de una matriz tiene carácter mayormente histórico.

El capítulo 11 aborda el tema de los sistemas de ecuaciones lineales en general, presentando los conceptos básicos, resaltando la diferencia entre los métodos algebraicos y los matriciales de Gauss y Gauss-Jordan presentados en el capítulo 8. El capítulo 12 presenta la solución de sistemas de m ecuaciones con n incógnitas. Aquí se hace un análisis completo de la discusión de sistemas consistentes e inconsistentes, determinados e indeterminados. Toda la teoría se resume en los teoremas llamados de Rouché-Frobenius. Sin embargo, la metodología empleada a lo largo del texto permite analizar en forma natural un sistema de ecuaciones, sin utilizar directamente los famosos teoremas.

En la última parte se presentan siete anexos que permiten ampliar conceptos teóricos y prácticos, por lo que recomendamos su lectura.

Finalmente, deseamos agradecer a los profesores por su constante apoyo al revisar el manuscrito, resolver los ejercicios y problemas propuestos y por sus innumerables sugerencias. Igualmente a los alumnos, que en forma directa y permanente a lo largo de más de veinte años que venimos dictando esta materia, han aportado muchas ideas y procedimientos para hacer didáctica la enseñanza, que ahora volcamos en este libro.

Jorge Chávez Salvador
Lima, marzo de 1997

MATRICES

1.1 Introducción

Se definen en este capítulo las matrices, su notación y elementos. Por medio de ejemplos se presenta la relación existente entre las matrices y las tablas de doble entrada, haciendo ver cómo las matrices son objetos matemáticos que permiten sistematizar información generalmente estadística. Al final se presenta una sección dedicada a la igualdad de matrices y otra a la comparación de dos matrices.

1.2 Concepto de matriz

Se llama matriz de orden $m \times n$ a un arreglo o disposición de mn elementos cualesquiera, números, letras o funciones, formando un cuadro de m filas y n columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde cada a_{ij} , con $i = 1, 2, 3, \dots, m$ y $j = 1, 2, 3, \dots, n$, es un elemento o entrada de la matriz.

Con relación a los números, ellos serán siempre reales, salvo indicación expresa. Al usar la palabra escalar, éste es un número real, a menos que se indique que los elementos de las matrices son números complejos, en cuyo caso, los escalares también pueden ser complejos.

1.3 Notaciones

Las matrices se denotan con letras mayúsculas (y en el presente texto con negritas), encerrando la disposición o arreglo mediante corchetes. Con frecuencia se usan grandes paréntesis en lugar de corchetes. Antiguamente se usaban barras dobles.

Ejemplo 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

La matriz **A** es de 2x4, es decir tiene dos filas y cuatro columnas, en consecuencia posee 8 elementos o entradas. ■

Ejemplo 2

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sec 30^\circ & tg 105^\circ & \cos 18^\circ \\ tg 45^\circ & \cos 135^\circ & \operatorname{sen} 165^\circ \\ \sec 60^\circ & \sec 45^\circ & \operatorname{cotg} 225^\circ \end{bmatrix}$$

La matriz **B** es de 3x3, posee tres filas y tres columnas, tiene nueve elementos. ■

Ejemplo 3

$$\mathbf{C} = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

La matriz **C**, escrita con la antigua notación de doble barra, es de 4x5, tiene cuatro filas y cinco columnas. Total, 20 elementos o entradas. ■

Los elementos de una matriz se indican con letras minúsculas y dos subíndices, que indican la posición del elemento en el arreglo. Así, a_{23} , que se lee "a, dos, tres", indica que es el elemento que se encuentra en la segunda fila y en la tercera columna.

a_{ij}

El primer subíndice "i" indica la fila, y el segundo subíndice "j", la columna.

Generalmente a_{ij} indica también que se trata de un elemento de la matriz **A**. El elemento p_{ij} sería un elemento de una matriz **P**.

La matriz **A** puede indicarse de las siguientes maneras:

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, donde i toma los valores $1, 2, 3, \dots, m$ y j , los valores $1, 2, 3, \dots, n$. y también:

$[a_{ij}]$, $[A]$ o simplemente **A**, cuando estas simplificaciones no den lugar a confusión.

El símbolo $m \times n$ se lee "m por n". Así, 2×3 debe leerse "dos por tres" y no 6, ya que el producto indicado señala que la matriz posee dos filas y tres columnas. El producto mn , 6 en el ejemplo, indica el número de elementos o entradas que tiene la matriz.

Si $m \neq n$, la matriz es una **matriz rectangular** de orden $m \times n$, y cuando $m = n$, la matriz es una **matriz cuadrada** de orden n . Una matriz $[A_{ij}]_{3 \times 5}$, es una matriz rectangular de orden 3×5 , y la matriz $[B_{ij}]_{3 \times 3}$, es de orden 3 por 3, pero se dice simplemente que es una matriz cuadrada de orden 3.

Ejemplo 4

Escribir una matriz rectangular **A**, de orden 3×5 , y otra cuadrada **B** de orden 3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 30 & 105 & 18 \\ 45 & 135 & 165 \\ 60 & 45 & 225 \end{bmatrix}$$

Cuando la matriz es de orden $1 \times n$, se llama también **matriz fila**, por tener una fila y n columnas. Si la matriz es de orden $m \times 1$, se le llama **matriz columna**, por tener m filas y 1 columna.

Ejemplo 5

$[1 \quad -2 \quad 4 \quad 12 \quad -9 \quad 7]$, es una matriz fila de orden 1×6 , y la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es una matriz columna de 5×1 .

Ejemplo 6

La matriz puede tener un solo elemento, así $[5]$, es una matriz de 1×1 , cuyo único elemento es el número 5. ■

Importante: Es importante observar que una matriz no posee un valor numérico, muestra simplemente un arreglo de mn elementos o entradas.

Ejemplo 7

Sea por ejemplo el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{array}{rcl} x - 3y + 3z & = & 1 \\ 4x + 2y & = & 6 \\ 2x + 7y - 5z & = & 4 \end{array}$$

A este sistema de ecuaciones le corresponde la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 7 & -5 & 4 \end{array} \right] \quad \text{o} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 7 & -5 & 4 \end{array} \right]$$

La matriz muestra en forma organizada los 12 números que intervienen en el sistema de ecuaciones¹.

Las dos notaciones son válidas para la matriz aumentada. En el texto utilizaremos muchas veces la segunda, dejando un espacio entre los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes del segundo miembro. Cuando se trabaje a mano, se sugiere usar la raya vertical como referencia. ■

La notación a_{ij} corresponde a Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716)², y será la única utilizada en el texto.

¹ Observe que los coeficientes que aparecen en la última columna de la matriz, corresponden a los términos independientes de las ecuaciones, situados en el segundo miembro.

² Si bien la teoría de las matrices se desarrolla a partir de los trabajos de Arthur Cayley (1821-1895), se atribuye a Leibnitz la notación con dos subíndices, por ser él el primero en escribir: $10 + 11x + 12y = 0$, como notación para una ecuación lineal, que actualmente se escribiría:

$$a_{10} + a_{11}x + a_{12}y = 0.$$

1.4 Las matrices como tablas de doble entrada

Las matrices se utilizan para sistematizar información de carácter general. Por medio de ejemplos ilustraremos cómo organizar matricialmente datos diversos.

Ejemplo 8

Una biblioteca escolar debe comprar libros cuatro veces al año, en los meses de enero, julio, octubre y diciembre, para las asignaturas siguientes: Lengua, Matemática, Historia, Geografía y Lectura, en las cantidades que se indican a continuación:

En el mes de enero:

Lengua	120
Matemática	240
Historia	80
Geografía	50
Lectura	15

En el mes de octubre:

Lengua	10
Matemática	100
Historia	0
Geografía	15
Lectura	45

En el mes de julio:

Lengua	105
Matemática	180
Historia	45
Geografía	32
Lectura	25

En el mes de diciembre:

Lengua	20
Matemática	15
Historia	0
Geografía	0
Lectura	125

La información sobre la biblioteca escolar se puede sistematizar de la siguiente manera:



$$L = \begin{bmatrix} 120 & 240 & 80 & 50 & 15 \\ 105 & 180 & 45 & 32 & 25 \\ 10 & 100 & 0 & 15 & 45 \\ 20 & 15 & 0 & 0 & 125 \end{bmatrix}$$

En la matriz propuesta, las filas representan los meses del año, o sea enero, julio, octubre y diciembre; las columnas representan las asignaturas Lengua, Matemática, Historia, Geografía y libros de Lectura. Los elementos de la matriz L expresan en consecuencia, la cantidad de libros que la biblioteca va a adquirir por especialidad y por mes.

Es interesante observar que este arreglo o disposición de datos nos permitiría determinar, por ejemplo, el número de libros de geografía que se han de comprar en el año, con sólo sumar los elementos de la cuarta columna: $50 + 32 + 15 + 0 = 97$. Igualmente, podríamos determinar el número de libros que se comprarían en un determinado mes, octubre por ejemplo, sumando los elementos de la tercera fila: $10 + 100 + 0 + 15 + 45 = 170$. El número total de libros que se comprarían en esta biblioteca, en el año mostrado, se obtiene sumando todos los elementos, y resultan 1 312 libros. Sin embargo, presentaremos más adelante operaciones que en forma generalizada permitirán obtener este tipo de informaciones a partir de la matriz. ■

Ejemplo 9

"La Tiendecita Azul", una pequeña pastelería, se dedica sólo a elaborar rollos, panes, queques y *pies*. La cantidad de los cinco ingredientes principales se dan en la matriz **A** (se miden en tazas la harina, el azúcar, la mantequilla y la leche).

El costo, en céntimos de nuevo sol (S/.), por cada ingrediente, comprándose al por mayor y al por menor, está dado en la matriz **B**.

$$A = \begin{array}{ccccc} \text{huevos} & \text{harina} & \text{azúcar} & \text{mantequilla} & \text{leche} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 1/4 & 1/4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1/4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{rollo(docena)} \\ \text{pan (pieza)} \\ \text{cake (unidad)} \\ \text{pie (unidad)} \end{array} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{cc} \text{AL POR MAYOR} & \text{AL POR MENOR} \\ \left[\begin{array}{cc} 5 & 5 \\ 8 & 10 \\ 10 & 12 \\ 12 & 15 \\ 5 & 6 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{huevos} \\ \text{harina} \\ \text{azúcar} \\ \text{mantequilla} \\ \text{leche} \end{array} \end{array}$$

- i) Hallar una matriz que represente la comparación de costos al hacer uso de las dos maneras de comprar una unidad de producción.

Suponga que un día un pedido considera 20 docenas de rollos, 200 piezas de pan, 50 queques y 60 *pies*.

- ii) Represente este pedido como una matriz de 1×4 , y usando matrices, encuentre una matriz que muestre las cantidades necesarias para satisfacer el pedido.
- iii) Utilizando matrices determine el costo del pedido, considerando una utilidad del 35% y que al facturar debe considerarse 5% de impuestos.

No daremos aquí respuesta a las preguntas propuestas que se deben resolver por procedimientos matriciales, y no por procedimientos aritméticos, como de hecho podría hacerse. Nos limitaremos por ahora a observar los datos e interpretarlos. Como en el ejemplo anterior, es posible encontrar a partir de los datos de la matriz **A**, los insumos necesarios para producir, por ejemplo una pieza de pan o un *pie*. Igualmente, se observa que no intervienen huevos, azúcar ni leche en el pie (se entiende en la masa). La matriz **B** presenta los datos en forma rápida e inequívoca al lector, que deberá tener en cuenta que los elementos de esta matriz están en céntimos de sol (S/.). ■

Resumiendo, las matrices proporcionan una manera rápida de presentar los datos en un problema por ser simplemente una tabla de doble entrada.

Por otro lado, las matrices pueden ser presentadas por comprensión, es decir proporcionando una fórmula que permita encontrar los elementos de la matriz.

Ejemplo 10

Determinar una matriz **P** de orden 3x5, tal que

$$p_{ij} = \begin{cases} i + j, & i < j \\ 0, & i = j \\ i^2, & i > j \end{cases}$$

La matriz buscada es:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \end{bmatrix}$$

La expresión $i + j$, es aplicable a los elementos $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}, p_{23}, p_{24}, p_{25}, p_{34}$ y p_{35} , por lo tanto estos elementos son: 3, 4, 5, 6, 5, 6, 7 y 8. El valor 0 corresponde a los elementos p_{11}, p_{22} y p_{33} . Finalmente, la expresión i^2 , es aplicable a los elementos p_{21}, p_{31} y p_{32} , y toman respectivamente los valores 4, 9 y 9.

Por lo tanto la matriz **P** es:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 9 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

■

1.5 Igualdad de matrices

1.5.1 Definición

Dos matrices **A** y **B** son iguales, denotado $A = B$, si son idénticas; es decir, si los elementos correspondientes son iguales, las matrices **A** y **B**, son iguales.

$$\therefore A = B \text{ si y sólo si } a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j.$$

En consecuencia, dadas dos matrices del mismo orden, ellas son iguales cuando al superponerlas los elementos son iguales en valor numérico, aunque no necesariamente en forma.

Ejemplo 11

Las matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0,5 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \operatorname{tg} 45^\circ & \sec^2 60^\circ \\ \cos 90^\circ & \operatorname{tg}^2 60^\circ \\ \operatorname{sen} 30^\circ & \sqrt{25} \end{bmatrix}$$

son iguales, por ser ambas de orden 3×2 y tener los elementos correspondientes iguales. ■

En general, dos matrices $[A]_{m \times n}$ y $[B]_{p \times q}$ son iguales si se cumplen las siguientes condiciones:

$$m = p \wedge n = q$$

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j.$$

Ejemplo 12

Si las matrices **A** y **B** son iguales, determinar el valor de las seis incógnitas que figuran en la matriz **B**.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x & m+n \\ y-1 & n+p-m \\ z-2 & p+m-2n \end{bmatrix}$$

Al aplicar la definición de igualdad de matrices $b_{ij} = a_{ij} \quad \forall \quad i, j$, se obtienen las siguientes seis igualdades:

$$\begin{array}{ll} b_{11} = a_{11} & x = 4 \\ b_{12} = a_{12} & m + n = -1 \\ \\ b_{21} = a_{21} & y - 1 = 5 \\ b_{22} = a_{22} & n + p - m = 3 \\ \\ b_{31} = a_{31} & z - 2 = 6 \\ b_{32} = a_{32} & p + m - 2n = 5 \end{array}$$

Resolviendo, se obtiene:

$$\begin{array}{lll} x = 4 & y = 6 & z = 8 \\ m = -0,2 & n = -0,8 & p = 3,6 \end{array}$$



1.5.2 Matrices equidimensionales

Dos matrices $[A]_{m \times n}$ y $[B]_{p \times q}$, que cumplen la primera condición, es decir: $m = p \wedge n = q$, reciben el nombre de matrices equidimensionales, dando a entender que tienen el mismo orden o dimensión. Dos o más matrices que son equidimensionales se dice que pertenecen a un conjunto de matrices denotado $M^{m \times n}$. Entonces podemos escribir:

$$A \in M^{m \times n} \text{ y } B \in M^{m \times n}$$

En general, $M^{m \times n}$ representa un **espacio vectorial matricial** de orden $m \times n$.

Debemos tener en cuenta que no es lo mismo señalar que dos matrices son equidimensionales y decir que tienen el mismo número de elementos.

Ejemplo 13

Dos matrices que tiene cada una 20 elementos, pueden no ser equidimensionales al ser, por ejemplo, una matriz de orden 4×5 y la otra de 5×4 .



1.5.3 Propiedades de la igualdad

Las propiedades de la igualdad de matrices son tres:

- i) **Reflexiva o espejo:** "Toda matriz es igual a sí misma".

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

- ii) **Simétrica:** "Si una matriz es igual a otra, la segunda es igual a la primera".

$$\text{Si } \mathbf{A} = \mathbf{B}, \text{ también } \mathbf{B} = \mathbf{A}$$

- iii) **Transitiva:** "Si una matriz es igual a otra, y ésta es igual a una tercera, entonces la primera es igual a la tercera".

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{C}, \text{ entonces } \mathbf{A} = \mathbf{C}$$

Como se observa las propiedades de la igualdad de matrices tienen los mismos nombres que las propiedades de la igualdad de los números reales, al reducirse la igualdad de matrices a la igualdad de los elementos.

Ejercicios y problemas propuestos

Capítulo 1

1. ¿Cuál es la dimensión de cada una de las siguientes matrices?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} ?$$

2. ¿Cuáles de las siguientes no son matrices?

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 & 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} -17 \end{bmatrix}$$

3. Escriba explícitamente las matrices:

i) $A = [a_{ij}] \in M^{3 \times 2} / a_{ij} = 1 - ij$

ii) $B = [b_{ij}] \in M^{3 \times 3} / b_{ij} = \sin(60i)^\circ + j$

iii) $C = [c_{ij}] \in M^{1 \times 3} / c_{ij} = \max(i, j)$

Donde $\max(i, j)$ es el mayor valor entre i y j . En forma similar se define: $\min(i, j)$, como el menor valor entre i y j .

4. Determinar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} x-y & x+y \\ xy & \frac{y}{x} \end{bmatrix}, \quad \text{si se sabe que } B = C, \quad \text{donde}$$

$$B = \begin{bmatrix} x-2y & 3 \\ xy & y-x \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ y+4 & -4 \end{bmatrix}$$

5. Resolver las ecuaciones:

i) $a_{12} - a_{24} = 0$

ii) $a_{22}a_{33}a_{44} + a_{41} = 0$

iii) $a_{41}a_{24} - 2a_{11}a_{32} = 0$

si se sabe que los coeficientes son elementos de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 1 & 2 \\ x & 0 & 3 & -x \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ 2x & -1 & 3 & x+3 \end{bmatrix}$$

6. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$

Determinar las matrices **M** y **N**, de orden 3×3 , si sus elementos se definen a partir de los elementos de las matrices **A** y **B**, mediante:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= |a_{ij} + b_{ij}| \\ n_{ij} &= 2i - 3(a_{ij} + b_{ij}) \end{aligned}$$

7. Si las matrices **A** y **B** son cuadradas de orden 3, y se definen mediante:

$$a_{ij} = i - j \quad b_{ij} = 2i - j,$$

determinar los elementos que ocupan las mismas entradas y que sean inversos aditivos.

8. Si una matriz $P = [p_{ij}]_{3 \times 2}$, es tal que:

$$p_{ij} = \begin{cases} i - j, & i < j \\ ij, & i = j \\ i + j, & i > j \end{cases}$$

escribir la matriz **P**

9. Una matriz cuadrada **Z** de orden 3, se define de la siguiente manera:

$$z_{ij} = z_{ji}, \text{ cuando } i \neq j$$

$$z_{ij} = 8, \text{ cuando } i = j.$$

Si se conocen los elementos $z_{12} = 2$, $z_{23} = 5$ y $z_{13} = 0$. Escriba la matriz **Z**.

Handwritten work for problem 9:

$$z = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculation for m_{11} :

$$m_{11} = (1)a_{11} + (1)b_{11}$$

Calculation for m_{12} :

$$m_{12} = (1)a_{12} + (2)b_{21}$$

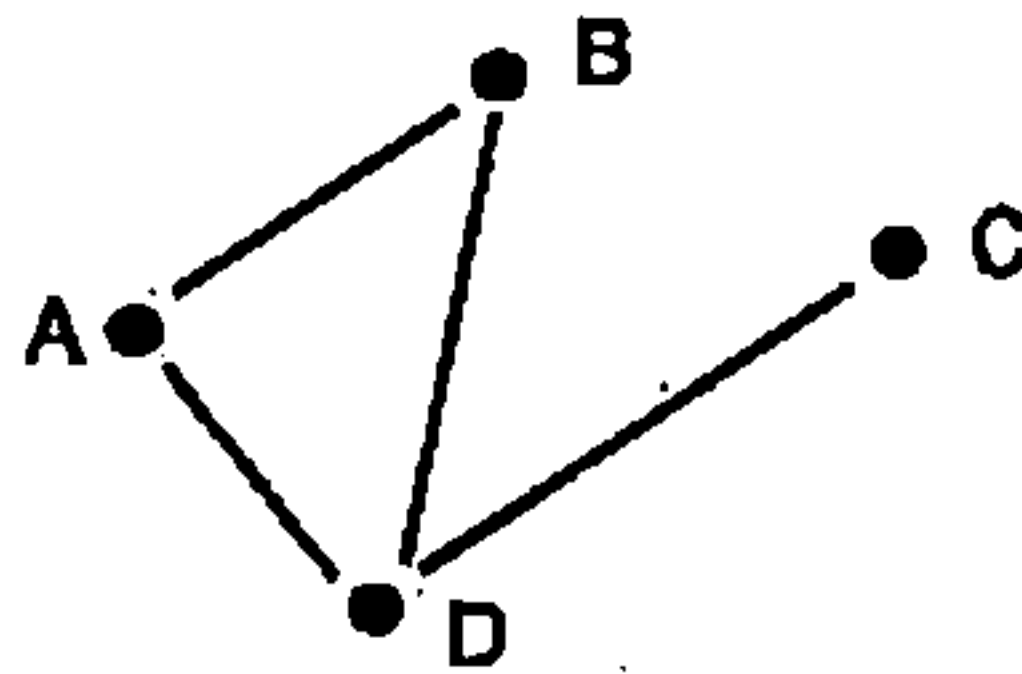
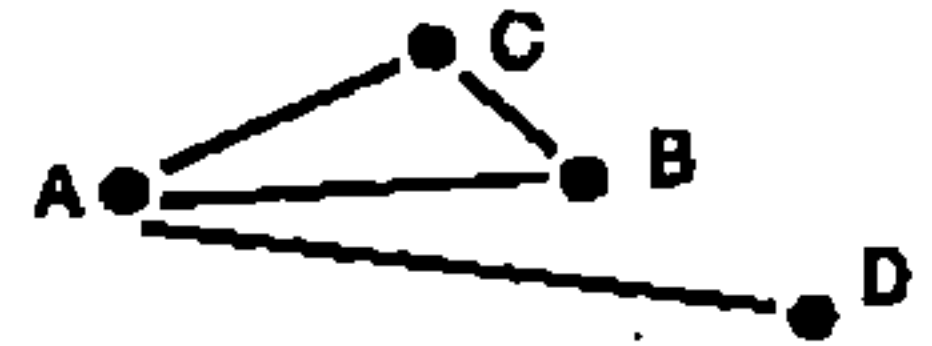
10. Una figura como la mostrada es un grafo que muestra cuatro ciudades A, B, C y D. Las carreteras que las unen se indican con una línea. A partir de un grafo es posible construir una matriz denominada matriz de vértices. Para el caso descrito, tomamos la siguiente convención:

$m_{ij} = 1$, cuando i está unida con j.

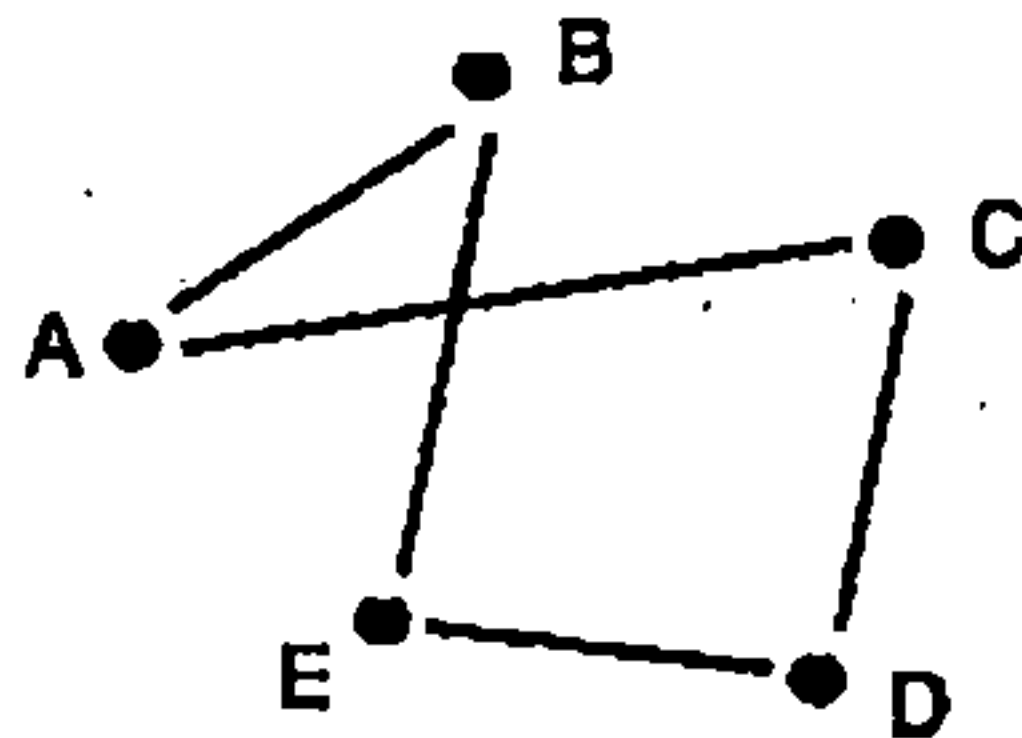
$m_{ij} = 0$, cuando i no está unida con j.

A continuación, algunas preguntas en base al grafo definido:

- a) Construir la matriz de vértices correspondientes al grafo:



- b) Hacer lo mismo para el grafo correspondiente al grafo:



- c) ¿Cómo resulta el grafo para seis ciudades unidas entre sí formando un hexágono, con ciudades consecutivas A, B, C, D, E y F? Escribir además, la matriz de vértices correspondiente.
- d) En el ejercicio 10 c, observe sus respuestas y presente sus comentarios en forma matemática.
- e) Presente los grafos correspondientes a las matrices de vértices mostrados.

OPERACIONES CON MATRICES



2.1 Introducción

Se definen en este capítulo las operaciones de adición de matrices y la multiplicación de una matriz por un escalar, y se proponen las propiedades de estas operaciones. Finalmente se presenta la combinación lineal de matrices. La multiplicación y potenciación de matrices se presentan en el capítulo 3.

2.2 Adición de matrices

2.2.1 Definición

La suma **S** de las matrices $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ es una matriz de la misma dimensión de los sumandos, en la que cada elemento de la suma, es la suma de los elementos correspondientes de **A** y **B**.

Entonces, si $S = A + B$, se cumplirá:

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall \text{ par } i, j.$$

Ejemplo 1

Dadas las matrices **P** y **Q**, calcular **P + Q**:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \\ 3 & -10 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -8 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Como cada elemento de la suma es la suma de los elementos correspondientes de **P** y **Q**, se tiene:

$$P + Q = \begin{bmatrix} 1+2 & 5+4 \\ 2+3 & 8+(-8) \\ 3+(-1) & -10+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Observaciones: (1) Solamente se pueden sumar matrices equidimensionales.
 (2) Cuando dos matrices son del mismo orden o dimensión pueden sumarse y se dice que son **conformes** o **conformables respecto a la adición**.

Ejemplo 2

Las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \end{bmatrix}$, no se pueden sumar por ser

matrices de distinto orden (2×1 y 2×3); es decir, no son conformables con respecto a la adición.

Ejemplo 3

Si elemento a_{ij} de la matriz **A** muestra la cantidad de pasajeros que usan un ómnibus de la ciudad *i* a la ciudad *j*, se definen las matrices $M_{3 \times 5}$ y $J_{3 \times 5}$, que ponen de manifiesto el volumen de tráfico de dos días de la semana, digamos martes y jueves:

$$M = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 10 & 20 & 0 \\ 14 & 20 & 19 & 17 & 0 \\ 1 & 14 & 0 & 14 & 25 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 22 & 11 & 17 & 21 & 0 \\ 13 & 8 & 12 & 15 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 24 & 15 \end{bmatrix}$$

La suma de los pasajeros transportados en los dos días mostrados es:

$$S = \begin{bmatrix} 34 & 26 & 27 & 41 & 0 \\ 27 & 28 & 31 & 32 & 1 \\ 3 & 18 & 3 & 38 & 40 \end{bmatrix}$$

■

2.2.2 Propiedades de la adición

Si **A**, **B** y **C** son matrices de orden $m \times n$ se pueden demostrar dos propiedades de la adición de matrices usando, para los elementos, las propiedades de los números reales.

i) Conmutativa

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

$$\text{Pero } [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n}$$

(Propiedad conmutativa de los números)

En consecuencia:

$$[b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n} = B + A,$$

$$\therefore A + B = B + A$$

L.q.q.d.¹

ii) Asociativa

$$A + (B + C) = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{m \times n}$$

$$\text{Pero } [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{m \times n} = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m \times n}$$

(Propiedad asociativa de los números)

$$\text{y } [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m \times n} = (A + B) + C$$

$$\therefore A + (B + C) = (A + B) + C$$

L.q.q.d.

Observación: Esta última expresión se puede presentar sin los paréntesis, e indicarla lo mismo, es decir:

$$A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C$$

¹

Lo que queríamos demostrar.

2.3 Multiplicación de una matriz por un escalar

2.3.1 Definición

El producto de una matriz A por un escalar λ , se denota λA y se define:

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$$

Es decir, el escalar λ multiplica a todos los elementos de la matriz. Esta operación también se denomina **ponderación de la matriz**.

En consecuencia se tiene:

$$3 \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3d \\ 3b & 3e \\ 3c & 3f \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4

Un padre entrega diariamente propinas a sus hijos Alberto, Bertha, Carmen y David, las siguientes cantidades: 8 soles, 6 soles, 4 soles y un sol, respectivamente. En una semana, de lunes a viernes les da:

$$5 \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5

Los costos en soles de tres libros, se presentan en la matriz C . La primera columna considera los costos de los libros con empaste de lujo y la segunda, con empaste normal:

$$C = \begin{bmatrix} 23,40 & 11,20 \\ 32,80 & 15,00 \\ 52,40 & 28,00 \end{bmatrix}$$

Se pide determinar los precios de venta, si se venden con una ganancia del 15%.

El precio de venta será el precio de costo por 1,15, en consecuencia, si V es la matriz que proporciona el precio de venta, se cumple: $V = 1,15C$

$$V = 1,15C = \begin{bmatrix} 26,91 & 12,88 \\ 37,72 & 17,25 \\ 60,76 & 32,20 \end{bmatrix}$$

■

2.3.2 Propiedades de la multiplicación de una matriz por un escalar

Si A y B son matrices conformes con respecto a la adición, de orden $m \times n$, y α y β , números o escalares cualesquiera, se cumplen cuatro propiedades:

Asociativa con respecto a los escalares

$$\alpha(\beta A) = \alpha[\beta a_{ij}]_{m \times n} = [\alpha \beta a_{ij}]_{m \times n} = \alpha \beta [a_{ij}]_{m \times n} = (\alpha \beta)A$$

$$\therefore \alpha(\beta A) = (\alpha \beta)A$$

L.q.q.d.

Distributiva con respecto a la suma de escalares

$$(\alpha + \beta)A = [(\alpha + \beta)a_{ij}]_{m \times n} = [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}]_{m \times n} = [\alpha a_{ij}]_{m \times n} + [\beta a_{ij}]_{m \times n}$$

$$\therefore (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

L.q.q.d.

Distributiva con respecto a la suma de matrices

$$\alpha(A + B) = \alpha[a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [\alpha(a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n} =$$

$$[\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}]_{m \times n} = [\alpha a_{ij}]_{m \times n} + [\alpha b_{ij}]_{m \times n}$$

$$\therefore \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

L.q.q.d.

Propiedad de la unidad

$$1A = A$$

Observaciones:

1. En la multiplicación de una matriz por un escalar nada impide que el escalar sea la unidad negativa: -1 , entonces se cumple: $(-1)\mathbf{A} = [(-1)a_{ij}]_{m \times n}$

$$\therefore -\mathbf{A} = [(-1)a_{ij}]_{m \times n}$$

La matriz $-\mathbf{A}$ se llama la negativa de $\mathbf{A}$ y funciona como inversa aditiva.

Los elementos de la inversa aditiva de $\mathbf{A}$, son los elementos de la matriz $\mathbf{A}$, con signo cambiado.

2. Lo indicado en la observación 1 nos permite efectuar la diferencia de matrices:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = [a_{ij}]_{m \times n} + [-b_{ij}]_{m \times n}$$

$$\therefore \mathbf{A} - \mathbf{B} = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$$

En la práctica, bastará restar los elementos correspondientes, tal como se muestra en el ejemplo 8.

3. Si se restan dos matrices iguales, se obtiene una matriz que posee sólo ceros. Esta matriz es la matriz nula o cero, que denotaremos $[\mathbf{O}]$

$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = [\mathbf{O}]$$

Es decir, una matriz $\mathbf{N}$ es nula, si $n_{ij} = 0$, para todo par i, j de subíndices. Usamos $[\mathbf{O}]$ en lugar de $\mathbf{O}$ para diferenciarlo del cero escalar, 0.

La matriz nula es la neutra aditiva, ya que satisface:

$$\mathbf{A} + [\mathbf{O}] = \mathbf{A}.$$

4. Si se conocen las matrices equidimensionales $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, y se tiene

$$\mathbf{X} + \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

expresión en la que la matriz $\mathbf{X}$ es desconocida. Con los elementos correspondientes debe cumplirse:

$$x_{ij} + a_{ij} = b_{ij}$$

y también:

$$x_{ij} = b_{ij} - a_{ij}$$

en consecuencia:

$$X = A - B$$

Entonces, $X + A = B$ implica $X = B - A$.

En consecuencia, existe un Álgebra matricial donde es permitida la transposición de sumandos, tal como se hace en el álgebra ordinaria.

Ejemplo 6

La matriz $-A$, es la inversa aditiva de la matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad -A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observemos que los elementos de la matriz $-A$, son iguales y de signo contrario que los elementos de la matriz A .

Ejemplo 7

Las matrices A y $-A$, son matrices cuya suma es evidentemente la matriz nula:

$$A + (-A) = [O]$$

Ejemplo 8

Para efectuar la diferencia de dos matrices, bastará restar elemento a elemento:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \\ 3 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -8 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 5-4 \\ 2-3 & 8-(-8) \\ 3-(-1) & -10-7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 16 \\ 4 & -17 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 9

Dadas las matrices **A** y **B**,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -10 & 11 & 3 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

determinar una matriz **X**, si se sabe que:

$$\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

De la condición, se puede despejar la matriz incógnita **X**, obteniendo:

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$$

∴

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -10 & 11 & 3 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -10 & 10 & 5 \\ -4 & 0 & -7 \\ -1 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 10**

Resolver el sistema de ecuaciones matriciales:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Sumando y restando ordenadamente, se obtienen las incógnitas **A** y **B**:

$$2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 11

Resolver el sistema de ecuaciones matriciales:

$$2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$5\mathbf{A} - 8\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 15 \end{bmatrix}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones matriciales, se procede como en los sistemas de ecuaciones lineales, utilizando los procedimientos de igualación, sustitución o reducción. Si elegimos el procedimiento de reducción, multiplicaremos la primera ecuación por 8, y la segunda, por 3:

$$16\mathbf{A} + 24\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 16 & 56 \\ 40 & 48 \end{bmatrix}$$

$$15\mathbf{A} - 24\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ -9 & 45 \end{bmatrix}$$

al sumar las igualdades, se obtiene:

$$31\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 31 & 62 \\ 31 & 93 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Reemplazando el valor de la matriz **A** en una de las dos ecuaciones del sistema original, se obtiene al despejar:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La comprobación puede realizarse reemplazando las matrices **A** y **B** en la otra ecuación del sistema de ecuaciones. ■

2.4 Combinación lineal de matrices

Dadas varias matrices equidimensionales $\mathbf{A}_i$ y los números α_i , donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$, se define la combinación lineal de las matrices $\mathbf{A}_i$, con coeficientes α_i , a la matriz

$$\mathbf{C} = \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \alpha_3 \mathbf{A}_3 + \dots + \alpha_n \mathbf{A}_n$$

Ejemplo 12

Dados las matrices **A**, **B** y **C** de orden 2x3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

hallar la combinación lineal de las matrices **A**, **B** y **C** con coeficientes 8, -2 y 6, respectivamente.

Si la matriz **P** es la combinación lineal solicitada, se tiene:

$$\mathbf{P} = 8\mathbf{A} + (-2)\mathbf{B} + 6\mathbf{C}$$

Reemplazando, se tiene:

$$\mathbf{P} = 8 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Efectuando convenientemente, se obtiene:

$$P = \begin{bmatrix} 22 & 0 & 44 \\ 0 & 12 & 24 \end{bmatrix}$$

Nota: La operación combinación lineal de matrices resume las operaciones de adición de matrices y la multiplicación por un escalar. Así, la combinación lineal

$$P = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + \dots + a_n A_n$$

se reduce a la suma de dos matrices

$$M = A_1 + A_2,$$

si tomamos $a_1 = a_2 = 1$, y $a_i = 0$, cuando $i \geq 3$.

Y se reduce a la multiplicación o ponderación

$$M = a_1 A_1,$$

cuando $a_1 = 0$, cuando $i \geq 2$.

2.5 Espacio matricial $M^{m \times n}$

Un espacio matricial $M^{m \times n}$, está constituido por todas las matrices de orden $m \times n$, que cumplen las operaciones de adición de matrices y de multiplicación de una matriz por una constante, satisfaciendo las propiedades de cada una de las dos operaciones. Debe tenerse en cuenta que las matrices son en general objetos matemáticos vectoriales, por lo que constituyen un espacio matricial.



Ejercicios y problemas propuestos

Capítulo 2

1. Determinar la suma de las siguientes matrices:

$$(i) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2. La matriz **C**, proporciona los precios de compra por kilogramo de cuatro frutas: naranjas, manzanas, mandarinas y peras, en dos períodos, y la matriz **V**, los precios de venta.

$$C = \begin{bmatrix} 0,42 & 0,93 & 0,45 & 1,12 \\ 0,45 & 0,91 & 0,50 & 1,18 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 0,52 & 0,98 & 0,50 & 1,25 \\ 0,60 & 1,20 & 0,55 & 1,28 \end{bmatrix}$$

Determinar la matriz **U**, que muestre la ganancia por kilogramo de fruta vendida, en los dos períodos.

3. Determinar la suma de los elementos de la segunda fila de la matriz **P**, si se cumple:

$$P + \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 9 & 9 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{determinar}$$

las matrices:

$$(a) A - B \quad (b) A + 3C \quad (c) A + B - 2C \quad (d) 3A + C$$

5. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\alpha = 3$, $\beta = -2$

Comprobar:

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(iii) $\alpha(B - C) = \alpha B - \alpha C$

Además, hallar la matriz X , tal que: $2X + 3A = 5(A + B + C)$

6. Determinar la matriz X , si se cumple:

$$-2 \left[X + \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right] = 3X + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

7. La matriz

$$S = \begin{bmatrix} 14,16 & 16,52 & 11,80 \\ 9,44 & 14,16 & 18,88 \end{bmatrix}$$

muestra los precios de venta de dos artículos en tres expendios. Si se sabe que los artículos tienen un impuesto del 18%, se desea determinar la matriz que represente los precios netos de los artículos:

8. La matriz dada muestra el precio de lista de cuatro automóviles, de las marcas A y B, de dos y cuatro puertas. Determine una matriz que muestre el valor real, a pagar por cada automóvil, si se puede lograr un descuento del 5%, y debe pagarse 18% de impuestos.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2 p & 4 p \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 8200 & 10000 \\ 10400 & 12000 \end{bmatrix} \end{array}$$

9. Se propone la operación matricial $\oplus$, definida como: $A \oplus B = A + 2B$
Determinar la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]$$

10. Hallar las incógnitas x , y , z y w , si se cumple:

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

11. Hallar la combinación lineal de las matrices A , B y C , con coeficientes 2, -3 y 4, respectivamente, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Demostrar que un conjunto de matrices del espacio $M^{2 \times 2}$ son siempre combinación lineal de las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dichas matrices dependen solamente de tres parámetros independientes. Además, escriba la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

como combinación lineal de las matrices

$$3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

3.1 Introducción

Se define en este capítulo la multiplicación de matrices, una operación muy importante en la teoría matricial. Se proponen luego las propiedades de esta operación, en las que encontraremos diferencias sustanciales con el álgebra ordinaria, que deberán ser tomadas en cuenta para entender lo que se denomina Álgebra matricial. El capítulo termina con la potenciación de matrices. Para comprender la multiplicación de matrices, se presenta a continuación el producto escalar de dos vectores.

3.1.1 Producto escalar de dos vectores

La multiplicación de matrices hace uso del producto escalar de dos vectores, concepto importante en el Álgebra Lineal. Presentamos a continuación una breve explicación de esta operación vectorial.

Si tenemos dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, cada uno de n componentes:

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3; \dots; a_n) \quad \text{y} \quad \vec{b} = (b_1; b_2; b_3; \dots; b_n), \text{ se define:}$$

El producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$, de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es la suma de los productos de las componentes correspondientes:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$$

o en forma simbólica: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

Que se lee: Sumatoria desde $i = 1$ hasta $i = n$, de a sub i b sub i .

$$\text{Así: } (1; -3; 4; 7) \cdot (2; 3; -1; 2) = 2 + (-9) + (-4) + 14 = 3$$

Debe observarse que $\vec{a} \cdot \vec{b}$ es un escalar, y no un vector. El punto indica que es producto escalar¹.

3.2 Producto de dos matrices

3.2.1 Introducción

Es posible definir la multiplicación de matrices de diferentes maneras. Por ejemplo, una definición podría ser que el elemento del producto sea igual al producto de los correspondientes en los factores: $p_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. Así, se tendría:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Otra posible definición podría ser: sumar las columnas de cada matriz y multiplicar las correspondientes sumas:

$$\begin{bmatrix} -2 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (-1)(7) + (9)(3) + (4)(0) = 20$$

O, sumar las filas y ejecutar los productos correspondientes:

$$\begin{bmatrix} -2 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (12)(2) + (0)(8) = 24$$

Estos productos son simples desde el punto de vista matricial, tanto en su ejecución como en la notación que correspondería en cada caso. Sin embargo, la multiplicación de matrices es definida matemáticamente de una forma especial que resulta, como se verá posteriormente, de los sistemas de ecuaciones lineales. Por ello, se tiene la definición siguiente.

3.2.2 Definición

Dada una matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y otra $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, el producto AB es una matriz C ,

$$\text{tal que } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \text{ donde el índice } k \text{ varía desde } i \text{ hasta } n.$$

¹ El producto vectorial de dos vectores es un vector y se denota mediante un aspa.

Es decir, c_{ij} es el producto escalar de la fila i de la matriz premultiplicadora **A** por la columna j de la matriz posmultiplicadora **B**.

Veamos un ejemplo numérico, con las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Según la definición, como **A** es una matriz de orden 4x3 y **B** de orden 3x2, el producto **C** = **AB**, será una matriz de orden 4x2.

Para fijar ideas, y entender la definición, observemos el esquema² siguiente, donde las matrices se disponen de tal manera que el elemento del producto quede en la intersección de la fila y columna que lo determinan

$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \underline{a_{31}} & \underline{a_{32}} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix} & \end{array}$$

Así, el elemento o entrada 3 2, denotado c_{32} , es el producto escalar de la tercera fila de la matriz premultiplicadora **A** por la 2^{da} columna de la matriz posmultiplicadora **B**, es decir:

$$c_{32} = [a_{31} \ a_{32} \ a_{33}] \cdot \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix},$$

cuyo valor, al efectuar el producto escalar es

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}.$$

² El esquema que se utiliza fue sugerido por Kurt Eiseman de New York basado en uno similar ideado por S. Falk.

Efectuando los 8 productos escalares, se obtiene:

$$c_{11} = (1)(2) + (2)(5) + (0)(3) = 12$$

$$c_{12} = (1)(1) + (2)(7) + (0)(-2) = 15$$

$$c_{21} = (3)(2) + (2)(5) + (-1)(3) = 13$$

$$c_{22} = (3)(1) + (2)(7) + (-1)(-2) = 19$$

$$c_{31} = (4)(2) + (1)(5) + (5)(3) = 28$$

$$c_{32} = (4)(1) + (1)(7) + (5)(-2) = 1$$

$$c_{41} = (0)(2) + (0)(5) + (1)(3) = 3$$

$$c_{42} = (0)(1) + (0)(7) + (1)(-2) = -2$$

En la práctica los productos se efectúan en borrador o mentalmente, y se colocan en los espacios

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 13 & 19 \\ 28 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Observaciones

- i) El producto **AB** queda definido solamente si el número de columnas de la matriz **A** es igual al número de filas de la matriz **B**, es decir:

$$[A]_{m \times n} [B]_{n \times p} = [AB]_{m \times p}$$

Por ello se dice que:

A premultiplica a la matriz **B**

B está premultiplicada por la matriz **A**

y también que:

B posmultiplica a la matriz **A**

A está posmultiplicada por la matriz **B**

- ii) Puede decirse también que **A** multiplica a la matriz **B** por la izquierda o que **B** multiplica a la matriz **A** por la derecha.

- iii) Es evidente que la conformabilidad del producto lo da la condición:

$$\begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & = & \mathbf{AB} \\ (m \times n) & (n \times p) & & (m \times p) \end{matrix}$$

Cuando dos matrices cumplen la condición, se dice que son **conformes** o **conformables con respecto a la multiplicación**.

Ejemplo 1

Las matrices mostradas determinan seis posibles productos. Encontrar los productos ejecutables.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Los posibles productos, de acuerdo a la teoría de permutaciones son seis³, **AB**, **BA**, **BC**, **CB**, **AC** y **CA**. Para determinar qué productos se pueden ejecutar, construimos una tabla que muestre el número de columnas de la matriz premultiplicadora y el número de filas de la matriz posmultiplicadora en cada caso probable.

Productos matriciales

	AB	BA	BC	CB	AC	CA
# de columnas de la matriz premultiplicadora	3	2	2	2	3	2
# de filas de la matriz posmultiplicadora	3	4	2	3	2	4

Solamente están definidos los productos **AB** y **BC**, por ser matrices conformables respecto de la multiplicación, es decir, productos en los cuales el número de columnas de la matriz premultiplicadora y el número de filas de la matriz posmultiplicadora son iguales. Los productos serían de los órdenes siguientes:

$$\begin{matrix} A & B \\ (4 \times 3) & (3 \times 2) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} B & C \\ (3 \times 2) & (2 \times 2) \end{matrix}$$

En consecuencia, **[AB]** 4x2 y **[BC]** 3x2. Para efectuar los cálculos, usaremos los esquemas siguientes a fin de no tener que repetir la matriz **B**:

$$\begin{matrix} & & [C] \\ & [B] & [BC] \\ [A] & [AB] & \end{matrix}$$

³ El número de permutaciones de n elementos es factorial de n, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$. En este caso con $n = 3$, se tienen $1 \times 2 \times 3 = 6$ posibilidades.

Las matrices buscadas **AB** y **BC**, se obtienen al efectuar los cálculos:

$$\begin{aligned}
 C &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = BC \\
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -10 & 3 \\ 0 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = AB
 \end{aligned}$$

3.2.3 Propiedades del producto de dos matrices

Son tres las propiedades del producto de matrices:

Propiedad asociativa

Si $A_{m \times n}$, $B_{n \times p}$ y $C_{p \times q}$ son tres matrices, se cumple:

$$(AB)C = A(BC) \text{ es una matriz de orden } m \times q$$

Como $(AB)C = A(BC)$, se puede escribir simplemente **ABC**.

Propiedades distributivas

Distributividad por premultiplicación o por la izquierda

$$A(B + C) = AB + AC$$

Distributividad por posmultiplicación o por la derecha

$$(D + E)F = DF + EF$$

Producto por un escalar

Si λ es un escalar y, $A_{m \times n}$ y $B_{n \times p}$, matrices conformables para la multiplicación, se cumple:

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) = (AB)\lambda$$

Observaciones importantes

- i) La multiplicación de matrices no es, por lo general, conmutativa.

Así, si $A_{m \times n}$ y $B_{n \times m}$, se tendría $[AB]_{m \times m}$ y $[BA]_{n \times n}$. Como no son equidimensionales ($m \neq n$), las matrices $[AB]$ y $[BA]$ no pueden ser iguales.

Ejemplo 2

Dadas las matrices $A_{2 \times 4}$ y $B_{4 \times 2}$, se puede ejecutar tanto AB como BA , pero no serán iguales, como es fácil comprobar:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Se tiene que el primer producto, AB , es de orden 2×2 y el segundo, BA , de orden 4×4 , entonces son de diferente orden y el producto de matrices no es conmutativo. ■

Cuando las matrices A y B sean de la misma dimensión, un contraejemplo mostrará igualmente que $AB \neq BA$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = BA$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} = AB$$

- ii) Sin embargo hemos mencionado que la multiplicación de matrices no es por lo general conmutativa, porque en algunos casos ocurre $AB = BA$. Se dice entonces que tales matrices "conmutan una con otra" o también que son Matrices conmutables o permutables.

Ejemplo 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Se observa que las matrices dadas, son conmutables o permutables⁴. ■

Ejemplo 4 Si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \text{ es una matriz, donde } x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

y $B = A + C$, donde un elemento de la matriz C es:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Demostrar que A y B son matrices conmutables o permutables.

Debemos demostrar que $AB = BA$, efectuando directamente las multiplicaciones: Como

$$B = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

efectuaremos AB y BA , teniendo en cuenta la condición dada:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & z & -y \\ -z & 1 & x \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z & -y \\ -z & 1 & x \\ y & -x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2-1 & xy+z & xz-y \\ xy+z & y^2-1 & yz+x \\ xz+y & yz-x & z^2-1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & z & -y \\ -z & 1 & x \\ y & -x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2-1 & xy+z & xz-y \\ xy-z & y^2-1 & yz+x \\ xz+y & yz-x & z^2-1 \end{bmatrix}$$

4

Por facilidad de presentación, se propondrán los productos en esta forma, dejando de lado el esquema de Falk.

Si ocurriera, $AB = -BA$, las matrices se denominan Anticonmutables o antipermutables.

Ejemplo 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 19 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -19 & -7 \end{bmatrix}$$

Como es fácil comprobar: $AB = -BA$, y las matrices son anticonmutables o antipermutables. ■

Tendremos que convenir que, en general, $AB \neq BA$.

∴ El producto de dos matrices, por lo general, no es conmutable.

iii) Si A y B son matrices no nulas, AB puede ser la matriz nula.

Esta observación es muy importante, pues es contraria a lo que ocurre con los números reales. El siguiente ejemplo muestra esta propiedad, que es necesario tener siempre presente.

Ejemplo 6

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, si el producto de dos matrices es cero: $AB = [0]$, no implica necesariamente que cada factor sea cero, es decir que $A = [0]$ o que $B = [0]$ ■

iv) La igualdad $AP = AQ$, no implica necesariamente que las matrices P y Q sean iguales.

Esta observación es consecuencia de la anterior:

$$AP = AQ \Rightarrow AP - AQ = [0]$$

Por la propiedad distributiva, se cumple: $A(P - Q) = [0]$,

de donde la matriz $P - Q$ puede ser diferente de la matriz cero y en consecuencia $P \neq Q$.

Ejemplo 7

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} & Q &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\
 A &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & -19 & -9 \\ 17 & 26 & 13 \\ -14 & -24 & -10 \end{bmatrix} = AP & \begin{bmatrix} -12 & -19 & -9 \\ 17 & 26 & 13 \\ -14 & -24 & -10 \end{bmatrix} = AQ
 \end{aligned}$$

este ejercicio es un contraejemplo que prueba que $AP = AQ$, sin ser iguales las matrices P y Q . El lector debe darse cuenta de que se ha evitado repetir la matriz A para efectuar el producto AQ . ■

No podemos pues, por lo general, eliminar la matriz A de la igualdad $AP = AQ$, aún cuando sea $P \neq Q$. Hay, sin embargo, casos en los que tal simplificación sí es posible, como veremos oportunamente.

Las cuatro observaciones presentadas muestran las diferencias fundamentales del Álgebra matricial con respecto al álgebra ordinaria, que conviene tener muy presentes al operar con matrices.

En el álgebra ordinaria, cuando se necesita resolver una ecuación, ésta se factoriza y se iguala a cero cada factor. Al tener en matrices que $AB = [0]$, no implica necesariamente $A = [0]$ ó $B = [0]$, se tiene un problema que deberá ser resuelto de una manera diferente al álgebra ordinaria, que igualmente veremos más adelante.

3.3 Esquemas de multiplicación

3.3.1 Introducción

Uno de los problemas que presenta las operaciones con matrices, es la dificultad de tener que transcribirlas varias veces, con el consiguiente riesgo de cometer errores de traslado. El objetivo de esta sección es hacer notar que es posible evitar muchas veces el tener que reescribir una matriz más de una vez, si se toman en cuenta las indicaciones que se proponen. Para ello describiremos dos esquemas, que llamamos horizontal y vertical. Adicionalmente presentaremos otros esquemas que buscan que cada alumno, al tener que efectuar multiplicaciones de matrices, analice cada caso particular a fin de ahorrarse tiempo y sobre todo evitar cometer errores de traslado.

Presentemos como ejemplo, el tener que efectuar el producto matricial **ABCDE**, donde las matrices son

$$A_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, D_{1 \times 5} = [1 \ 0 \ 1 \ -2 \ 3] \text{ y}$$

$$E_{5 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es evidente que el resultado será una matriz de orden:

$$(3 \times 4)(4 \times 3)(3 \times 1)(1 \times 5)(5 \times 4) \Rightarrow 3 \times 4.$$

Para efectuar este producto, podemos elegir uno de los dos esquemas, teniendo en cuenta el espacio de que se disponga, y la comodidad de ejecución. Por ambos caminos se llegará al mismo resultado.

3.3.2 Esquema horizontal

El esquema horizontal se deberá escoger cuando se dispone de suficiente espacio horizontal o se use el papel en forma "apaisado". Este esquema, para el producto de matrices **ABCDE**, es de la forma:

$$\begin{array}{ccccccc} [B] & [C] & [D] & [E] & & & \\ [A][AB] & [ABC] & [ABCD] & [ABCDE] & & & \end{array}$$

Se efectúa primero el producto **[AB]**; luego el producto **(AB)C**, obteniéndose la matriz **[ABC]**; luego se efectúa **(ABC)D**, logrando la matriz **[ABCD]**, y por último **(ABCD)E**, que permite encontrar la matriz **[ABCDE]**.

Los cálculos serían:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 1 \ -2 \ 3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & 4 & -6 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -46 & -34 & 2 \\ -3 & -23 & -17 & 1 \\ 9 & 69 & 51 & -3 \end{bmatrix},$$

en consecuencia el producto es la matriz $ABCDE_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} -6 & -46 & -34 & 2 \\ -3 & -23 & -17 & 1 \\ 9 & 69 & 51 & -3 \end{bmatrix}$.

3.3.3 Esquema vertical

El esquema vertical se usa cuando se dispone de una hoja de trabajo vertical, efectuando el cálculo de $ABCDE$, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} & [& E &] \\ [D] [& DE &] \\ [C] [& CDE &] \\ [B] [& BCDE &] \\ [A] [& ABCDE &] \end{array}$$

Ejemplo 8

Una tienda especializada vende paquetes de un kilogramo de una mezcla de nueces, avellanas y maní. Ofrece dos tipos de mezcla, mostradas en la siguiente matriz

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{nuec.} & \text{avell.} & \text{maní} \end{array} \\ \text{Mezclas} \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Las entradas de las filas muestran, en tanto por ciento, los contenidos de los tres insumos para los dos tipos de mezclas A y B. Si un día la tienda vende 10 bolsas de la mezcla A y 20 de la mezcla B, obtendremos la cantidad de insumos necesarios premultiplicando la matriz de mezclas M por la matriz fila $[10 \ 20]$:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} \text{nuec.} & \text{avell.} & \text{maní} \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} \\ [10 \ 20] & \begin{bmatrix} 11 & 9 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

Del resultado se tiene que por día se empaquetan: 11 kg. de nueces, 9 kg. de avellanas y 10 kg. de maní.

Si adicionalmente suponemos que en una semana se venden bolsas de las mezclas A y B, según la siguiente matriz de cantidades C

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 10 & 10 \\ 0 & 20 \\ 0 & 30 \\ 20 & 40 \\ 20 & 60 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{lunes} \\ \text{martes} \\ \text{miércoles} \\ \text{jueves} \\ \text{viernes} \\ \text{sábado} \\ \text{domingo} \end{matrix}$$

El producto matricial **CM**, proporcionará las cantidades de cada tipo de insumos necesarios por día

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 10 & 10 \\ 0 & 20 \\ 0 & 30 \\ 20 & 40 \\ 20 & 60 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 9 & 10 \\ 8 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \\ 9 & 9 & 12 \\ 22 & 18 & 20 \\ 28 & 24 & 28 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{lunes} \\ \text{martes} \\ \text{miércoles} \\ \text{jueves} \\ \text{viernes} \\ \text{sábado} \\ \text{domingo} \end{matrix}$$

Si ahora quisiéramos averiguar cuántos kilogramos de cada insumo se han usado en la semana mostrada, debemos premultiplicar la matriz **CM** por la matriz **S** = [1 1 1 1 1 1 1]. La matriz **S** = [1 1 1 1 1 1 1] permite sumar las columnas de la matriz **CM**.

$$S = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 11 & 9 & 10 \\ 8 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \\ 9 & 9 & 12 \\ 22 & 18 & 20 \\ 28 & 24 & 28 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 87 & 75 & 88 \end{bmatrix}$$

Observación: Si se quisiera sumar las filas de una matriz, ésta se debe posmultiplicar por una matriz columna formada sólo por unos.

El ejemplo explicado se puede desarrollar utilizando el esquema vertical:

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 10 & 10 \\ 0 & 20 \\ 0 & 30 \\ 20 & 40 \\ 20 & 60 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 9 & 10 \\ 8 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \\ 9 & 9 & 12 \\ 22 & 18 & 20 \\ 28 & 24 & 28 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\
 S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 87 & 75 & 88 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

3.3.4 Otros esquemas

El ingenio y habilidad del alumno le permitirán esbozar los esquemas necesarios a fin de evitar cometer errores de copiado. En lo presentado anteriormente, se ha hecho uso de varios esquemas diferentes a los llamados horizontal y vertical.

Así, en el ejemplo 1 del presente capítulo se hizo uso del esquema:

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} \mathbf{C} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{BC} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{AB} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

que evita copiar dos veces la matriz **B**. Este esquema es más simple que utilizar:

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{AB} \end{bmatrix}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} \mathbf{C} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{BC} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Igualmente, en el ejemplo 6 se hizo uso del esquema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{AQ} \end{bmatrix},$$

que evita copiar dos veces la matriz **A**. Este esquema es más simple que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{AQ} \end{bmatrix}$$

3.4 Verificación de la multiplicación

Los errores de multiplicación son mayormente aritméticos. Una manera de evitarlos es utilizar una fila o una columna adicional como comprobación. Estos procedimientos se explican en las siguientes secciones, y constituyen una manera muy eficaz de llegar a soluciones sin errores.

3.4.1 Verificación por premultiplicación

Sea la matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ y $\mathbf{Z}_F$ una matriz fila de elementos unidad, conformada para premultiplicar a la matriz **A**:

$$\mathbf{Z}_F = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]_{1 \times m}$$

con lo que

$$\begin{matrix} [\mathbf{Z}_F] [\mathbf{A}] = [\mathbf{P}] \\ (1 \times m) (m \times n) (1 \times n) \end{matrix}$$

El producto **P**, es una matriz fila de orden $1 \times n$, cuyos elementos serán las sumas de las columnas de la matriz **A**.

Así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 8 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

donde observamos que

$$\begin{array}{ll} 2 + 2 + 5 = 9 & 5 + 2 + 1 = 8 \\ 3 + 5 + 2 = 10 & 1 + 2 + 4 = 7 \end{array}$$

Suponiendo que se quiera comprobar la multiplicación $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, y que $\mathbf{Z}_F$ sea una matriz fila conformada para la premultiplicación de ambos miembros de esta igualdad:

$$\mathbf{Z}_F \mathbf{AB} = \mathbf{Z}_F \mathbf{C}$$

o sea:

$$(\mathbf{Z}_F \mathbf{A}) \mathbf{B} = (\mathbf{Z}_F \mathbf{C})$$

expresión matricial que nos indica que, si la matriz fila $(\mathbf{Z}_F \mathbf{A})$, cuyos elementos son las sumas de las columnas de $\mathbf{A}$, premultiplica a la matriz $\mathbf{B}$, el producto es una matriz fila cuyos elementos son la suma de los elementos de las columnas de la matriz $\mathbf{C}$, que puede ser usado para comprobar el producto $\mathbf{AB}$.

El procedimiento para comprobar por premultiplicación un producto $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, es el siguiente: Se agrega a la matriz $\mathbf{A}$ una fila, formada por las sumas de las columnas de $\mathbf{A}$. Se procede luego a efectuar la multiplicación de la matriz $\mathbf{A}$, con la orla descrita, por la matriz $\mathbf{B}$. El resultado será el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ con una fila adicional, fila cuyos elementos deben ser las sumas de los elementos de las columnas de la matriz $\mathbf{C}$.

Ejemplo 9

El esquema que usaremos es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{AB} \\ \mathbf{Z}_F \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 4 & 18 \\ 6 & 11 & -21 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 17 & -18 & 15 \end{bmatrix}$$

3.4.2 Verificación por posmultiplicación

Sea la matriz $A_{m \times n}$ y Z_c una matriz columna de elementos unidad, conformada para posmultiplicar a la matriz A :

$$Z_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

con lo que

$$\begin{matrix} [A] [Z_c] = [Q] \\ (m \times n)(n \times 1) \quad (m \times 1) \end{matrix}$$

El producto Q , es una matriz columna de orden $m \times 1$, cuyos elementos serán las sumas de las filas de la matriz A . Así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

donde observamos que

$$\begin{aligned} 1 + 5 + 3 + 1 &= 10 \\ 2 + 2 + 5 + 2 &= 11 \\ 5 + 1 + 2 + 4 &= 12 \end{aligned}$$

Suponiendo que se quiera comprobar la multiplicación $AB = C$, y que Z_c sea una matriz fila conformada para la posmultiplicación de ambos miembros de esta igualdad:

$$ABZ_c = CZ_c$$

o sea:

$$A(BZ_c) = (CZ_c)$$

expresión matricial que nos indica que, si la matriz columna (BZ_c) , cuyos elementos son las sumas de las filas de B , posmultiplica a la matriz A , el producto es una matriz columna cuyos elementos son la suma de los elementos de las filas de la matriz C , que puede ser usado igualmente para comprobar el producto AB .

El procedimiento para comprobar por posmultiplicación un producto $AB = C$, es el siguiente: Se agrega a la matriz B una columna, formada por las sumas de las filas de B . Se procede luego a efectuar la multiplicación de la matriz A por la matriz B , con la orla descrita. El resultado será el producto con una columna adicional, columna cuyos elementos deben ser las sumas de los elementos de las filas de la matriz C .

Ejemplo 10

El esquema que usaremos es

$$\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_c \\ (AB)Z_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 4 & 18 \\ 6 & 11 & -21 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 31 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Observación:

Si la comprobación falla, es probable que exista un error en una de las filas. Sin embargo, el hecho de que se comprueben todas las sumas podría deberse a una compensación por un doble error en una misma fila. Cuando ello ocurre, es evidente que el operador no notará su error por ninguna de las dos comprobaciones presentadas. Una manera de detectar el error es efectuar una doble verificación, que se mostrará en la siguiente sección.

Ejemplo 11

Presentamos a continuación un desarrollo completo de un producto matricial de cuatro factores, usando para ello el esquema de Falk, con una verificación por filas, el producto de las matrices indicadas es $P = ABCD$.

Antes de efectuar el producto de las matrices CD se han calculado las sumas 4, 5, 1, de las filas del matriz D , que aparecen como columna adicional a la matriz D .

Al efectuar el producto CD se efectúa también el producto de la matriz C por la matriz columna de elementos 4, 5, 1, obteniéndose la matriz columna de elementos 8, 9, 6, 5, 4.

Sumando los elementos de las filas de la matriz CD , se observa que son justamente 8, 9, 6, 5, 4, comprobándose así que no existen errores al efectuar el producto CD . Se procede de igual manera en los demás productos.

Debe observarse que la suma de los elementos de la última columna de verificación, es la suma de todos los elementos del producto $P = ABCD$.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 & 4 & 14 \\ 10 & 3 & 16 & 6 & 23 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 \\ 58 \\ 14 \\ 22 \end{bmatrix}$$

El producto $P = ABCD$, es la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 & 4 & 14 \\ 10 & 3 & 16 & 6 & 23 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

3.4.3 Doble verificación

Si se quisiera, se puede efectuar una doble verificación del producto $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, de la siguiente manera. Utilizando las notaciones de las secciones previas, se cumple:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_C \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{AB})\mathbf{Z}_C \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_F(\mathbf{AB}) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 12

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \\ 20 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 18 & 11 \end{bmatrix}$$

Observaciones:

- i) Si existiera un error en una de las entradas del producto, éste se reconocerá por ser la intersección de una fila y una columna en las que no concuerdan las sumas. Así por ejemplo, si se pusiera -2 en lugar de -1 , se encontraría que la suma de la tercera columna sería 10 y no 11, y la suma en la segunda fila sería 0 y no 1. Por lo tanto, el error está en la entrada de la segunda fila y tercera columna.
- ii) Es interesante observar que el producto escalar de $\mathbf{Z}_F$ por $\mathbf{Z}_C$ proporciona, en el caso del ejemplo presentado, la suma de todos los elementos del producto matricial $\mathbf{AB}$: $(1)(6) + (4)(7) = 34$, que es igual a: $5 + 8 + 11$, y también a la suma: $13 + 1 + 20$.

3.5 Potenciación de matrices

3.5.1 Introducción

En este capítulo de multiplicación se presenta esta sección dedicada a la potenciación de matrices como un producto reiterado, porque nos permitirá aplicar extensamente los esquemas de multiplicación descritos en secciones previas.

3.5.2 Definición

Para una matriz cuadrada A , se define la potencia natural k , como el producto de k matrices iguales a A . Es decir:

$$A^k \equiv \underbrace{AAA \dots}_{(k \text{ veces})}$$

Ejemplo 13

Calcular la quinta potencia de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Es posible efectuar el cálculo efectuando el producto reiterado, utilizando el siguiente esquema horizontal:

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^5 \end{bmatrix}$$

Efectuando los cálculos, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -5 & -5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & -10 & -11 \\ -10 & 11 & 11 \\ -11 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$



Ejemplo 14

Es posible desarrollar el ejercicio anterior, teniendo en cuenta el siguiente desarrollo matricial: $A^5 = AAAAA = (AA)(AA)A = (A^2)(A^2)A = (A^2)^2A$. Su desarrollo utilizando un esquema horizontal, es:

$$\begin{bmatrix} A & A^2 & A \\ A & A^2 & A^4 & A^5 \end{bmatrix}$$

El álgebra matricial, nos permite igualmente escribir:

$$A^5 = AAAAA = A(AA)(AA) = \underline{A(A^2)(A^2)}$$



que es posible calcular haciendo uso del esquema vertical:

$$\begin{bmatrix} A \\ A & A^2 \\ A^2 & A^4 \\ A & A^5 \end{bmatrix}$$

Se deja como ejercicio, usando la matriz dada en el ejercicio anterior u otra cuadrada cualquiera, la utilización de los esquemas señalados para calcular potencias de matrices en forma simplificada mostrada en el ejercicio 14.

Ejemplo 15

Si

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}, \text{ determinar las matrices } A^2, B^4 \text{ y } A^3B^4.$$

Efectuaremos, usando el esquema horizontal y con la verificación correspondiente, las matrices A^3 y B^4 , para luego efectuar el producto A^3B^4 . El primer producto solicitado A^2 , es parte del cálculo de A^3 .

Cálculo de A^3 :

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 12 & -15 & -18 \\ -12 & 18 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & -9 & -22 \\ -36 & 63 & 42 \\ 24 & -54 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^3$$

Cálculo de B^4 : Se calculará inicialmente B^2 y luego B^4 se calcula efectuando B^2B^2 .

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix} \quad B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$B^4 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 22 & -8 \\ 10 & 16 & -6 \\ 18 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 13 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 15 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 46 & 46 & -16 \end{bmatrix}$$

Finalmente, efectuamos el producto A^3B^4 :

$$A^3 = \begin{bmatrix} 12 & -9 & -22 \\ -36 & 63 & 42 \\ 24 & -54 & -20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^4 = \begin{bmatrix} 18 & 22 & -8 \\ 10 & 16 & -6 \\ 18 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3B^4 = \begin{bmatrix} -270 & -56 & 2 \\ 738 & 552 & -174 \\ -468 & -496 & 172 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las respuestas al ejercicio son:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 12 & -15 & -18 \\ -12 & 18 & 16 \end{bmatrix} \quad B^4 = \begin{bmatrix} 18 & 22 & -8 \\ 10 & 16 & -6 \\ 18 & 8 & -2 \end{bmatrix} \quad A^3B^4 = \begin{bmatrix} -270 & -56 & 2 \\ 738 & 552 & -174 \\ -468 & -496 & 172 \end{bmatrix}$$

3.5.3 Propiedades de la potenciación

Si **A** y **B** son matrices cuadradas, y **m** y **n** son números naturales, se cumple:

$$i) \quad A^m A^n = A^{m+n}$$

$$ii) \quad A^m B^m = (AB)^m$$

Es decir, se cumplen las reglas de exponentes del Álgebra ordinaria. Utilizando los esquemas de multiplicación las demostraciones son simples, y se dejan como ejercicio.

3.5.4 Matriz idempotente

Una matriz cuadrada es idempotente (de **ídem**, igual y **potente**, potencia) cuando se verifica:

$$A^2 = A$$

Es decir, toda potencia de la matriz **A** es **A**. En consecuencia, se cumple el esquema siguiente:

$$\begin{array}{cccc} [A] & [A] & [A] & [A] \dots \\ [A] & [A] & [A] & [A] \dots \end{array}$$

Observación:

En los números reales existe solamente un número que es idempotente, el número 1. En un espacio matricial existe un sinnúmero de matrices que son idempotentes, pero existe una matriz en particular llamada identidad o unitaria, que es idempotente y, cumple como veremos más adelante, las veces de la unidad en dicho espacio matricial. La matriz identidad o unitaria tiene la siguiente forma general:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 16

Comprobar que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix},$$

es idempotente.

En efecto, se cumple $A^2 = A$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 17

Determinar la décima potencia de la matriz A del ejercicio anterior.

Como se ha comprobado que la matriz A es una matriz idempotente, toda potencia de la matriz A es ella misma. Por lo tanto: $A^{10} = A$.

3.5.5 Matriz periódica

Una matriz cuadrada A es periódica, si se cumple:

$$A^{k+1} = A$$

donde k es el menor entero que verifica la expresión.

Para comprender la definición, así como el razonamiento para determinar el período de una matriz, propongamos en el siguiente ejercicio, un caso práctico.

Ejemplo 18

Analizar el hecho de que una matriz A , sea periódica de período 4.

Si A es periódica de período 4, debe cumplirse:

$$A^{4+1} = A \Rightarrow A^5 = A$$

Usaremos un esquema horizontal para interpretar la condición:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 [A] & [A] & [A] & [A] & [A] & [A] & [A] & [A] & [A] & [A] & [A] & [A] & [A] \\
 [A] & [B] & [C] & [D] & [A] & [B] & [C] & [D] & [A] & [B] & [C] & [D] & [A] \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 A^2 & A^3 & A^4 & A^5 & A^6 & A^7 & A^8 & A^9 & A^{10} & A^{11} & A^{12} & A^{13}
 \end{array}$$

Si ordenamos las potencias en grupos de cuatro ($k = 4$), se tiene:

$$\begin{array}{llll}
 A = A & A^5 = A & A^9 = A & A^{13} = A \\
 A^2 = B & A^6 = B & A^{10} = B & A^{14} = B \\
 A^3 = C & A^7 = C & A^{11} = C & A^{15} = C \\
 A^4 = D & A^8 = D & A^{12} = D & A^{16} = D
 \end{array}$$

Debemos observar que $A^5 = A$, $A^9 = A$, $A^{13} = A$, y muchas otras potencias de la matriz A son iguales a la matriz A , pero el período es el menor valor entero positivo de dichas potencias que verifica la igualdad: $A^{k+1} = A$. El valor del período es ese valor de k justamente, valor que indica además que son solamente k las diferentes matrices para toda potencia de la matriz A . En este caso, puede generalizarse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll}
 A^{mk+1} & = A \\
 A^{mk+2} & = B \\
 A^{mk+3} & = C \\
 A^{mk} & = D
 \end{array}$$

Son entonces A , B , C , y D , las cuatro únicas matrices que pueden ser respuesta de una potencia cualquiera de la matriz A (para el caso de ser periódica de período 4). Así, si se pidiera calcular A^{127} , por ser $127 \equiv 3 \pmod{4}$, múltiplo de 4 más tres, se tiene: $A^{127} = C$.

Ejemplo 19

Comprobar que la matriz

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

es periódica y calcular Q^{1002} .

POTENCIACIÓN DE MATRICES

55

Debemos calcular, sin cometer errores, las sucesivas potencias de la matriz Q , hasta encontrar $Q^{k+1} = Q$.

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = Q^2 Q = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Como resulta $Q^3 = Q$, se tiene : $k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2$. La matriz es periódica de período 2. Es evidente que se cumplirá:

$$\begin{array}{cccc} [Q] & [Q] & [Q] & [Q] \\ [Q] & [P] & [Q] & [P] & [Q] \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Q^2 & Q^3 & Q^4 & Q^5 \end{array}$$

Se observa que son solamente dos las posibles respuestas: $P = Q^2$, si la potencia es par y Q , si la potencia es impar. Como se pide Q^{1002} , la respuesta es P .

$$P = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

3.5.6 Matriz nulipotente

Una matriz cuadrada A es nulipotente⁵, si se cumple:

$$A^p = [O]$$

donde p es el menor entero que verifica la expresión. El entero p es el índice de nulipotencia.

⁵

Nulipotente, potencia nula. En algunos textos se utiliza el término nilpotente.

Ejemplo 20

Analizar la situación de una matriz nulipotente A de índice 5.

Según la definición, se debe cumplir:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 [A] & [A] & [A] & [A] & [A] & [A] & [A] & [A] & [A] \\
 [A] & [B] & [C] & [D] & [O] & [O] & [O] & [O] & [O] \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 A^2 & A^3 & A^4 & A^5 & A^6 & A^7 & A^8 & A^9 & A^{10}
 \end{array}$$

Como es evidente, todas las potencias de la matriz A , a partir de la potencia quinta es la matriz nula. ■

Ejercicios y problemas propuestos

Capítulo 3

1 Efectuar los productos matriciales siguientes:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \ 5 \ -3 \ 0] \quad \text{c) } \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } [1 \ 2 \ -3 \ 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{f) } [1 \ 6] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{g) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{h) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2 \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Con las matrices dadas, calcular los productos $A(BC)$ y $(AB)C$, comprobando que: $A(BC) = (AB)C$, es decir que se verifica la propiedad asociativa del producto.

$$3 \quad \text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcular, si es posible;

$$\begin{array}{lll} \text{a) } A(B + C) & \text{b) } AB + AC & \text{c) } (AB)C \\ \text{d) } A(BC) & \text{e) } (A - B)C & \text{f) } AC - BC \end{array}$$

4 Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{2 \times 1}, C = [1 \ 0]_{1 \times 2} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 5}$$

calcular la matriz $ABCD$, utilizando los esquemas horizontal y vertical. En cada caso, use el criterio de verificación correspondiente.

5 Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} \frac{20}{7} & -6 \\ \frac{20}{7} & -6 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Calcular la matriz **ABCD**, identificando el esquema, horizontal o vertical, que permita efectuar el producto evitando trabajar con fracciones.

- 6 Sea una matriz tal que $[a_{ij}]_{m \times n}$. Si los productos **AB** y **BA** están definidos, determinar el orden de la matriz **B**.

- 7 Dadas las matrices cuadradas **A**, **B**, **C** y **D**, y considerando la conformabilidad de las operaciones:

- a) Comprobar $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{AC} + \mathbf{AD} + \mathbf{BC} + \mathbf{BD}$
 b) Si las matrices no son cuadradas, determine las condiciones de conformabilidad generales.

- 8 Verificar las siguientes identidades matriciales:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{AB} + \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^3 = \mathbf{A}^3 + \mathbf{ABA} + \mathbf{BA}^2 + \mathbf{B}^2\mathbf{A} + \mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{AB}^2 + \mathbf{BAB} + \mathbf{B}^3$$

- 9 Escriba las ecuaciones matriciales siguientes como un sistema de ecuaciones lineales

$$\text{i) } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 9 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 17 \end{bmatrix}$$

- 10 Escriba las funciones siguientes en forma matricial:

$$x_1 = y_1 + 2y_2 - y_4$$

$$x_2 = y_1 + y_2 - y_3$$

$$x_3 = 2y_1 - y_2 + y_3$$

- 11 En el espacio M^2 , se define la operación $\mathbf{A} \# \mathbf{B} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$.
 Determinar $\mathbf{A} \# \mathbf{B}$, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Además, si

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

compruebe las siguientes expresiones:

$$\text{i) } \mathbf{A} \# (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \# \mathbf{B} + \mathbf{A} \# \mathbf{C}$$

$$\text{ii) } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \# \mathbf{C} = \mathbf{A} \# \mathbf{C} + \mathbf{B} \# \mathbf{C}$$

$$\text{iii) } (\mathbf{A} \# \mathbf{B}) \# \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \# (\mathbf{B} \# \mathbf{C})$$

12 Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Comprobar que las matrices son permutables dos a dos, dando como resultado la tercera matriz.

13 Dadas las matrices **A** y **B**, determinar las condiciones por las cuales se cumple:

- i) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- ii) $(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B)$

14 Demostrar que si las matrices **A** y **B** son permutables o conmutables, se verifica:

- i) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- ii) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$
- iii) $(A + B)^n = A^n + \frac{n}{1}A^{n-1}B + \dots + B^n$

15 Determinar todas las matrices que conmutan con la matriz cuadrada **A** de orden 4, que tiene nulos todos sus elementos, excepto: $a_{12} = a_{23} = a_{34} = 1$.

16 Calcular las matrices

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3 \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^5$$

17 Demostrar, por inducción matemática⁶, las siguientes igualdades:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\operatorname{sen} n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

$$\text{c) Si } A = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\operatorname{sen} 2\theta & \operatorname{sen}^2 \theta \\ \operatorname{sen} \theta \cos \theta & \cos 2\theta & -\operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \operatorname{sen}^2 \theta & \operatorname{sen} 2\theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$\text{entonces } A^n = \begin{bmatrix} \cos^2 n\theta & -\operatorname{sen} 2n\theta & \operatorname{sen}^2 n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta \cos n\theta & \cos 2n\theta & -\operatorname{sen} n\theta \cos n\theta \\ \operatorname{sen}^2 n\theta & \operatorname{sen} 2n\theta & \cos^2 n\theta \end{bmatrix}$$

⁶ Se puede comprobar, por demostraciones directas, la validez de las expresiones para $n = 1, 2, 3, \dots$. Luego aceptar que es válida para n , y verificar que se verifica para $n + 1$.

- 18 Demostrar que las matrices

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 \text{ y } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^5,$$

dan como resultado una matriz **A**, cuya entrada general es:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

- 19 Hallar la suma de todos los elementos de la matriz $\mathbf{A}^5$, si **A** es una matriz triangular superior de orden 3, cuyos elementos que no son nulos son iguales a la unidad.

- 20 Comprobar que las matrices

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

son idempotentes.

- 21 Demostrar que una condición necesaria para que una matriz **A** de 2x2 sea idempotente, es que la suma de los elementos a_{11} y a_{22} , sea igual a la unidad.

- 22 Dadas las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

comprobar que ellas son idempotentes y permutables o conmutables, siendo además el producto nulo.

- 23 Comprobar que es idempotente la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- 24 Comprobar que las siguientes matrices son periódicas, y determinar su período.

$$\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 25 Demostrar que las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -43 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

son periódicas, y determinar su período.

- 26 Determinar el orden de nulipotencia de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

- 27 Determinar A^{12} , si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

- 28 Dada la matriz A ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

determinar: $P = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$.

- 29 Demostrar que las matrices A y B , son conmutables:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2,5 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 7,62 & 105 & 9 \\ 9 & 7,62 & 105 \\ 105 & 9 & 7,62 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 7,5 & 6,1 & 2,3 \\ 2,3 & 7,5 & 6,1 \\ 6,1 & 2,3 & 7,5 \end{bmatrix}$$

30. Compruebe que si **A** y **B** son matrices cuya suma y producto están definidos, entonces las matrices **A** y **B** son cuadradas.
31. Si se pueden calcular los productos **AB** y **BC**, ¿será posible calcular siempre el producto **ABC**?
32. Una matriz de probabilidad es una matriz generalmente cuadrada con dos características:

- * Todas sus entradas son no negativas (≥ 0).
- * La suma de las entradas de cada fila es igual a la unidad.

- a) Señale qué matrices no son matrices de probabilidad, indicando en cada caso, qué característica no cumple.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$$

- b) Compruebe que siendo **A**, **B**, **E** y **F** matrices de probabilidad, los productos **AB**, **BC**, **AF**, **ABE**, **AEBF** y todos los productos de dos, tres o más matrices de probabilidad, son matrices de probabilidad.
- c) Compruebe lo mismo para las potencias de matrices de probabilidad: **A**², **B**³, y otras potencias.

MATRICES ESPECIALES

4.1 Introducción

Se definen en este capítulo matrices cuyos elementos están relacionados entre sí, recibiendo estas matrices nombres específicos. Algunas matrices especiales son necesariamente cuadradas, entre ellas tenemos las matrices simétricas, antisimétricas, triangulares, diagonales, escalares y la llamada matriz identidad o unidad. La matriz inversa, es también cuadrada, pero por su importancia se desarrolla en el capítulo cinco. Otras matrices pueden ser o no cuadradas, como la matriz transpuesta de una matriz dada y la matriz nula. En cada caso, luego de definir cada matriz especial, se proponen algunas de sus propiedades operativas.

4.2 Matriz nula

4.2.1 Definición

Se llama así a la matriz que posee solamente ceros como elementos, por lo que se le conoce también como matriz cero. Es el elemento neutro aditivo en el álgebra matricial.

Si N es una matriz nula, su elemento general es:

$$n_{ij} = 0, \text{ para todo par de subíndices } i, j.$$

4.2.2 Notación

La matriz nula o cero se escribe **N** o **[O]**.

En español se utiliza más la notación **[O]** para la matriz nula o cero y se le ponen corchetes a fin de no confundirla con el 0 escalar. La notación **N** es utilizada principalmente en los libros de habla inglesa (**N** por null matrix).

Ejemplo 1

Son nulas las siguientes matrices

$$[O]_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[O]_{1 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[O]_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[O]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Las matrices $[O]_{2 \times 5}$ y $[O]_{7 \times 4}$ son ambas matrices nulas, pero no son iguales, por ser de órdenes diferentes.

4.2.3 Propiedades

Si **A** es una matriz cualquiera, **[O]** una matriz cuadrada de orden conveniente para la operación correspondiente y **p** un número real cualquiera, se cumplen las siguientes propiedades:

- i) La matriz cero es el elemento neutro aditivo del Álgebra Matricial.

$$A + [O] = A$$

$$[O] + A = A$$

- ii) El producto del escalar cero por una matriz cualquiera es la matriz cero.

$$0 [A] = [O]$$

iii) Cualquier escalar por la matriz cero es la matriz cero.

$$p [O] = [O], p \in \mathbb{R}$$

iv) La premultiplicación o posmultiplicación de una matriz por la matriz cero es la matriz cero.

$$[O][A] = [O]$$

$$[A][O] = [O]$$

4.3 Matriz transpuesta

4.3.1 Definición

La matriz transpuesta de una matriz A de orden $m \times n$ es la matriz A' o A^t de orden $n \times m$ que se obtiene a partir de la matriz A , permutando filas por columnas.

Ejemplo 3

Son matrices transpuestas las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 6 & 4 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 6 \\ 3 & 4 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

Donde observamos que la primera fila de la matriz A , 1 -1 3 8, ha pasado a ser la primera columna de la matriz A^t , y la segunda fila de la matriz A , 0 6 4 -3, ha pasado a ser la segunda columna de la matriz A^t . Pero en forma similar, la primera columna de la matriz A , 1 0, ha pasado a ser la primera fila de la matriz A^t , la segunda columna de la matriz A , -1 6, ha pasado a ser la segunda fila de la matriz A^t , y así sucesivamente. ■

4.3.2 Notación

En el texto utilizaremos principalmente la notación A^t , y se sugiere que se use así en escritura manuscrita.

Si se tiene una matriz $[A]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$, su transpuesta es la matriz A^t de orden $n \times m$, definida por $A^t = [a^t_{ji}]_{n \times m}$.

Ejemplo 4

En las matrices del ejemplo 3 se cumplen, entre otras igualdades:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a'_{11} = 1 & a_{12} &= a'_{21} = -1 \\ a_{13} &= a'_{31} = 3 & a_{21} &= a'_{12} = 0, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. ■

4.3.3 Propiedades

- i) La transpuesta de la transpuesta de una matriz es la matriz original

$$\text{En efecto, } (A^t)^t = ([a_{ij}]^t)^t = ([a'_{ji}])^t = [a_{ij}]$$

$$(A^t)^t = A$$

En términos sencillos, la i -ésima fila de la matriz A es la i -ésima columna en la matriz A^t ; luego la i -ésima columna de la matriz A^t se convierte en la i -ésima fila de la matriz $([A^t])^t$. En consecuencia, las matrices $([A^t])^t$ y A son iguales.

- ii) La transpuesta de una suma de matrices es la suma de la transpuesta de los sumandos.

$$\text{En efecto, } (A + B)^t = ([a_{ij}] + [b_{ij}])^t = [a_{ij}]^t + [b_{ij}]^t = A^t + B^t$$

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

- iii) La transpuesta de la matriz kA es k veces la transpuesta de la matriz A .

$$\begin{aligned} \text{En efecto, } [kA]^t &= ([A] + [A] + [A] + \dots k \text{ veces})^t \\ &= [A]^t + [A]^t + [A]^t + \dots k \text{ veces} = k[A]^t \end{aligned}$$

$$(kA)^t = kA^t, k \in \mathbb{R}$$

- iv) La transpuesta de un producto de matrices es el producto de las transpuestas, pero en orden inverso. Es decir: $(AB)^t = B^t A^t$.

$$\text{En efecto, si } C = AB, c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} b_{kj}.$$

$$\text{Si } c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{jk} b_{ki}. \text{ Pero } a_{jk} = a'_{kj} \text{ y } b_{ki} = b'_{ik}.$$

$$\text{Reemplazando, se tiene } c_{ij}^t = \sum_{k=1}^{k=n} a_{kj}^t b_{ik}^t = \sum_{k=1}^{k=n} b_{ik}^t a_{kj}^t$$

$$\text{Pero si, } C^t = B^t A^t, c_{ij}^t = \sum_{k=1}^{k=n} b_{ik}^t a_{kj}^t, \text{ donde } b_{ik}^t \text{ es el elemento } i \text{ k de la}$$

$$\text{matriz } B^t \text{ y } a_{kj}^t \text{ lo es de la matriz } A^t. \text{ Pero } \sum_{k=1}^{k=n} b_{ik}^t a_{kj}^t = B^t A^t$$

Por lo tanto, se cumple:

$$(AB)^t = B^t A^t$$

Ejemplo 5

Dada la matriz A , comprobar que la transpuesta de la transpuesta de una matriz A , es la misma matriz A , es decir: $(A^t)^t = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -9 \\ 9 & 7 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

En efecto:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 0 & -2 \\ -9 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^t)^t = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 0 & -2 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}^t \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -9 \\ 9 & 7 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

■

Ejemplo 6

Dadas las matrices A y B , comprobar que se cumple: $(A + B)^t = A^t + B^t$.

$$\text{En efecto, dadas las matrices: } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \\ 5 & 8 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, se cumple:

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \\ 5 & 8 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

En consecuencia: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$. ■

Ejemplo 7

Comprobar, para la matriz $\mathbf{A}$ y el escalar $k = -3$, la propiedad: $(k\mathbf{A})^t = k\mathbf{A}^t$, $k \in \mathbb{R}$

Sea la matriz: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ y el escalar: $k = -3$. Se cumple:

$$-3\mathbf{A} = -3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -15 \\ -6 & -12 & -21 \\ 0 & -6 & -15 \\ -3 & 0 & -30 \end{bmatrix} \Rightarrow (-3\mathbf{A})^t = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 & -3 \\ -6 & -12 & -6 & 0 \\ -15 & -21 & -15 & -30 \end{bmatrix}$$

$$-3\mathbf{A}^t = -3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 & -3 \\ -6 & -12 & -6 & 0 \\ -15 & -21 & -15 & -30 \end{bmatrix}$$

∴ Se cumple: $(-3\mathbf{A})^t = -3\mathbf{A}^t$. ■

Ejemplo 8

Dadas las matrices **A** y **B**, comprobar que se cumple: $(AB)^t = B^t A^t$

En efecto, se cumple:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2 \times 3 \\ 3 \times 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad (AB)^t = \begin{bmatrix} 23 & 28 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^t A^t = \begin{bmatrix} 23 & 28 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

∴ Se cumple: $(AB)^t = B^t A^t$. ■

4.4 Matriz cuadrada

4.4.1 Introducción

Las matrices cuadradas son de singular importancia en los métodos matriciales como tendremos oportunidad de ver más adelante. Por cierto que las matrices cuadradas, matrices que tienen el mismo número de filas y columnas, pueden ser nulas y tienen su matriz transpuesta, pero el resto del capítulo lo dedicaremos a estudiar matrices especiales que solamente pueden ser cuadradas. Como antes, presentaremos sus principales propiedades operativas y complementaremos la teoría con varios ejemplos explicativos. Definiremos previamente, la diagonal principal de una matriz cuadrada y su traza.

4.4.2 Diagonal de una matriz cuadrada

Se llama diagonal principal o simplemente diagonal de una matriz cuadrada A de orden n , al conjunto ordenado de las componentes: a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} ... a_{nn} . Es decir al conjunto de elementos que ocupan la diagonal que parte de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha. La otra diagonal de una matriz cuadrada, se le llama diagonal secundaria.

Por analogía, se llama diagonal principal o más importante de una matriz rectangular cualquiera $A_{m \times n}$, al conjunto ordenado a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} ... a_{kk} , donde k es el mínimo valor entre m y n . ($k = \min\{m, n\}$). Que, como antes, es la diagonal que parte de la esquina superior izquierda. Una matriz rectangular no posee diagonal secundaria.

Ejemplo 9

Determinar la diagonal principal y la diagonal secundaria de la matriz cuadrada A , y la diagonal más importante de la matriz rectangular B .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 7 & -9 & 12 \\ 0 & 8 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 8 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 9 & 10 & 5 \\ 12 & 1 & 7 & -2 & 100 \end{bmatrix}$$

La diagonal principal o simplemente diagonal de la matriz A es: 1 7 -7 17.
 La diagonal secundaria de la matriz A es: 0 8 -9 11.
 La diagonal más importante de la matriz rectangular B es: 0 -4 9 -2.

En las matrices propuestas, los elementos que conforman la diagonal principal de la matriz A , y la diagonal más importante de la matriz rectangular B , se han escrito en negrita. ■

4.4.3 Traza de una matriz cuadrada

Se llama traza de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de su diagonal principal. La traza de una matriz A se denota $Tr(A)$.

La traza de una matriz $A_{n \times n} = [a_{ij}]$, se define matemáticamente como:

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk}$$

Ejemplo 10

Determinar la traza de la matriz cuadrada **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 7 & -9 & 12 \\ 0 & 8 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

Como su diagonal principal es: 1 7 -7 17, su traza es:

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = 1 + 7 + (-7) + 17 = 18. \quad \blacksquare$$

4.4.4 Propiedades de la traza de una matriz cuadrada

Las propiedades de la traza de una matriz cuadrada, en relación a las operaciones definidas son:

- i) La traza de la suma de dos matrices cuadradas es igual a la suma de las trazas de los sumandos:

$$\text{Tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{A}) + \text{Tr}(\mathbf{B})$$

- ii) La traza del producto de un escalar por una matriz cuadrada es igual al escalar por la traza de la matriz:

$$\text{Tr}(k\mathbf{A}) = k \text{Tr}(\mathbf{A})$$

- iii) La traza del producto de dos matrices cuadradas **AB** es igual a la traza del producto **BA**.

$$\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA})$$

Ejemplo 11

Comprobar para las matrices **P** y **Q**, que la traza de la suma de dos matrices es igual a la suma de las trazas de los sumandos.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & -10 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 12 \\ 3 & -8 & 0 \\ -1 & 7 & 13 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 19 \\ 5 & 0 & 10 \\ 2 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

Es evidente que se cumple:

$$\text{Tr}(\mathbf{P}) = 1 + 8 + (-1) = 8$$

$$\text{Tr}(\mathbf{Q}) = 2 + (-8) + 13 = 7$$

$$\text{Tr}(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = 3 + 0 + 12 = 15$$

$$\therefore \text{Tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{A}) + \text{Tr}(\mathbf{B})$$

Observación: Se cumple también:

$$\text{Tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \dots + \mathbf{K}) = \text{Tr}(\mathbf{A}) + \text{Tr}(\mathbf{B}) + \text{Tr}(\mathbf{C}) + \dots + \text{Tr}(\mathbf{K})$$

Ejemplo 12

Dada la matriz $\mathbf{A}$ y el escalar k , comprobar que la traza del producto de un escalar por una matriz es igual al escalar por la traza de la matriz:

$$\text{Tr}(k\mathbf{A}) = k \text{Tr}(\mathbf{A})$$

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 6 \\ 2 & 18 & 10 \\ 2 & -10 & -8 \end{bmatrix}$ y el escalar $k = 0,5$

Como $0,5\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 5 \\ 1 & -5 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Tr}(0,5\mathbf{A}) = 5 + 9 + (-4) = 10$

y $0,5\text{Tr}(\mathbf{A}) = 0,5[10 + 18 + (-8)] = 0,5 \times 20 = 10$

$$\therefore \text{Tr}(k\mathbf{A}) = k \text{Tr}(\mathbf{A})$$

Ejemplo 13

Comprobar, para las matrices dadas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, que la traza del producto de dos matrices $\mathbf{AB}$ es igual a la traza del producto $\mathbf{BA}$.

$$\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA})$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & -8 & 0 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 65 & -4 \\ 0 & -16 & -16 \\ 25 & 25 & -12 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & -8 & 0 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 22 & 50 \\ 2 & -24 & 10 \\ 3 & -44 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tr}(\mathbf{AB}) = 41 + (-16) + (-12) = 13$$

$$\text{Tr}(\mathbf{BA}) = 6 + (-24) + 31 = 13$$

$$\therefore \text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA})$$



4.5 Matrices simétricas y antisimétricas

4.5.1 Matriz simétrica. Definición

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada, $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica si ella y su transpuesta son iguales.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$$

En consecuencia $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$.

Es decir, los elementos simétricos con respecto a la diagonal son iguales ($a_{ij} = a_{ji}$).

Ejemplo 14

Son simétricas las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 10 & -11 & 0 \\ 3 & -11 & -1 & 21 \\ 5 & 0 & 21 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -11 \\ -11 & -1 \end{bmatrix}$$

Así, en la matriz $\mathbf{B}$ se cumplen, entre otras, las igualdades: $b_{13} = b_{31} = 3$, $b_{23} = b_{32} = -11$.



4.5.2 Matriz antisimétrica. Definición

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada, $\mathbf{A}$ es una matriz antisimétrica si la suma de ella y su transpuesta es la matriz nula.

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}^t = [\mathbf{O}] \text{ o también } \mathbf{A} = -\mathbf{A}^t$$

En consecuencia: $a_{ij} = -a_{ji}$, si $i \neq j$
 $a_{ij} = 0$, si $i = j$.

Es decir, los elementos simétricos con respecto a la diagonal suman cero ($a_{ij} + a_{ji} = 0$), y los elementos de la diagonal principal son nulos ($a_{ii} = 0$).

Ejemplo 15

Son antisimétricas las matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -11 & 8 \\ -3 & 11 & 0 & 21 \\ -5 & -8 & -21 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, en la matriz **B**, se cumplen entre otras, las igualdades: $b_{13} + b_{31} = 0$, $b_{24} + b_{42} = 0$. Pero los elementos de la diagonal principal son todos nulos: $b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = b_{55} = 0$. ■

4.5.3 Propiedades de las matrices simétricas y antisimétricas

- i) La suma de dos matrices simétricas (antisimétricas), es una matriz simétrica (antisimétrica).
- ii) El producto de dos matrices simétricas **A** y **B**, no es una matriz simétrica, pero se cumple:

$$(AB)^t = (BA)^t$$

- iii) Si **P** es una matriz cuadrada cualquiera,
P + **P**^t es una matriz simétrica, y
P - **P**^t es una matriz antisimétrica.

En efecto,

$$\text{Si } P + P^t = Q$$

$$q_{ij} = p_{ij} + p_{ji}$$

$$\text{y } q_{ji} = p_{ji} + p_{ij}$$

$$\text{Entonces, } q_{ij} = q_{ji}, \forall i, j.$$

Por lo tanto, **Q** es una matriz simétrica.

Si $P - P^t = R$

$$r_{ij} = p_{ij} - p_{ji}$$

$$\text{y } r_{ji} = p_{ji} - p_{ij}$$

Entonces, $r_{ij} = -r_{ji}$, cuando $i \neq j$,
 $r_{ij} = 0$, cuando $i = j$.

Por lo tanto, R es una matriz antisimétrica.

iv) Toda matriz cuadrada es la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

En efecto,
$$P = \frac{P}{2} + \frac{P}{2} + \frac{P^t}{2} - \frac{P^t}{2}$$

Ordenando, se tiene:
$$P = \frac{1}{2}(P + P^t) + \frac{1}{2}(P - P^t)$$

Es decir, P es la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

v) Si Q es una matriz cualquiera, entonces tanto $Q^t Q$ como $Q Q^t$, son matrices simétricas.

vi) La traza de una matriz antisimétrica es cero.

Ejemplo 16

Comprobar que la suma de matrices simétricas dadas, es una matriz simétrica.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -2 & -2 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \\ 8 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 17

Comprobar que la suma de matrices antisimétricas dadas, es una matriz antisimétrica.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 8 \\ 4 & -8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 2 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 18

Descomponer una matriz cuadrada P cualquiera en la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Como: $\frac{P + P^t}{2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 8 \\ 7 & 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ Matriz simétrica

y $\frac{P - P^t}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Matriz antisimétrica

Se tiene que la matriz P se descompone en la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 8 \\ 7 & 1 & 8 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Descomposición que resulta al desarrollar: $P = \left(\frac{P}{2} + \frac{P^t}{2}\right) + \left(\frac{P}{2} - \frac{P^t}{2}\right)$

Ejemplo 19

Comprobar que si Q es una matriz cualquiera dada, entonces tanto $Q^t Q$ como $Q Q^t$, son matrices simétricas.

En efecto, sea Q una matriz cuadrada cualquiera $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, se encuentra:

$$Q^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad Q^t Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = Q Q^t$$

Debe observarse que las matrices $Q^t Q$ y $Q Q^t$ son matrices simétricas, pero de diferente orden. ■

4.6 Matrices triangulares

Se tienen dos tipos de matrices triangulares, denominadas superiores e inferiores.

4.6.1 Matrices triangulares superiores

Una matriz cuadrada A es triangular superior, si $a_{ij} = 0$, para $i > j$. Es decir, los elementos situados debajo de la diagonal principal son necesariamente ceros.

Ejemplo 20

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

es una matriz triangular superior. Debe observarse que los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros. ■

4.6.2 Matrices triangulares inferiores

Una matriz cuadrada A es triangular inferior, si $a_{ij} = 0$, para $i < j$. Es decir, los elementos situados por encima de la diagonal principal son necesariamente ceros.

Nota: Si los elementos por encima y por debajo de la diagonal principal son ceros, la matriz es una matriz diagonal (ver artículo 4.7).

Ejemplo 21

$$\begin{bmatrix} -145 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 3 & 0 \\ 1 & 14 & 571 & 97 \end{bmatrix},$$

es una matriz triangular inferior. Todos los elementos por encima de la diagonal principal son ceros. ■

4.6.3 Propiedades de las matrices triangulares

- i) La transpuesta de una matriz triangular superior es una matriz triangular inferior, y viceversa.
- ii) La suma y el producto de dos matrices triangulares superiores (inferiores), son matrices triangulares superiores (inferiores).
- iii) Una matriz cuadrada¹ es el producto de una matriz triangular inferior con elementos iguales a la unidad en la diagonal principal, por una matriz triangular superior.
- iv) Una matriz simétrica² es igual al producto de una matriz triangular inferior por su transpuesta.

¹ En realidad, solamente pueden ser factorizadas las matrices que posean inversa, es decir, las matrices inversibles (ver capítulo V).

² Igualmente, solamente puede descomponerse en el producto indicado las matrices que posean inversa (ver capítulo V).

Debemos hacer notar que son únicas las matrices triangulares descritas en la propiedad (iii), pero la matriz enunciada en (iv) puede tomar varias formas (en general, si la matriz es de orden n , existen 2^n matrices solución). En los ejemplos siguientes veremos aplicaciones de todos los casos.

Ejemplo 22

Comprobar que la transpuesta de una matriz triangular superior T , es una matriz triangular inferior.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Triangular superior Triangular inferior

Ejemplo 23

Comprobar que la suma y el producto de dos matrices triangulares superiores dadas son matrices triangulares superiores.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 11 & 13 & 15 \\ 0 & 0 & 17 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 15 & 45 & 95 \\ 0 & 30 & 89 & 177 \\ 0 & 0 & 72 & 179 \\ 0 & 0 & 0 & 110 \end{bmatrix}$$

Como se puede apreciar, los resultados son matrices triangulares superiores. Igualmente, si las matrices fueran triangulares inferiores, la suma y el producto de ellas, serían matrices triangulares inferiores.

Ejemplo 24

Descomponer la matriz **A** en el producto de dos matrices, como se enuncia en la propiedad (iii): producto de una matriz triangular inferior con elementos iguales a la unidad en la diagonal principal, por una matriz triangular superior.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 21 & 13 & 3 & 9 \\ 3 & 4 & -2 & -2 \\ 6 & 3 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

Suponiendo las matrices **L** y **U**, tales que **LU = A**, se deberá cumplir:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & u_5 & u_6 & u_7 \\ 0 & 0 & u_8 & u_9 \\ 0 & 0 & 0 & u_{10} \end{bmatrix}$$

Estamos llamando **L** y **U** a las matrices triangulares que se piden determinar, haciendo uso de la terminología en inglés: *Lower* (inferior) y *Upper* (superior).

Debe observarse que son 16 las incógnitas por determinar ($l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9$ y u_{10}), y que son 16 los productos escalares. En consecuencia, el sistema de ecuaciones que se forma es de 16 ecuaciones con 16 incógnitas; por lo tanto el problema tiene solución y además esta solución es única³.

La manera de determinar las 16 incógnitas, sin complicarse con 16 letras como incógnitas, es escribir el esquema anterior, pero dejando, en las matrices **L** y **U** espacios en blanco en lugar de las incógnitas. Es decir, de las entradas de las matrices **L** y **U** solamente se escribirán las entradas iguales a la unidad y a cero, que en el caso del ejemplo que nos ocupa son 16 en total.

³ Siempre que la matriz tenga inversa, que es equivalente a que el sistema tenga solución única (ver capítulos finales, dedicados a los sistemas de ecuaciones lineales).

Multiplicando la primera fila de la matriz **L** por las columnas de matriz **U**, se obtienen los siguientes elementos incógnitos:

$$u_1 = 3 \quad u_2 = 2 \quad u_3 = 0 \quad u_4 = 1$$

Multiplicando la segunda fila de la matriz **L** por las columnas de **U**, utilizando lo determinado anteriormente, se tiene:

$$l_1 = 7 \quad u_5 = -1 \quad u_6 = 3 \quad u_7 = 2$$

Multiplicando la tercera fila de **L** por las columnas de la matriz **U**, se obtiene sucesivamente:

$$l_2 = 1 \quad l_3 = -2 \quad u_8 = 4 \quad u_9 = 1$$

Finalmente, multiplicando la cuarta fila de la matriz **L** por las columnas de la matriz **U** se obtiene:

$$l_4 = 2 \quad l_5 = 1 \quad l_6 = 2 \quad u_{10} = 2$$

en consecuencia, las matrices buscadas **L** y **U**, que satisfacen: $\mathbf{LU} = \mathbf{A}$, son las siguientes:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Como se indicó anteriormente, esta descomposición es única, cuando existe. Es decir, se encuentran dos matrices triangulares, una inferior (**L**), con elementos en la diagonal iguales a la unidad, y otra triangular superior(**U**), cuyo producto es la matriz dada. Cuando no sea posible determinar los elementos de las matrices **L** y **U**, no existe tal descomposición, dado que la matriz es especial al no tener inversa, como se verá en los siguientes capítulos.

La descomposición mostrada de una matriz en el producto de otras dos, es el fundamento del procedimiento de inversión de matrices por factorización. Como se puede ver, descomponer una matriz como un producto, es en verdad una factorización de matrices.



Ejemplo 25

Encontrar una matriz triangular inferior T , tal que $TT^t = A$, si:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 10 & 11 \\ 8 & 11 & 42 \end{bmatrix}.$$

El esquema que resuelve el problema, es:

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ t_2 & t_3 & 0 \\ t_4 & t_5 & t_6 \end{bmatrix} \quad T^t = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_4 \\ 0 & t_3 & t_5 \\ 0 & 0 & t_6 \end{bmatrix} \quad TT^t = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 10 & 11 \\ 8 & 11 & 42 \end{bmatrix} = A$$

Debemos observar que son 6 las incógnitas por determinar (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 y t_6), y 9 los productos escalares. Sin embargo a diferencia de lo ocurrido en el ejercicio anterior, se encuentran dos juegos de valores para las incógnitas situadas en la primera columna, dos juegos de valores para las incógnitas de la segunda columna e igualmente, dos juegos de valores para la única incógnita de la tercera columna.

Veremos en detalle lo explicado anteriormente:

1. Al efectuar la 1^{ra} fila de T por las columnas de T^t , se tiene:

$$t_1^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \pm 2$$

$$t_1 t_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \pm 3$$

$$t_1 t_4 = 8 \quad \Rightarrow \quad t_4 = \pm 4$$

En consecuencia, la primera columna de la matriz T , pueden ser:

$$\begin{array}{cc} 2 & -2 \\ 3 & \text{ó} & -3 \\ 4 & -4 \end{array}$$

2. Al efectuar la segunda fila de T por la segunda y tercera columnas de T^t , se tiene:

$$t_2^2 + t_3^2 = 10 \Rightarrow t_3 = \pm 1$$

$$t_2 t_4 + t_3 t_5 = 11 \Rightarrow t_5 = \mp 1$$

En consecuencia, la segunda columna de la matriz T , puede ser:

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & \text{ó} & -1 \\ -1 & 1 \end{array}$$

3. Al efectuar la tercera fila de la matriz T por la tercera columna de la matriz T^t , se obtiene:

$$t_4^2 + t_5^2 + t_6^2 = 38 \Rightarrow t_6 = \pm 5$$

En consecuencia, la tercera columna de la matriz T , puede ser:

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \text{ó} & 0 \\ 5 & -5 \end{array}$$

Se han encontrado todas las incógnitas, pero para cada columna se tienen dos juegos de valores. En consecuencia, por ser de tercer orden se tienen $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ matrices que resuelven el problema.

Estas ocho matrices son:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad T_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad T_6 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad T_7 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad T_8 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

En general, si la matriz dada es de orden "n", se encontrarán 2^n matrices solución. En ocasiones los elementos de estas matrices pueden resultar imaginarios, dado que en la determinación de los elementos de la diagonal principal (t_{kk}), se extrae raíz cuadrada.

El método de descomposición de una matriz simétrica permite la inversión de matrices simétricas por un método denominado de Fox, que se presentará en el capítulo de inversión de matrices.



4.7 Matriz diagonal

4.7.1 Definición

Una matriz cuadrada **A** es diagonal si $a_{ij} = 0$, cuando $i \neq j$.

Se le define también como matriz triangular superior – inferior.

Se utiliza una notación simplificada, que omite los ceros y encierra los elementos de la diagonal entre parentesis, precedidos por **Diag**.

Ejemplo 26

La matriz

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

es diagonal.

Debe observarse que los únicos elementos no nulos en una matriz diagonal son los elementos de su diagonal principal.

La matriz diagonal puede escribirse también:

$$D = \text{diag} (2; 3; 5; -11; 9)$$

4.7.2 Propiedades

- i) La transpuesta de una matriz diagonal es ella misma.

$$D = D^t$$

- ii) La suma y el producto de matrices diagonales son matrices diagonales.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+p & 0 & 0 \\ 0 & b+q & 0 \\ 0 & 0 & c+r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap & 0 & 0 \\ 0 & bq & 0 \\ 0 & 0 & cr \end{bmatrix} = D_1 D_2$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} = D_2 D_1$$

- iii) Al cumplirse $D_1 D_2 = D_2 D_1$, se tiene que el producto de matrices diagonales es siempre conmutable o permutable.
- iv) La potencia de una matriz diagonal, es también una matriz diagonal.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

y, en general:

$$[\text{diag}(a; b; c; \dots; k)]^n = \text{diag}(a^n; b^n; c^n; \dots; k^n)$$

- v) Si una matriz diagonal **D** premultiplica a una matriz **A**, los elementos de la matriz diagonal afectan la filas de la matriz **A**.

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 3p & 0 \\ 2q & -q & q \\ 7r & 2r & 5r \end{bmatrix}$$

Si la matriz diagonal D posmultiplica, afecta las columnas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 3q & 0 \\ 2p & -q & r \\ 7p & 2q & 5r \end{bmatrix}$$

Ejemplo 27

Calcular la matriz A^5 , si se conoce:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Los cálculos son:

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{bmatrix}$$

4.8 Matriz escalar

4.8.1 Definición

La matriz escalar es una matriz diagonal con elementos iguales a una constante diferente de la unidad y de cero:

Es decir, si E es una matriz escalar, se cumple:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= 0, \text{ si } i \neq j \\ e_{ij} &= k, \text{ si } i = j \end{aligned}$$

donde: $k \neq 1, k \neq 0$

Ejemplo 28

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

es una matriz escalar de tercer orden. ■

4.8.2 Propiedades

- i) Como en la matriz diagonal, la transpuesta de una matriz escalar es ella misma.

$$E^t = E$$

- ii) El producto de una matriz cualquiera A y la matriz escalar E , es conmutable o permutable.

$$AE = EA$$

Además, si $e_{ii} = k$

se cumple:

$$AE = kA$$

Es consecuencia, la matriz escalar hace las veces del escalar al multiplicar a una matriz.

Ejemplo 29

Comprobar que multiplicar una matriz por una matriz escalar es equivalente a multiplicar la matriz por un escalar.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ w & x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5a & 5b & 5c & 5d \\ 5e & 5f & 5g & 5h \\ 5w & 5x & 5y & 5z \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ w & x & y & z \end{bmatrix}$$

Los cálculos comprueban la expresión: $EA = kA$, donde los elementos de la diagonal de la matriz E son iguales a k , la constante de la matriz escalar. ■

4.9 Matriz identidad

4.9.1 Definición

La matriz identidad o unitaria es la matriz cuadrada, con unos en la diagonal principal y ceros fuera de ella. Es un caso especial de la matriz escalar, donde el escalar es la unidad. La matriz identidad se denota con la letra I . Con frecuencia se pone I_n , para indicar que es una matriz de orden n .

Ejemplo 30

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

es una matriz unidad de orden n .

La matriz I_4 , es una matriz identidad de orden 4.

Una matriz identidad se indica también como

$$I = [\delta_{ij}]$$

donde δ_{ij} es el Delta de Kronecker, símbolo matemático con el siguiente significado:

$$[\delta_{ij}] = \begin{cases} \delta_{ij} = 1, & \text{sí } i = j \\ \delta_{ij} = 0, & \text{sí } i \neq j \end{cases}$$



4.9.2 Propiedades

- i) Su transpuesta es ella misma.

$$I^t = I$$

- ii) Conmuta con toda matriz cuadrada de orden n .

$$AI_n = I_n A = A$$

La matriz I se llama también unitaria, al satisfacer: $AI = 1A$.

- iii) Es la matriz neutra multiplicativa.

Si A es una matriz de orden $m \times n$,

$$I_m A = A$$

$$A I_n = A$$

La matriz I , es el elemento identidad para el producto, de allí su nombre de matriz identidad.

4.10 Otras matrices especiales

4.10.1 Matriz involutiva

Una matriz cuadrada es involutiva si su cuadrado es la matriz identidad.

$$A^2 = I$$

El nombre involutiva se explica porque involuciona (regresa) a ella. Esto puede entenderse mediante el siguiente esquema de multiplicación:

$$\begin{array}{c} [A][A][A] \\ [A][A][A][A][A] \dots \end{array}$$

Es evidente, que cualquier potencia de la matriz A será A o I . En particular, será A , si la potencia es par, y será I si la potencia es impar. En consecuencia, si A es una matriz involutiva, se cumplirá:

$$A^n = \begin{cases} I, & n = 2k \\ A, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

Ejemplo 31

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

es una matriz involutiva, al cumplirse:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^2 = I$$

Además, como consecuencia de lo expresado anteriormente, se puede afirmar con sólo haber comprobado que la matriz A es involutiva, que se cumple por ejemplo:

$$A^{120} = I$$

$$A^{1721} = A$$



4.10.2 Matriz ortogonal

Una matriz cuadrada A es ortogonal si el producto de ella por su transpuesta es la matriz identidad.

$$AA^t = I$$

7

Ejemplo 32

La matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

es una matriz ortogonal, al cumplirse:

$$A^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.10.3 Función matricial

Así como:

$$f_{(x)} = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k$$

es una función polinomial, entre matrices, se tiene:

$$f_{(X)} = aX^n + bX^{n-1} + cX^{n-2} + \dots + kI$$

Esta función es una función matricial donde los coeficientes $a, b, c, \dots, k$, son números reales o matrices.

Se entiende que así como en el álgebra ordinaria se cumple: $x^0 = 1$, en matrices se cumple:

$$A^0 = I.$$

Ejemplo 33

Si $f_{(x)} = 2x^2 + 3x - 5$, calcular la función matricial $f_{(A)}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

La función matricial solicitada, es: $f_{(A)} = 2A^2 + 3A - 5I$.

Como $A^2 = \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ -3 & 16 \end{bmatrix}$, es simple evaluar la función matricial solicitada:

$$f_{(A)} = 2 \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -3 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - 5I_2$$

Efectuando las operaciones matriciales indicadas, se tiene:

$$f_{(A)} = \begin{bmatrix} 24 & 4 \\ 3 & 21 \end{bmatrix}$$


Ejercicios y problemas propuestos

Capítulo 4

1. Determinar los valores de las incógnitas w, x, y, z , de manera que sea nula la matriz:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & x-2 & 9 \\ 0 & 0 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4+z & 1 & w \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Determinar el valor de "a" que hace nula la matriz:

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & -14a & 7a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 4a & -2a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Comprobar que los siguientes productos matriciales son nulos, sin que lo sean ninguno de sus factores:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -2 & -4 & -8 \\ 4 & 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 8 & -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 18 \\ -2 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -10 & -4 & -12 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Si

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Hallar $\frac{2}{3}A - B^t$

5. En un antiguo texto se encuentra la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

y del producto $A^2 A^t$, solamente se puede leer su última columna

$$\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \text{ Hallar la matriz } A.$$

6. Dada una matriz A de cuatro columnas, que tiene como elemento general $a_{ij} = i + j - 2$,

$$\text{y otra } B = \begin{bmatrix} 1 & -x & 1 \\ x & -x & -2 \\ 1 & -x & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcular $A^t B^2$, cuando $|B| = 0$, $x > 0$.

7. En un texto un tanto ilegible se presenta el producto P de una matriz triangular inferior T por su transpuesta. Se observa que son matrices de tercer orden y se reconocen los siguientes elementos:

$$t_{11} = 1, \quad t_{33} = 4, \quad p_{12} = 2, \quad p_{13} = -3, \quad p_{22} = 5 \text{ y } p_{23} = -5.$$

Determinar las matrices T y P , sabiendo que la matriz T , posee un solo elemento negativo.

8. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

y el escalar $k = 3$, comprobar las siguientes propiedades:

$$\text{trz}(kA) = k \text{ trz } A$$

$$\text{trz}(A + B) = \text{trz } A + \text{trz } B$$

$$\text{trz } AB = \text{trz } BA$$

Además, calcular las trazas de las matrices $A^2 B$, A^3 y B^4 .

9. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$$

Si $|A| = 16$, hallar la traza de $A + 2A^t$.

10. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a - b & -1 \\ 2 & 3 & b \\ b - x & a - x & 4 \end{bmatrix}$$

es una matriz simétrica determinar A^2 .

11. Hallar las matrices A y B , si se conocen las matrices: $A + A^t = B - B^t = [0]$, y

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

12. Si P es una matriz simétrica y Q es antisimétrica, donde:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & y + z & 0 \\ -2 & 5 & z \\ y & z & 3 \end{bmatrix} \text{ y } q_{ij} = 2i - i \text{ cuando } i < j,$$

hallar la matriz X que satisface:

$$2P - P^t + Q + Q^t = X + 3P$$

13. Si:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Qué tipo de matriz es AA^t , y determinar la matriz $(A^tA)^t$.

14. En un texto un tanto ilegible se presenta el producto P de una matriz triangular inferior T por su transpuesta. Se observa que son matrices de tercer orden y se reconocen los siguientes elementos: $t_{11} = 1$, $t_{33} = 4$, $p_{12} = 2$, $p_{13} = -3$, $p_{22} = 5$ y $p_{23} = -5$. Determinar la matrices T y P , sabiendo que la matriz T posee una sola entrada negativa.

15. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

determinar la matriz triangular inferior T y las matrices columna X e Y , tales que se cumplan las igualdades:

$$A = TT^t \quad TY = AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \quad T^tX = Y$$

(Considere solamente raíces positivas).

16. Descomponer cada una de las matrices dadas en el producto de una matriz triangular inferior con elementos iguales a la unidad en la diagonal principal, por una matriz triangular superior.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ -3 & 8 & 12 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 8 & 14 & 34 \\ 12 & 20 & 54 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 28 & 37 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 & 1 \\ -4 & 21 & 14 & 3 \\ -3 & 2 & 6 & 5 \\ -4 & 46 & 32 & 15 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$

17. Descomponer cada una de las matrices dadas en el producto de una matriz triangular inferior, por una matriz triangular superior, con elementos iguales a la unidad en la diagonal principal (puede probarse que esta descomposición es también única, pero no recibe el nombre específico de factorización de matrices).

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -16 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 4 & 14 & 28 \\ 2 & 10 & 33 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 9 & 15 & 15 & 15 \\ 7 & 15 & 24 & 34 & 34 \\ 11 & 23 & 36 & 50 & 65 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 10 & 0 & 0 \\ 9 & 32 & 33 & 10 & 0 \\ 4 & 21 & 40 & 33 & 10 \\ 0 & 4 & 21 & 40 & 33 \\ 0 & 0 & 4 & 21 & 40 \end{bmatrix}$$

18. Descomponer cada una de las matrices simétricas dadas en el producto de una matriz triangular inferior por su transpuesta.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 8 \\ -4 & 5 & -8 \\ 8 & -8 & 14 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 15 & 24 \\ 15 & 29 & 36 \\ 24 & 36 & 69 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 17 & 10 & 28 \\ 2 & 10 & 14 & 26 \\ 4 & 28 & 26 & 125 \end{bmatrix}$$

19. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \text{Diag}(0,5; 0,2; 1)$$

Hallar la matriz X , tal que: $(AB)^t + X = 2(B^t + A)$.

20. M es una matriz cuadrada de tercer orden, cuyos elementos no nulos son:

$$m_{11} = m_{12} = m_{12} = -m_{22} = -m_{33} = -2.$$

Demostrar que se cumple:

$$M = \begin{cases} 2^k I, k = \text{número par} \\ 2^{k-1} M, k = \text{número impar} \end{cases}$$

21. Si A es una matriz cuadrada de segundo orden tal que su determinante sea igual a la unidad y su igual a -1 . Calcular e identificar la matriz A^3 .

22. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & -3 & -2 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 19 & 0 & -60 \\ 16 & -1 & -48 \\ 6 & 0 & -19 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 39 & -10 & -100 \\ 32 & -9 & -80 \\ 12 & -3 & -31 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 4 & 2 \\ 8 & -2 & 1 & -2 \\ -4 & -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

calcular: A^3 , B^4 , $A^4 B^6$, C^2 y D^3 .

23. Si A y B son dos matrices permutables e involutivas, tales que:

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

calcular la traza de la matriz $M = (A + B)^2$.

24. Demostrar que si A es una matriz involutiva, entonces, la matriz $(I - A)(I + A)$ es una matriz nula.

25. Demostrar que las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

son involutivas y además, permutables dos a dos, dando en cada caso la tercera.

26. Si **A** es una matriz involutiva y **D** es una matriz definida por:

$$\begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases}, \text{ determinar } \alpha \text{ y } \beta, \text{ si } \mathbf{A} = \alpha \mathbf{I}_3 + \beta \mathbf{D}.$$

27. Si **A** y **B** son matrices involutivas y conmutables tales que:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \text{ hallar la matriz } (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2.$$

28. Dada la matriz simétrica

$$\mathbf{A} = k \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ determinar el valor del escalar de manera que la matriz } \mathbf{A} \text{ sea una matriz ortogonal.}$$

29. Definir las siguientes matrices especiales:

A) idempotente B) involutiva C) periódica.

Además, si las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

son matrices especiales, efectúe los cálculos necesarios para determinar de qué matrices especiales se trata.

30. Simplificar la expresión matricial:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{C} + \mathbf{D})(2\mathbf{C} - \mathbf{D})$$

en cada uno de los siguientes casos:

- i) **C** y **D** son matrices permutables ii) **C** y **D** son matrices involutivas,
iii) **C** y **D** son matrices idempotentes, y iv) **C** y **D** son antipermutables y **C** es involutiva.

31. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ Hallar la matriz $Q = 2A + A^2 + A^4 + A^6$.

Además, identifique qué tipo de matriz es la matriz A .

32. Demostrar que la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, satisface la ecuación matricial:

$$x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = 0.$$

33. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, determinar la matriz: $A^2 - 4A - 5I$. ¿Qué puede usted afirmar de la matriz A con relación al resultado obtenido?

34. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, determinar la matriz: $A^2 - 4A + 2I$.

35. Si $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$, determinar la matriz: $A^2 - 8I$.

36. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, determinar la matriz: $A^5 + 2A^3 + 3A^2 + 4A + 5I$.

37. Determinar todas la matrices reales, si

$$A^2 + I = [0]$$

38. Si la raíz cuadrada de una matriz A es otra B , tal que $B^2 = A$, hallar las raíces cuadradas reales de las matrices:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

39. Compruebe que la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, satisface la condición $A^2 = I$

Además, demuestre que la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ cumple la misma propiedad, si

$A = \pm I$ o si se cumple: $a + d = 0$ y $a^2 + bc = 1$.

40. Dada una matriz A , tal que :

$$a_{ij} = \begin{cases} \in \mathbb{R} & i < j \\ 1 & i = j \\ 0 & i > j \end{cases} \quad \text{Matriz de Heinsenberg.}$$

compruebe que el producto de matrices de este tipo da matrices que tienen la misma definición.

MATRIZ INVERSA

5.1 Introducción

En este capítulo completamos el estudio de las operaciones con matrices presentando la inversión de matrices. Sin embargo, las técnicas numéricas para invertir matrices se proporcionan en el capítulo 8. Aquí presentaremos la teoría fundamental y un método algebraico para invertir matrices, y al final del capítulo, la inversión de matrices especiales. En el capítulo 7, presentaremos la inversión de matrices elementales y el tema de inversión de matrices termina con la construcción de la inversa, por medio de la matriz adjunta, en el capítulo 10.

5.2 Definición y notación

En el conjunto de los números reales, para todo $a \neq 0$ existe un único número a^{-1} , llamado inverso multiplicativo (o recíproco), que verifica $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$, que permite resolver ecuaciones algebraicas de la forma $ax = b$, donde $a \neq 0$. En forma similar podemos definir la inversa de una matriz, operación que nos permitirá resolver ecuaciones matriciales de la forma $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas conmutables e $\mathbf{I}$ es la matriz identidad, tales que:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

se dice que $\mathbf{A}$ es la inversa de $\mathbf{B}$ o que $\mathbf{B}$ es la inversa de $\mathbf{A}$.

Ejemplo 1

$$\text{Si } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1,5 \\ 1 & -0,5 \end{bmatrix}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} -2 & 1,5 \\ 1 & -0,5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{AB} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} -2 & 1,5 \\ 1 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{BA} \end{aligned}$$

Al cumplirse $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, tenemos que las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son una inversa de la otra de la misma manera que, por ejemplo, los números 2 y 0,5 (o $\frac{1}{2}$) son uno el inverso o recíproco del otro.

La matriz inversa se denota con el exponente menos uno (-1), en consecuencia se escribe:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}, \text{ y se lee: } \mathbf{B} \text{ es la inversa de la matriz } \mathbf{A}.$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}, \text{ y se lee: } \mathbf{A} \text{ es la inversa de la matriz } \mathbf{B}.$$

Se puede escribir entonces: $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ y también $\mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{I}$.

Sin embargo no se debe escribir $\frac{1}{\mathbf{A}}$, ni $\frac{1}{\mathbf{B}}$, cuando $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices.

Observaciones

1. Si se cumple $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$, las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son necesariamente cuadradas de orden n , y según la definición dada, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices inversas, o sea $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$ o $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

2. Si se cumpliera solamente $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, se dice que la matriz $\mathbf{B}$ es la inversa de $\mathbf{A}$ por la derecha (por posmultiplicación), o que la matriz $\mathbf{A}$ es la inversa de $\mathbf{B}$ por la izquierda (por premultiplicación). Así

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{son matrices que cumplen } \mathbf{AB} = \mathbf{I}_2,$$

pero $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, como es fácil de verificar simplemente por el orden.

En consecuencia, no es posible escribir en este caso: $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$ o $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, porque estos símbolos están reservados para matrices cuadradas que poseen inversa. En el apéndice VI se detallan estas matrices unilaterales.

3. La determinación de la inversa de una matriz cuadrada puede hacerse con relativa facilidad, haciendo uso directamente de la definición dada. Para ello es suficiente suponer la inversa y calcular los elementos incógnitos.

Ejemplo 2

Determinar la inversa de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Suponiendo la inversa como $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, se deberá cumplir

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_2.$$

Efectuamos $\mathbf{AA}^{-1}$ para encontrar los elementos supuestos: a, b, c y d y usaremos $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$, no sólo como comprobación de los cálculos, sino porque la definición exige que se cumpla $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$.



$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, deberán resolverse los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2c - d = 0 \\ c - d = 1 \end{cases}$$

Resolviendo, se tiene: $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$ y $d = -2$. Por lo tanto, la matriz A^{-1} es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Como comprobación deberá ejecutarse $A^{-1}A$, producto que deberá ser también la matriz identidad I .

5.3 Matrices regulares y singulares

En los números reales, la existencia del inverso multiplicativo de un número real a está restringida por la condición $a \neq 0$. Es de suponer, en consecuencia, que la matriz nula no tiene inversa. En efecto la matriz nula $[O]$, no tiene inversa porque $[O]A = A[O] = [O]$, y nunca ocurrirá $[O]A = A[O] = I$. En consecuencia no existe la matriz A , que por definición sería la matriz inversa de la matriz nula. En el Álgebra ordinaria el número cero es el único que no posee inversa; sin embargo, en matrices la matriz nula no es la única matriz que no posee inversa, como veremos en los siguientes ejemplos.

Las matrices cuadradas que poseen inversa reciben el nombre de matrices regulares y las que no poseen inversa se les denominan matrices singulares.

Ejemplo 3

Las matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

no tienen inversa. Tomemos una de ellas, e intentemos hallar su inversa.

Si la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

tuviera inversa, ésta tendría que ser de la forma

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$$

Efectuando PQ se tendría:

$$PQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4(q_{11}+q_{21}) & 4(q_{12}+q_{22}) \end{bmatrix}$$

Es evidente que no existe la matriz Q , de manera que se cumpla $PQ = I$. Es decir, cualquiera sea la matriz Q , $PQ \neq I$, ya que el elemento del producto que ocupa la posición 1 1 es cero, mientras que en la matriz unidad es 1. En los otros tres casos mostrados, procediendo de la misma manera, se concluye de igual manera. En consecuencia las matrices mostradas no tienen inversa.

Demostraremos más adelante que si una matriz tiene una fila o una columna de ceros, ella es una matriz singular.

Ejemplo 4

Las matrices

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad -I \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

no tienen inversa.

Si suponemos que la primera matriz admite inversa, se debe cumplir:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al calcular los elementos de la primera columna del producto e igualarlos a la primera columna de la matriz identidad, se tiene:

$$\begin{array}{rclcl} -a & - & 2b & = & 1 \\ 2a & + & 4b & = & 0 \end{array}$$

Este sistema de ecuaciones es absurdo, porque al agregar a la segunda ecuación el doble de la primera, se obtiene:

$$0 = 2$$

Al no poder calcular los elementos de la matriz inversa, la matriz dada no posee inversa. Esta situación se presenta en toda matriz que tenga dos filas o dos columnas proporcionales, como demostraremos en su oportunidad, tal como se puede concluir del ejemplo resuelto.

Veamos ahora la segunda matriz, y supongamos que tiene inversa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al calcular los elementos de la primera columna del producto e igualarlos a la primera columna de la matriz identidad, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rclclcl} a & + & 2b & + & 3c & = & 1 \\ a & + & b & + & c & = & 0 \\ 3a & + & 4b & + & 5c & = & 0 \end{array}$$

Este sistema tampoco admite solución, porque al disminuir la tercera ecuación en la primera más el doble de la segunda, se obtiene una igualdad absurda:

$$0 = -1.$$

Como en el primer caso, esta segunda matriz tampoco tiene inversa. En este caso, se ha llegado a un sistema absurdo por tener la matriz una fila que es combinación lineal de otras (la tercera fila es igual a la primera fila más el doble de la segunda fila)¹. Igual ocurre si una columna es combinación lineal de otras. Es evidente que si las filas o las columnas de una matriz son linealmente independientes, la matriz posee inversa. Esto se demostrará posteriormente; por ahora, si se observa que las filas o las columnas de una matriz son dependientes, la matriz es singular (no posee inversa).

En general las matrices que poseen inversa se llaman:

Regulares, inversibles o no singulares,

y las que no tienen inversa se llaman:

Singulares, no regulares, o no inversibles.

¹ En general, si un determinante tiene filas dependientes su valor es cero, y como se demostrará en el capítulo 10, cuando el determinante de una matriz cuadrada es cero, la matriz no posee inversa. Esto se debe a una expresión que permite construir la inversa, expresión que tiene en el denominador el determinante de la matriz.

5.4 Propiedades de la matriz inversa

Se proponen a continuación seis propiedades de la matriz inversa. En cada caso se presenta una demostración muy simple, demostración que se sustenta, en todos los casos, en la definición de matriz inversa.

1. *El producto de dos matrices inversas es conmutativo.*

La propiedad es evidente por la definición de matriz inversa, al cumplirse:

$$AA^{-1} = A^{-1}A$$

2. *Si una matriz cuadrada posee inversa, ella es única.*

Supongamos por un instante² que una matriz **A** tiene dos inversas **B** y **C**. Entonces se cumple:

$$AB = BA = I \quad \wedge \quad AC = CA = I.$$

Si posmultiplicamos $BA = I$ por la matriz **C**, se tiene:

$$(BA)C = IC = C$$

Si premultiplicamos $AC = I$ por la matriz **B**, se tiene:

$$B(AC) = BI = B$$

Pero, por la propiedad asociativa de la multiplicación, se cumple:

$$(BA)C = BAC$$

$$B(AC) = BAC$$

Por lo tanto, las supuestas inversas **B** y **C**, son iguales, y por lo tanto:

Una matriz cuadrada A tiene, a lo más, una inversa.

La inversa de una matriz cuadrada **A** es pues única, si existe; conclusión que nos hace ver que, en vez de llamar a **B** una inversa de **A**, deberá propiamente llamársele "la inversa de **A**". En adelante, al referirnos a la inversa de una matriz, asumiremos que se trata de una matriz cuadrada.

²

Efectuamos una demostración por el absurdo, es decir negamos inicialmente la tesis, y comprobamos que la negación de la tesis es falsa.

Esta propiedad nos hace ver además, que al encontrar la inversa de una matriz A por el procedimiento algebraico descrito en la observación 3 del artículo 5.2 ($AA^{-1} = I$), no es necesario efectuar $A^{-1}A$ para comprobar que el producto es I , sin embargo se recomienda efectuar tal comprobación del resultado.

3. La inversa de la matriz inversa es la matriz original.

Por la definición de matriz inversa se tiene que $M^{-1}M = I$. Si $M = A^{-1}$, debe cumplirse:

$$(A^{-1})^{-1}A^{-1} = I$$

Si posmultiplicamos ambos miembros por A , $(A^{-1})^{-1}A^{-1}A = IA$, resulta lo que queríamos demostrar:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Ejemplo 5.

Si la matriz B es la inversa de la matriz A , C es la inversa de B , D es la inversa de la matriz C , y D es la inversa de la matriz A , hallar las matrices A , B y C , si se conoce la matriz

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Del enunciado, se tiene: $B = A^{-1}$, $C = B^{-1}$, $D = C^{-1}$, y $A = D^{-1}$.
Entonces, $A = D^{-1} = (C^{-1})^{-1} = C$

Pero: $C^{-1} = D$, se cumple: $(C^{-1})^{-1} = (D)^{-1}$, es decir: $C = D^{-1}$
 $\therefore A = C = D^{-1}$

Por otro lado, se tiene: $B = A^{-1} = (D^{-1})^{-1} = D$

Como la inversa de la matriz D es

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

La respuesta al ejemplo 5 es:

$$A = C = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Si A es una matriz regular, y λ un escalar diferente de cero, se cumple:

$$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}.$$

Si $\lambda^{-1} A^{-1}$ es la inversa de la matriz λA , deben cumplirse las condiciones:

$$(\lambda A)(\lambda^{-1} A^{-1}) = I \quad (\lambda^{-1} A^{-1})(\lambda A) = I$$

En efecto, quitando paréntesis en ambas expresiones, y teniendo en cuenta propiedades de la multiplicación de matrices dadas anteriormente, se demuestra que:

$$(\lambda A)(\lambda^{-1} A^{-1}) = \lambda A \lambda^{-1} A^{-1} = \lambda \lambda^{-1} A A^{-1} = (\lambda \lambda^{-1})(A A^{-1}) = (1)(I) = I$$

$$(\lambda^{-1} A^{-1})(\lambda A) = \lambda^{-1} A^{-1} \lambda A = \lambda^{-1} \lambda A^{-1} A = (\lambda^{-1} \lambda)(A^{-1} A) = (1)(I) = I$$

5. La inversa de un producto de matrices regulares es igual al producto de las inversas de las matrices, pero en orden contrario.

Es decir, si las matrices A y B son matrices regulares:

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

Si $B^{-1} A^{-1}$ es la inversa de la matriz AB , deben cumplirse las condiciones:

$$(AB)(B^{-1} A^{-1}) = I \quad (B^{-1} A^{-1})(AB) = I$$

En efecto, quitando paréntesis en ambas expresiones, y teniendo en cuenta propiedades de la multiplicación de matrices dadas anteriormente, se demuestra que:

$$(AB)(B^{-1} A^{-1}) = A B B^{-1} A^{-1} = A (B B^{-1}) A^{-1} = A (I) A^{-1} = A A^{-1} = I$$

$$(B^{-1} A^{-1})(AB) = B^{-1} A^{-1} A B = B^{-1} (A^{-1} A) B = B^{-1} (I) B = B^{-1} B = I$$

En forma similar puede demostrarse que se cumple:

$$(ABC \dots LM)^{-1} = L^{-1} M^{-1} \dots C^{-1} B^{-1} A^{-1}$$

6. *Si A es una matriz regular, la inversa de su transpuesta es la transpuesta de su inversa.*

Es decir, si A es una matriz regular, se cumple:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

Si $(A^{-1})^t$ es la inversa de la matriz A^t , deben cumplirse las condiciones:

$$(A^t)(A^{-1})^t = I \quad (A^{-1})^t(A^t) = I$$

En efecto, teniendo en cuenta la propiedad de la transpuesta en relación a la multiplicación de matrices dada anteriormente, se demuestra que:

$$(A^t)(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = (I)^t = I$$

$$(A^{-1})^t(A^t) = (AA^{-1})^t = (I)^t = I$$

5.5 Inversión de matrices especiales

Proponemos en esta sección, las inversas de las matrices unitaria, escalares, diagonales, triangulares, involutivas y ortogonales. En cada caso se presenta una demostración muy simple.

5.5.1 Inversa de la matriz unitaria

Como en la matriz unitaria se verifica: $II = I$.

Posmultiplicando por I^{-1} , se tiene: $III^{-1} = II^{-1}$

$$I(II^{-1}) = I^{-1}$$

Finalmente: $I^{-1} = I$

En consecuencia:

La inversa de la matriz unitaria es ella misma.

5.5.2 Inversa de la matriz escalar

Sea E una matriz escalar de orden n , con elementos $e_{ii} = k$, $\forall i$.

En consecuencia, $E = kI_n$

Por la propiedad 4 del artículo anterior, se tiene:

$$E^{-1} = (kI_n)^{-1} = k^{-1}(I_n)^{-1}$$

$$E^{-1} = k^{-1}I_n$$

En consecuencia:

La inversa de una matriz escalar con elementos k ($k \neq 0$) en la diagonal es otra matriz escalar con elementos k^{-1} es la diagonal.

Ejemplo 6

Para una matriz escalar de orden 4, con $k = -2$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Otra manera de escribir este ejemplo es:

$$\{\text{Diag} (-2; -2; -2; -2)\}^{-1} = \text{Diag} (-0,5; -0,5; -0,5; -0,5)$$

5.5.3 Inversa de una matriz diagonal

En el caso de una matriz diagonal, se cumple:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} d_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n^{-1} \end{bmatrix}$$

En consecuencia:

La inversa de una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal son diferentes de cero, es otra matriz diagonal cuyos elementos son los respectivos recíprocos.

Ejemplo 7

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$, entonces, se cumple: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

debe observarse que también se puede escribir:

$$\{\text{Diag } (1; -2; 4; 10)\}^{-1} = \text{Diag } (1; -0,5; 0,25; 0,10)$$

5.5.4 Inversa de una matriz triangular

Cuando se pretende invertir una matriz triangular inferior o superior, se debe tener en cuenta que:

Una matriz triangular, si es regular, tiene como inversa una matriz triangular del mismo tipo.

Se dice, si es regular, ya que si algún elemento de la diagonal principal es cero, es imposible invertir la matriz.

Ejemplo 8

Dada una matriz triangular inferior $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, su inversa es también una

matriz triangular inferior.

Se supone la inversa de la matriz A , como una matriz triangular inferior:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando las multiplicaciones, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales:

$a = 1$	$a = 1$
$2a - b = 0$	$b = 2$
$-c = 1$	$c = -1$
$a + 2b + d = 0$	$d = -5$
$2c + e = 0$	$e = 2$
$f = 1$	$f = 1$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como en los cálculos se ha usado $AA^{-1} = I$, la verificación de los cálculos puede hacerse efectuando $A^{-1}A = I$.

Debe observarse que los elementos de la diagonal de la matriz inversa son los respectivos recíprocos de los elementos de la diagonal de la matriz original. En consecuencia, si algún elemento de la diagonal principal en la matriz original es cero, la matriz es singular, es decir no tiene inversa.

Veamos un caso general de una matriz de tercer orden, donde se podrá comprobar lo relativo a los recíprocos de la diagonal principal, independientemente de los valores de los elementos x, y, z :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ x & \frac{1}{c} & 0 \\ y & z & \frac{1}{f} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, queda probado que si algún elemento de la diagonal de una matriz triangular es cero, la matriz es una matriz singular, y no existe inversa.

En general puede probarse que:

Una matriz escalar, diagonal o triangular es singular, si algún elemento de su diagonal principal es cero.

5.5.5 Inversa de una matriz involutiva

La inversa de una matriz involutiva es ella misma.

En efecto, una matriz cuadrada es involutiva si se cumple $\mathbf{AA} = \mathbf{I}$.
En consecuencia, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.

Ejemplo 9

La inversa de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ es ella misma, al cumplirse $\mathbf{AA} = \mathbf{I}$.

En consecuencia: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

5.5.6 La inversa de una matriz ortogonal

La inversa de una matriz ortogonal es su transpuesta.

En efecto, una matriz cuadrada es ortogonal si se cumple $\mathbf{AA}^t = \mathbf{I}$. En consecuencia:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t.$$

Ejemplo 10

La inversa de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es su transpuesta, al cumplirse:

$$\mathbf{AA}^t = \mathbf{I}$$

En consecuencia: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicios y problemas propuestos

Capítulo 5

1. Determinar si existen las inversas de las matrices, utilizando el procedimiento algebraico descrito para invertir matrices.:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 3 \\ 8 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Invertir las matrices diagonales:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$D = \text{Diag} (1; 2; 3; 4) \quad E = \text{Diag} (1; -3; 0; 6; -9)$$

3. Invertir las matrices triangulares:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Las matrices que se proponen a continuación son singulares, es decir no inversibles. Señale, en cada caso, el motivo por los que son matrices singulares.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Si A es una matriz nulpotente de índice k , demostrar que la suma de todas sus potencias enteras positivas es igual a:

$$(I - A)^{-1} - I$$

6. Hallar la traza de la inversa de la matriz:

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

7. Dada la igualdad matricial: $AX + B = A$, y las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \text{Diag}(2; -3; 4)$$

- Demstrar que $X = I - A^{-1}B$.
- Calcular, si existen, las inversas de A y B .
- Hallar, si es posible, la matriz X .

8. Si $A^t X = A$, donde $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, hallar la matriz $(X^t - A)^t$.

9. Demuestre que si A , B y C son matrices regulares, entonces ABC es una matriz regular y se cumple: $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

10. Compruebe que la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ es su propia inversa.

Además, demuestre que la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ cumple la misma propiedad, si $A = \pm I$ o si se cumple: $a + d = 0$ y $a^2 + bc = 1$.

11. Demuestre las siguientes expresiones, donde todas las matrices son regulares:

- $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$
- $XC = D \Rightarrow X = DC^{-1}$
- $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$
- $AX + BY = C \wedge DX + EY = F \Rightarrow X = (B^{-1}A - E^{-1}D)^{-1}(D^{-1}A - E^{-1}F)$

Sugerencia: premultiplique la primera ecuación del sistema de ecuaciones matriciales por B^{-1} , y la segunda por E^{-1} . Luego reste las igualdades.

12. Encuentre en cada caso la matriz incógnita X :

- $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 14 & -8 \end{bmatrix}$
- $X \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -13 & 8 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

13. Resolver el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 18 & 9 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$$

14. Hallar la matriz X , si se cumple:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Explique su solución.

15. Toda matriz cuadrada A , que cumple:

$$a_{ij} = \begin{cases} \in \mathbb{R} & , i < j \\ 1 & , i = j \\ 0 & , i > j \end{cases}$$

se denomina matriz de Heisenberg.

- Escriba dos matrices de orden 3 que sean matrices de Heisenberg.
 - Compruebe que si A y B son matrices de Heisenberg, las matrices A^t y $A + B$, no son matrices de Heisenberg.
 - Compruebe que el producto y las potencias de matrices de Heisenberg, son matrices de Heisenberg.
 - Compruebe que toda matriz de Heisenberg es una matriz regular.
 - Compruebe que si una matriz de Heisenberg tiene entradas enteras, su inversa es también una matriz con elementos enteros.
16. Encuentre el valor de verdad de la proposición:
"La suma de dos matrices regulares es otra matriz regular".
17. Compruebe que las cuatro afirmaciones siguientes implican las otras tres:
- A es una matriz regular.
 - El sistema homogéneo:

$$a_1x + b_1y = 0$$

$$a_2x + b_2y = 0$$
 tiene como única solución: $x = 0$ e $y = 0$ (Llamada solución trivial)
 - El sistema no homogéneo:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$
 tiene como solución única.
 - $|A| = \det A = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$
- Sugerencia: Acepte como verdadera una de ellas, por ejemplo I, y demuestre que las otras tres son verdaderas.
18. Muestre con un contraejemplo, que en general:

$$(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$

TRANSFORMACIÓN DE MATRICES

6.1 Introducción

En el capítulo precedente logramos hallar la inversa de una matriz haciendo uso de un método algebraico, método que nos llevó a resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas. En este capítulo presentaremos los procedimientos matriciales de Gauss y de Jordan, para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Las técnicas matriciales que presentaremos constituyen el fundamento de la transformación de matrices, pero debemos presentar antes la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones y otros temas sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

6.2 Forma matricial de un sistema de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones lineales de n ecuaciones con m incógnitas, que en general tiene la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

se puede escribir omitiendo, por convención, las incógnitas, los signos positivos de los coeficientes y reemplazando los signos de igualdad por una barra vertical o una columna en blanco, resultando una matriz cuyo nombre específico es el de matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} & b_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

Detalles adicionales de esta matriz ampliada se presentan en el capítulo 11. Debemos observar por ahora que la notación $[A|B]$, indica que A es la matriz de los coeficientes de las incógnitas y B , la matriz de los términos independientes de las ecuaciones, situados en el segundo miembro.

Ejemplo 1

$$\begin{array}{rcl} & x & - 3y + 3z = 1 \\ \text{Sea el sistema} & 4x & + 2y = 6 \\ & 2x & + 7y - 5z = 4 \end{array}$$

A este sistema le corresponde la matriz ampliada:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Observamos que se han omitido las incógnitas, por lo que debemos recordar el orden de ellas. Se omitieron también los signos de igualdad, los que se han reemplazados por una columna vacía (puede ser también una barra vertical, recomendable cuando se trabaja a mano). Además, los signos de adición quedan sobreentendidos. ■

6.3 Transformaciones elementales de filas

Las transformaciones elementales de filas constituyen uno de los recursos matriciales que se utilizará con mayor frecuencia, conjuntamente con la multiplicación de matrices, en lo que resta del presente texto. Se conocen como transformaciones elementales de filas a las operaciones que se efectúan sobre las filas de una matriz, operaciones que resultan directamente de la solución de un sistema de ecuaciones. Posteriormente observaremos que tales transformaciones no cambian ciertas características de una matriz.

A fin de presentar de una manera práctica las transformaciones elementales, resolveremos una ecuación por procedimientos algebraicos conocidos y luego veremos una forma simplificada de solución por medio de matrices, utilizando para ello la matriz ampliada del sistema de ecuaciones y las transformaciones de filas que definiremos.

Desde la escuela secundaria conocemos tres operaciones que transforman un sistema de ecuaciones en otro equivalente¹, ellas son:

- I** Intercambiar dos ecuaciones.
- M** Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.
- A** Agregar a una ecuación un múltiplo de otra ecuación.

Estas tres operaciones son las que se utilizan para resolver algebraicamente un sistema de ecuaciones lineales(Ver § 11.8), y fueron utilizadas por Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855), por lo que en general se llaman **operaciones gaussianas**.

Ejemplo 2

Resolveremos el sistema que sigue haciendo uso de los tres principios enunciados:

$$\begin{array}{rcl} 3x + y + 2z & = & 3 \\ x + y + 3z & = & 0 \\ 2x + 3y - z & = & 9 \end{array} \quad (I)$$

Intercambiamos la primera ecuación con la segunda, de manera que el primer coeficiente de la primera ecuación del sistema equivalente sea la unidad. (Podríamos también agregarle a la primera ecuación -1 veces la tercera ecuación, y resolveremos un sistema diferente, pero equivalente).

$$\begin{array}{rcl} -2y - 7z = 0 & \begin{array}{l} -3x \\ x + y + 3z = 0 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 9 \end{array} & \begin{array}{l} -3x - 3y - 9z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 9 \end{array} \end{array}$$

Agregaremos (-3) veces la primera ecuación a la segunda, para eliminar el primer coeficiente de la segunda ecuación:

$$\begin{array}{rcl} x + y + 3z & = & 0 \\ -2y - 7z & = & 3 \\ (-2) 2x + 3y - z & = & 9 \end{array}$$

¹

Dos sistemas de ecuaciones se dicen equivalentes cuando tienen las mismas soluciones (Ver el capítulo 11 para una explicación detallada).

Ahora, si a la tercera ecuación le agregamos (-2) veces la primera, logramos eliminar el primer coeficiente de la tercera ecuación:

$$\begin{array}{rcl} x + y + 3z & = & 0 \\ -2y - 7z & = & 3 \\ y - 7z & = & 9 \end{array}$$

Intercambiando la segunda ecuación con la tercera, logramos la unidad como segundo coeficiente de la segunda ecuación:

$$\begin{array}{rcl} x + y + 3z & = & 0 \\ y - 7z & = & 9 \\ -2y - 7z & = & 3 \end{array}$$

Ahora, agregaremos a la tercera ecuación el doble de la segunda, logrando eliminar el segundo término de la tercera ecuación:

$$\begin{array}{rcl} x + y + 3z & = & 0 \\ y - 7z & = & 9 \\ -21z & = & 21 \end{array}$$

Finalmente, multiplicando por $(-\frac{1}{21})$ la tercera ecuación:

$$\begin{array}{rcl} x + y + 3z & = & 0 \\ y - 7z & = & 9 \\ z & = & -1 \end{array} \quad (II)$$

El sistema equivalente así hallado, se resuelve en forma sencilla². La tercera ecuación nos da directamente el valor de z :

$$z = -1$$

Reemplazando $z = -1$ en la segunda ecuación, se obtiene:

$$y = 2$$

Finalmente, reemplazando en la primera ecuación, se obtiene:

$$x = 1$$

Observar que el sistema equivalente (II) tiene la forma "TRIANGULAR", y su solución es

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = -1$$

²

Denominada etapa regresiva, o marcha atrás, por encontrar las soluciones del sistema en el orden inverso: z , y , x .

Ahora, si a partir del sistema (II), le agregamos a la primera ecuación (-1) veces la segunda ecuación:

$$\begin{array}{rcl} x & + & 10z = -9 \\ y & - & 7z = 9 \\ & & z = -1 \end{array}$$

Y finalmente para abreviar, le agregaremos a la primera ecuación (-10) veces la tercera, y a la segunda ecuación (7) veces la tercera, se obtiene

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & -1 \end{array} \quad (\text{III})$$

El sistema equivalente (III) es "DIAGONAL" y muestra directamente las tres raíces solución del sistema. ■

Hemos presentado en detalle la manera simple mediante la cual se resuelve algebraicamente un sistema de ecuaciones lineales, utilizando las tres operaciones mencionadas **I**, **M** y **A**. En general se ha utilizado el método algebraico denominado eliminación por reducción³. Ahora debemos ver cómo usar estas operaciones gaussianas en la solución matricial de un sistema de ecuaciones.

Las tres operaciones gaussianas se pueden aplicar a una matriz, con solo cambiar en las definiciones la palabra ecuación por fila:

Operaciones gaussianas en ecuaciones

- I** Intercambiar dos ecuaciones.
- M** Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.
- A** Agregar a una ecuación un múltiplo de otra ecuación.

Operaciones gaussianas en matrices

- I** Intercambiar dos filas.
- M** Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
- A** Agregar a una fila un múltiplo de otra fila.

En cada caso propondremos una notación que utilizaremos más adelante.

³

Ver los distintos métodos algebraicos de solución de un sistema de ecuaciones lineales en el capítulo 11.

Ejemplo 3

En la matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

intercambiar las dos primeras filas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

como el intercambio de filas es evidente, no damos ninguna notación especial. ■

Ejemplo 4

En la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

hacer una transformación elemental de filas, a fin de hacer cero la entrada (2 1).

Para ello, como el elemento a_{11} es igual a la unidad (logrado en el ejemplo anterior), dividimos el elemento $a_{21} = 3$ entre el elemento $a_{11} = 1$ (que llamaremos pivote), y colocamos el resultado con signo cambiado en la parte exterior de la matriz (-3) , en posición próxima al elemento a_{21} . Al costado de la primera fila, que va a actuar sobre la segunda, colocaremos una flecha. Y junto a la tercera fila, que no será modificada, colocamos un punto central($\cdot$).

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ (-3) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ \underline{3} & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

Luego, copiaremos la primera fila (que tiene la flecha, y que actuará sobre la segunda) y la tercera, que tiene el punto (que no será modificada en este paso). Ahora veremos como se encuentran los cuatro números de la segunda fila.

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ (-3) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ \circ \text{ } 2 & & & \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

En general, se multiplican sucesivamente los elementos que se encuentran en la fila que tiene la flecha, por el número que se encuentra en la parte exterior y se le agrega al correspondiente elemento de la fila que se está calculando. Así, por ejemplo, se ha calculado:

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}(-3) + a_{21} &= 0, & a_{12}(-3) + a_{22} &= -2 \\ a_{13}(-3) + a_{23} &= -1, & b_1(-3) + b_2 &= 3 \end{aligned}$$

Completados los cálculos, el elemento a_{21} de la nueva matriz es cero, que es lo que se solicitó. El procedimiento es simple, se ha agregado a la segunda fila, la primera multiplicada por (-3) , mediante una sistematización algebraica. ■

Ejemplo 5

En la matriz ampliada

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 3 \\ 3x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ \textcircled{3} & 1 & 2 & 0 \\ \textcircled{2} & 3 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

hacer una transformación elemental de filas, a fin de hacer cero las entradas $(2 \ 1)$ y $(3 \ 1)$.

Presentaremos las matrices, sin describir las operaciones. Debe tenerse en cuenta, que la primera fila actuará sobre las filas segunda y tercera, cada una con diferentes coeficientes:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -3F_1 \\ (-2)F_1 \end{array} \quad \begin{array}{rrrr} -3 & -3 & -9 & -9 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \end{array} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{rrrr} -2 & -2 & -6 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ \hline 0 & 1 & -4 & 3 \end{array} \end{aligned}$$

Se debe observar que la primera fila de matriz inicial (la que tiene la flecha), se mantiene igual en la segunda matriz. Esta fila actuó sobre las otras dos, y **debe permanecer sin cambios en la siguiente matriz.** ■

Ejemplo 6

En la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & -21 & 21 \end{bmatrix}$$

multiplicar la última fila por $-\frac{1}{21}$, de manera de convertir la matriz **A** en triangular, con elementos iguales a la unidad en su diagonal principal.

$$\left(-\frac{1}{21}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & -21 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Observar la notación empleada. ■

6.4 Triangulación de Gauss

La triangulación de Gauss transforma la matriz **A**, de orden $n \times n$, en una matriz triangular, aplicando sucesivamente las transformaciones elementales de filas a la matriz ampliada $[A|B]$. Luego de esta fase, se procede a hallar una a una las incógnitas, comenzando por la última.

Con el fin de entender el proceso algebraico y su relación con el matricial, resolveremos un sistema mostrando ambos, uno al lado del otro.

Ejemplo 7

Resolver

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - x_3 &= -13 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & -1 & -13 \\ 3 & 4 & 2 & 17 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Intercambiando la primera fila con la tercera (lo que equivale a intercambiar la primera ecuación con la tercera):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 17 \\ 2x_1 - 6x_2 - x_3 &= -13 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 17 \\ 2 & -6 & -1 & -13 \end{bmatrix}$$

La operación realizada permite tener en la posición $a_{1,1}$ un elemento igual a la unidad⁴, de manera que se evita trabajar con fracciones⁵.

En una segunda etapa, disminuirémos la segunda fila en el triple de la primera, y la tercera fila en el doble de la primera. Es la primera fila la que actúa sobre las otras dos, por ello en el paso anterior logramos poner $a_{1,1} = 1$, que actuará como pivote. Los números entre paréntesis, corresponden a los cocientes con signo cambiado siguientes:

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{3}{1} = 3 \quad \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 17 \\ 2x_1 - 6x_2 - x_3 &= -13 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \times \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ (-3) \cdot 3 & 4 & 2 & 17 \\ (-2) \cdot 2 & -6 & -1 & -13 \end{bmatrix}$$

⁴ Veremos más adelante que se puede trabajar con $+1$ ó -1 como pivote, para evitar trabajar con fracciones.

⁵ En lo posible se debe trabajar con números enteros.

Al efectuar, se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_2 - x_3 & = & -1 \\ -8x_2 - 3x_3 & = & -25 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -3 & -25 \end{array} \right]$$

Los cálculos efectuados han permitido tener en la primera columna de la matriz **A** de la matriz aumentada $[A|B]$, una parte de la matriz triangular, matriz a la que se llegará en un par de pasos más.

Para que la matriz **A** sea una matriz triangular, debemos eliminar el -8 de la tercera fila de la matriz **A**. Para ello, utilizaremos como pivote, el elemento a_{22} , que es en este caso la unidad. Lo que vamos a hacer es agregar a la tercera fila (-8) veces la segunda fila. Como la segunda fila actuará sobre la tercera, la segunda fila tendrá la flechita. La primera fila no va a cambiar, y le pondremos un punto($\cdot$).

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_2 - x_3 & = & -1 \\ -8x_2 - 3x_3 & = & -25 \end{array} \quad \rightarrow \quad (8) \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -3 & -25 \end{array} \right]$$

El coeficiente será en este caso, $\frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-8}{1} = -8$, pero con signo cambiado.

Operando se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_2 - x_3 & = & -1 \\ -11x_3 & = & -33 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array} \right] \quad \text{7}$$

A fin de convertir la matriz **A** en una triangular con elementos iguales a la unidad en su diagonal principal, debemos multiplicar la tercera ecuación por $-\frac{1}{11}$, cuya notación se omite, obteniendo finalmente:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_2 - x_3 & = & -1 \\ x_3 & = & 3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \quad \text{8}$$

Como se puede apreciar, el sistema equivalente es mucho más simple de resolver. La matriz **A** es una matriz triangular superior, con elementos iguales a la unidad en su diagonal principal⁶ (aunque este último requisito no es imperativo). Con esta operación ha concluido la primera etapa, denominada paso adelante, corresponde ahora, efectuar el llamado paso atrás. Deben calcularse las raíces, empezando por la última.

Tenemos así, de la última ecuación:

$$x_3 = 3$$

Reemplazando en la segunda ecuación, se obtiene:

$$x_2 = 2$$

Al reemplazar los valores hallados en la primera ecuación, tenemos:

$$x_1 = 1$$

El procedimiento, sin las explicaciones, es:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - x_3 &= -13 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & -1 & -13 \\ 3 & 4 & 2 & 17 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 17 \\ 2 & -6 & -1 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -3 & -25 \end{bmatrix}$$

$$\left(-\frac{1}{11}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

⁶ Es la matriz de Heisenberg (Ver ejemplo 15 del Capítulo 5).

El sistema equivalente, es:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

resolviendo:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$$

6.5 Diagonalización de Jordan

El procedimiento, conocido también como de Gauss-Jordan, transforma la matriz **A** en una matriz diagonal, o mejor aun, en la matriz identidad. El procedimiento es similar al de Gauss previamente descrito, por lo que se procede a presentarlo mediante un ejemplo

Ejemplo 8

Resolver

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & - & 4x_2 & & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Expresando el sistema como una matriz ampliada $[A|B]$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ (-1) \\ (-2) \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Usaremos como pivote el elemento $a_{11} = 1$

Los cocientes son: $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\left(\frac{1}{1}\right) = -1$ y

$-\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\left(\frac{2}{1}\right) = -2$. El objetivo es obtener

$[1 \ 0 \ 0]$ en la primera columna.

El pivote es $a_{23} = 1$. Los cocientes son

$\frac{a_{13}}{a_{23}} = -\left(\frac{0}{1}\right) = 0$ y $\frac{a_{33}}{a_{23}} = -\left(\frac{1}{1}\right) = -1$. Se busca

$[0 \ 1 \ 0]$ en la tercera columna.

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ (-1) \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 9 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left(\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se multiplica la tercera fila por $\frac{1}{3}$, buscando que el pivote a_{32} sea la unidad, y evitar fracciones.

$$\begin{array}{l} (-4) \\ (-6) \\ \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con a_{32} como pivote, los cocientes son:

$$-\frac{a_{12}}{a_{32}} = -\left(-\frac{4}{1}\right) = 4 \quad \text{y} \quad -\frac{a_{22}}{a_{32}} = -\left(\frac{6}{1}\right) = -6$$

Se busca $[0 \ 0 \ 1]$ en la segunda columna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, para que la matriz **A** se convierta en la matriz **I**, al reordenar sus filas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz **A** se ha transformado en la matriz **I**, el sistema está resuelto.

Es evidente que el sistema equivalente es:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & = 2 \\ & x_2 & = 0 \\ & & x_3 = -1 \end{array}$$



Observaciones

1. Por el procedimiento de diagonalización de Gauss-Jordan es mucho más sencillo llegar a la solución que por el de triangulación de Gauss.
2. No interesa el orden en que las columnas de la matriz **A** se transformen en las columnas de la matriz identidad. En el ejemplo resuelto, se trabaja inicialmente con la primera columna, luego con la tercera columna y finalmente con la segunda columna.
Un reordenamiento final de filas, permite llegar a la matriz **I**.
3. Debe observarse que el hecho de ser uno el pivote, el trabajo se realiza solamente con números enteros. Pero, debe anotarse que el pivote puede ser $+1$ ó -1 , en ambos casos se evita trabajar con fracciones o decimales.

Proponemos a continuación un sistema de ecuaciones que no posee ningún elemento $+1$ ó -1 en la matriz **A**. Sin embargo, buscaremos pivotes $+1$ ó -1 trabajando con los elementos de la matriz **A**, de manera de evitar tener que trabajar con fracciones.

Ejemplo 9

Resolver el sistema

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & + & 5x_2 & + & 7x_3 & = & -8 \\ 10x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 17 \\ 9x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 13 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & -8 \\ 10 & 4 & 5 & 17 \\ 9 & 6 & 2 & 13 \end{bmatrix}$$

Existen muchas maneras de lograr elementos unitarios en alguna entrada de la matriz **A**. Por ejemplo si la primera fila, con elementos arbitrarios (-1) y (-1) , actúa sobre las filas 2^{da} y 3^{ra} , se logra un elemento pivotal unitario en la posición a_{32} . Se trabaja con la fila 2^{da} a fin de simplificar sus elementos. Una segunda manera podría ser restar la 2^{da} fila de la 1^{ra} fila, obteniendo $a_{12} = 1$. Otra forma podría ser 2^{da} fila menos la 3^{ra} . La elección es del que opera, buscando la mejor manera de lograr $+1$ ó -1 . Haremos uso de la primera sugerencia, para mostrar cómo se trabaja cuando es necesario buscar los pivotes unitarios.

El desarrollo completo se presenta en dos columnas:

$$\begin{array}{l}
 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & -8 \\ 10 & 4 & 5 & 17 \\ 9 & 6 & 2 & 13 \end{bmatrix} \\
 (-1) \\
 (-1)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 18 & -21 \\ 0 & 0 & 227 & -227 \\ 0 & 1 & 103 & -105 \end{bmatrix} \\
 \\
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 -5 \\
 (1) \\
 \rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & -8 \\ 7 & -1 & -2 & 25 \\ 6 & 1 & -5 & 21 \end{bmatrix} \\
 \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (18) \\
 \rightarrow \\
 (-103)
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -18 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 103 & -105 \end{bmatrix} \\
 \\
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (2) \\
 \rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} 27 & 0 & 32 & -113 \\ 13 & 0 & -7 & 46 \\ 6 & 1 & -5 & 21 \end{bmatrix} \\
 \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
 \\
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \rightarrow \\
 (13) \\
 (6)
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 18 & -21 \\ 13 & 0 & -7 & 46 \\ 6 & 1 & -5 & 21 \end{bmatrix} \\
 \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 \\
 \end{array}$$

En la tercera matriz, el operador tiene un 1 en la 2^{da} columna, pero esta columna es parte de la matriz identidad, es decir, ya se trabajó con ella. En consecuencia nos vemos forzados a buscar una unidad en la 1^{ra} ó 3^{ra} columna. Decidimos aumentar la 1^{ra} fila en dos veces la segunda; es por ello que escoge el factor (2), de manera que la segunda fila actúe sobre la primera con un factor (2). La pregunta es, de dónde se obtuvo el factor (2): simplemente observamos que: $-27 + (2)13 = -1$, justo el pivote que buscábamos. El resto de la secuencia operativa es simple, pero requiere que el alumno repita el ejemplo, buscando él mismo los factores, siempre pensando en las columnas de la matriz identidad. Probablemente obtenga una secuencia de tableros o matrices diferente, tal vez en menor número. El lector debè recordar que teníamos hasta tres propuestas para buscar el primer pivote, ¿qué tal si intenta con las otras alternativas?, ¿será más simple?, ¿se obtendrá un desarrollo con un menor número de matrices? Son preguntas que el lector acucioso debe buscar, lo importante es que ya se tiene un método simple para resolver sistemas de ecuaciones lineales. ■

Sin embargo, el tema no está agotado. ¿Tiene siempre solución un sistema de n ecuaciones con n incógnitas? La respuesta no es simple en este momento, justamente los capítulos 11 y 12 tratan el tema en detalle. Sin embargo adelantamos, la respuesta es NO.

Los sistemas que tienen igual número de ecuaciones que incógnitas, no siempre tienen solución. Algunas veces tienen solución única, como los ejemplos precedentes, otras veces simplemente no tienen solución, y en otros casos tienen infinitas soluciones que resuelven el sistema. Por el momento, nos limitaremos a presentar tres ejemplos que ilustrarán los casos especiales.

Ejemplo 10

Resolver el sistema

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\3x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 10\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones lineales es uno que puede presentarse en cualquier problema algebraico. Sin embargo, como veremos, es un sistema que no posee solución, a pesar que se tienen tres ecuaciones con tres incógnitas⁷. Es un error pensar que si un sistema tiene un número de ecuaciones igual al número de incógnitas, el sistema tiene siempre solución. En los capítulos 11 y 12 se zanjará definitivamente el problema. Por ahora, intuitivamente encontraremos una solución a este tipo de problemas. Trabajando el ejemplo propuesto, se tiene:

$$\begin{aligned}&\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ (-1) & 1 & 1 & -1 & 2 \\ (-3) & 3 & 5 & 5 & 10 \end{bmatrix} \\&(-2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ (-1) & 0 & -1 & -4 & -14 \end{bmatrix} \\&\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

⁷ Es frecuente encontrar en la formación preuniversitaria series de ejercicios sobre sistemas de ecuaciones lineales, en las que todos los sistemas tienen solución.

La última ecuación es:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -8.$$

Esta ecuación no admite solución alguna. Por ese motivo, al existir una ecuación que no admite solución, el sistema de ecuaciones no tiene solución, y se dice que es inconsistente. La ecuación: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -8$ es incompatible o absurda. ■

Ejemplo 11.

Resolver el sistema:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ (-1) \\ (-3) \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 5 & 18 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} (-2) \\ \rightarrow \\ (-1) \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

La última ecuación es:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0.$$

Esta ecuación es válida para todo valor de las incógnitas, es decir cualquier terna de valores verifica esta ecuación. Se le llama ecuación superflua o redundante, puesto que pudo no estar incluida en el sistema, y este tendría la misma solución, si es que la tuviera.

Es decir, la ecuación: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$, no nos ayuda a resolver el sistema, el cual tendría dos ecuaciones y tres incógnitas. Por ahora no es posible encontrar solución al sistema, el cual admite infinidad de soluciones. Este tipo de sistemas se estudiará en detalle en el capítulo 12. ■

Ejemplo 12

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 - x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

El sistema tiene tres ecuaciones, pero solamente dos incógnitas. En estos casos, se trabaja igualmente con la matriz ampliada $[A|B]$, efectuando en ella las transformaciones gaussianas.

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ (-4) \\ (-2) \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} (-1) \\ (5) \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

La última ecuación:

$$0x_1 + 0x_2 = 0$$

es superflua o redundante, es decir admite como solución cualquier par de valores $(x_1; x_2)$. Por ello, son las dos primeras ecuaciones las que debemos tomar en cuenta para la solución del sistema.

Estas ecuaciones nos dan directamente:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2.$$

Por lo tanto, ésta es la solución del sistema, y como el sistema tiene solución, es un sistema consistente. ■

6.6 Matrices escalonadas

Una matriz es de forma escalonada reducida si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

1. Cualquier fila cuyos elementos son todos ceros debe estar debajo de aquellas filas que tengan componentes no nulas.
2. El primer elemento no nulo de una fila debe ser 1, elemento al que llamamos distinguido o directriz, y la columna a la que pertenece se le llamará distinguida.
3. El número de ceros que precede a cada elemento distinguido o directriz aumenta, formando una escalera descendente de ceros.
4. En toda columna distinguida o directriz, el único elemento no nulo es el 1.

Una matriz de la forma escalonada reducida se llama matriz escalonada reducida. Si la matriz sólo cumple las tres primeras condiciones, se llama matriz escalonada. Dada una matriz cualquiera, ella se transforma en una matriz escalonada o en una escalonada reducida, aplicando a la matriz transformaciones elementales de filas.

Ejemplo 13

Las siguientes matrices son escalonadas reducidas por filas.

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right]$$

$$B = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$C = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$D = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

En la matriz **A** son distinguidas las columnas 1^{ra}, 2^{da}, 3^{ra} y 4^{ta}. En la matriz **B**, todas son columnas distinguidas. En la matriz **C** son distinguidas las columnas 2^{da} y 4^{ta}. La matriz **D** no tiene columnas distinguidas. ■

Ejemplo 14

Las siguientes matrices son escalonadas

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El lector debe observar que las matrices **E**, **F**, **G** y **H**, no cumplen la cuarta condición. Es decir, tienen más de un elemento en las columnas distinguidas, por lo tanto son matrices escalonadas, pero no matrices escalonadas reducidas. ■

Ejemplo 15

Transformar la matriz dada en matriz escalonada reducida.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 3 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Realizando transformaciones elementales de filas, se tiene sucesivamente:

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ (1) \\ (-1) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 3 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (-3) \\ \rightarrow \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (-4) \\ (2) \\ \rightarrow \\ (-1) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 12 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

El lector debe observar que cuando se aplicaron los procedimientos de triangulación de Gauss o de diagonalización de Jordan, llamado también de Gauss-Jordan, se está llevando la matriz aumentada del sistema de ecuaciones a una forma escalonada en el primer caso y a una forma escalonada reducida en el segundo caso. La importancia de las matrices escalonadas reducidas se apreciará en el capítulo 12, en el análisis de los sistemas de ecuaciones lineales rectangulares, (cuando el número de ecuaciones es diferente al número de incógnitas).

Ejemplo 16

En el ejemplo 7, se propuso resolver

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 6x_2 - x_3 & = & -13 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = & 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \end{array}$$

cuya matriz aumentada inicial era:

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & -1 & -13 \\ 3 & 4 & 2 & 17 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Mediante transformaciones elementales de filas, la matriz aumentada se transformó en:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Debe observarse que esta matriz es una matriz escalonada. En el proceso que denominamos triangulación de Gauss, la matriz ampliada se transforma en una matriz escalonada, como primera parte del proceso de solución del sistema de ecuaciones lineales. ■

Ejemplo 17

En el ejercicio 8, se pidió resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

cuya matriz ampliada inicial era:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Al efectuar transformaciones elementales de filas se llegó a una matriz escalonada reducida, como procedimiento de Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

■

Ejemplo 18

En el ejemplo 11 se propuso un sistema, que no llegamos a resolver, cuya matriz aumentada inicial era:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 5 & 18 \end{bmatrix}$$

Por transformaciones lineales de filas se llega a la matriz escalonada reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se observa que esta matriz escalonada reducida por filas tiene dos columnas distinguidas o directrices, la primera y la segunda.

Reescribamos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x_1 + \quad - 5x_3 &= -4 \\ \quad x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Es evidente que por cada valor que le asignemos a la incógnita x_3 , se encontrará valores para las incógnitas x_1 y x_2 . Entonces, despejemos las incógnitas x_1 y x_2 en

términos de la x_3 :

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 + 5x_3 \\ x_2 &= 6 - 4x_3 \end{aligned}$$

Adelantándonos a las explicaciones teóricas que se presentarán en los capítulos 11 y 12, intuitivamente asignemos a x_3 un valor cualquiera $t \in \mathbb{R}$, por lo que el sistema se puede expresar como:

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 + 5t \\ x_2 &= 6 - 4t \\ x_3 &= t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$$

De estas expresiones se puede afirmar que el sistema admite infinitas soluciones, encontrando soluciones particulares asignando a t un número real⁸ cualquiera. ■

⁸ Decimos que t es real, porque asumimos que se resuelven sistemas de ecuaciones lineales en el conjunto de los números reales. En caso contrario, t puede ser elemento de los números complejos.

6.7 Matrices equivalentes por filas

Dos matrices **A** y **B** se llaman equivalentes por filas, denotadas $A \sim B$, si una de ellas se obtiene de la otra mediante transformaciones elementales de filas.

En general, cuando se transforma una matriz mediante transformaciones de filas, se puede escribir:

$$A \sim A' \sim A'' \sim \dots \sim B$$

En realidad todas las matrices: **A**, **A'**, **A''**, ... y **B**, son dos a dos equivalentes por filas.

6.8 Transformación elemental de columnas

Las operaciones elementales **I**, **A** y **M**, presentadas en este capítulo, se han explicado actuando sobre las filas de una matriz, llamándolas operaciones elementales de filas. Si las mismas se aplican a las columnas se les denomina operaciones elementales de columnas, definidas de la siguiente manera:

- I** Intercambiar dos columnas.
- M** Multiplicar una columna por un número distinto de cero.
- A** Agregar a una columna un múltiplo de otra columna.

Ejemplo 19

Realizar operaciones elementales de columnas en la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

Como primer paso, dividamos las columnas 1^{ra}, 3^{da} y 5^{ta}, por 2, 3 y 12, respectivamente.

Luego, las llevamos hacia las primeras columnas, para obtener:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Si disminuimos las columnas 4^{ta} y 6^{ta} en 4 y 15 veces la primera columna, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, disminuimos las columnas 4^{ta} y 6^{ta} en 2 y 3 veces la segunda columna, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Disminuyendo la 5^{ta} columna en 7 veces la tercera, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dividiendo la 5^{ta} columna entre 5, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, se puede aumentar la 6^{ta} columna en 3 veces la quinta columna, y se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si hacemos un reordenamiento de las columnas, se obtiene finalmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si se desea utilizar los cocientes que se presentaron al hacer las transformaciones elementales de filas, se puede hacer transformaciones de filas a la transpuesta de la matriz. Al final se obtiene la respuesta, transponiendo la matriz.

Ejemplo 20

Realizar operaciones elementales de columnas en la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

Transponiendo la matriz, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 15 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego de hacer transformaciones de filas, que se dejan como trabajo al estudiante, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transponiendo la matriz anterior, se obtiene la respuesta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La transformación elemental de columnas se utilizará exclusivamente en este texto para transformar una matriz a su forma normal.

6.9 Forma normal de una matriz

Si a una matriz $A_{m \times n}$, por aplicación de transformaciones elementales de filas y columnas se convierte en una de las siguientes formas:

$$[I_r] \quad [I_r \quad 0] \quad \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se dice que la matriz está en su forma normal. En ella, I_r es una matriz identidad de orden n y $[0]$ es una matriz nula cualquiera (cuadrada o rectangular). Decimos "a su forma normal", porque toda matriz tiene una única forma normal.

Para obtener la forma normal de una matriz se procede a efectuar transformaciones elementales de filas y de columnas, en cualquier orden o secuencia, siempre se llegará a la misma forma normal. Se recomienda efectuar primero las transformaciones elementales de filas y luego las de columnas, como un manera de ordenar el trabajo, pero el resultado será siempre el mismo, independientemente de la secuencia de los cálculos.

Ejemplo 21

Transformar la matriz dada a su forma normal.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 3 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Mediante transformaciones elementales de fila, la matriz se convierte en (ver ejercicio 15):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Efectuando transformaciones elementales de columnas, se llega fácilmente a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De manera que la matriz es normal de la forma:

$$\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.10 Rango de una matriz

Se llama rango o característica de una matriz al orden de la matriz identidad que aparece en la forma normal de una matriz. Así, si la forma normal de una matriz es una de las siguientes

$$[I_r] \quad [I_r \ 0] \quad \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

el rango de la matriz es r .

Este número es único para cada matriz, puesto que es también única la forma normal de cada matriz. El rango o característica es importante en el análisis de inconsistencia y consistencia, determinación e indeterminación de sistemas de ecuaciones lineales.

Si una matriz es P y su rango es 3, el rango lo podemos denotar como $r[P] = 3$.

Es interesante observar, que no es necesario llegar a la forma normal de una matriz para determinar su rango o característica. Si se observa con cuidado los ejercicios previos, se notará que el rango es igual al número de filas no nulas de la matriz escalonada o de la escalonada reducida de una matriz. En consecuencia, se puede definir:

El rango de una matriz escalonada es igual al número de filas con elementos no nulos.

Ejemplo 22

Determinar el rango de las siguientes matrices escalonadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad r=4$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r=4$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r=2$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r=1$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad r=4$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r=4$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r=3$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r=3$$

Las cuatro primeras matrices, **A**, **B**, **C** y **D**, son matrices escalonadas reducidas, y las cuatro siguientes, **E**, **F**, **G** y **H**, son simplemente matrices escalonadas. En todas ellas, la determinación del rango es por simple observación:

$$\begin{array}{llll} r[\mathbf{A}] = 4 & r[\mathbf{B}] = 4 & r[\mathbf{C}] = 2 & r[\mathbf{D}] = 1 \\ r[\mathbf{E}] = 4 & r[\mathbf{F}] = 4 & r[\mathbf{G}] = 3 & r[\mathbf{H}] = 3 \end{array}$$

Como se ha indicado, la transformación elemental de columnas se usa exclusivamente para llegar a la forma normal de una matriz. Pero como no es necesario llegar a la forma normal de una matriz para conocer su rango, la transformación elemental de columnas se usará únicamente cuando se pida explícitamente llegar a la forma normal de una matriz.

Se preguntará,

- ¿qué significado tiene el rango o característica de una matriz?
- ¿Por qué una matriz tiene una única forma normal?

La respuesta a estas preguntas es simple.

En primer lugar, podemos preguntarnos qué significado tienen las filas formadas exclusivamente por ceros en una matriz escalonada. Cuando una fila se convierte en ceros y luego se traslada hacia el final de la matriz, es porque esta fila es una combinación lineal de las filas no nulas. Es decir, depende linealmente de ellas y por ello al efectuar las transformaciones elementales de filas, ella se ha convertido en una fila de ceros. En consecuencia, las filas no nulas son aquellas que son linealmente independientes, y el rango o característica de una matriz no es sino el número de filas de la matriz que son filas linealmente independientes, y por ello este número es único en cada matriz. En verdad diremos, sin dar ninguna demostración, que el número de filas linealmente independientes de una matriz es igual al número de columnas linealmente independientes, este número común es el que se denomina rango o característica de una matriz.

Otra definición del rango de una matriz está relacionado con la teoría de determinantes, y señala: El rango de una matriz es r , si y sólo si, todo menor de la matriz de orden $r + 1$ es cero, siendo no nulo por lo menos un menor de orden r . Esta definición se comprenderá al estudiar la teoría de determinantes en el capítulo 9 del texto, aunque esta definición sólo tiene interés histórico.

Ejercicios y problemas propuestos

Capítulo 6

1. Escribir cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 3x - y - z = 11 \\ 2x + 4y + z = 1 \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ x + 5z = -40 \\ x - y + z = -20 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} & \begin{array}{l} 3x - y = 0 \\ x - 7y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{array} \\ \text{d)} & \begin{array}{l} 5x + 3y + z = 9 \\ 4x + y - 2z = 3 \end{array} \end{array}$$

2. Comprobar que son equivalentes los sistemas:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} x + y = 0 \\ 2x - 3y = 5 \end{array} \\ & \begin{array}{l} 2x + 5y = -3 \\ 3x - y = 4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{b)} & \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{array} \\ & \begin{array}{l} x - y + 3z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 9 \end{array} \end{array}$$

3. Determinar a y b, de manera que los sistemas siguientes sean equivalentes:

$$\begin{array}{ll} ax + 3y = 16 & 3x + ay = 14 \\ bx + 4y = 18 & 4x + by = 12 \end{array}$$

4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por Gauss – Jordan:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} x + y - z = -2 \\ 2x - y + z = 5 \\ x - 2y - 2z = -1 \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} 2x + y - z = -1 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = -12 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} & \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 3x - y - z = 11 \\ 2x + 4y + z = 1 \end{array} \\ \text{d)} & \begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ x + 2y + 5z = 0 \\ x - y + z = -20 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{e)} & \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + 4y + 5z = 6 \\ 2y - z = -1 \end{array} \\ \text{f)} & \begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad & x + 5y - z = -4 \\ & 3x - 6y - 2z = -11 \\ & 3y - z = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad & 3x - 2y + z = 4 \\ & x + 5z = -3 \\ & 2x - y + z = -4 \end{aligned}$$

5. Resolver, si es posible, los siguientes sistemas de ecuaciones por Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2x - y - z = -1 \\ & 4x - y - z = 0 \\ & 6x - 3y + 2z = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & x + 3y - z = 12 \\ & 2x - y + 3z = 4 \\ & 3x + 2y + 2z = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & x + 2y - z = 0 \\ & 2x - y + z = 1 \\ & 3x - y + 2z = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & 2x + 3y + 4z = 11 \\ & 3x + 5y - 4z = 7 \\ & 4x + 7y - 2z = 13 \end{aligned}$$

6. Resolver, si es posible, los siguientes sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas por Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x + 2y = 3 \\ & 3x - 2y = 1 \\ & x + y = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & x + 3y = 2 \\ & 7x + y = -26 \\ & 4x - 3y = -22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & x - 7y = -17 \\ & 3x - y = -11 \\ & 3x + 4y = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & 3x + 4y = 21 \\ & 3x - y = -24 \\ & 7x + y = -26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & 3x - y = 0 \\ & x - 7y = 0 \\ & 3x + y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & 5x + 3y = 2 \\ & 4x + y = -2 \\ & 4x - 3y = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad & 3x - y = 3 \\ & x - 3y = 25 \\ & x + y = -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad & 3x - y = -7 \\ & x - 3y = -5 \\ & 3x + y = -5 \end{aligned}$$

7. Si el sistema

$$\begin{aligned} & ax + 2y + 2z = 29 \\ & 2x + by - 6z = -22 \\ & 2x + 3y + 4z = 53 \\ & 3x + 5y - 4z = 2 \\ & 4x + 7y - 2z = 31 \end{aligned}$$

tiene solución única, hallar a y b.

8. Determinar a , b y c , de manera que el sistema de 6 ecuaciones lineales con 3 incógnitas propuesto, tenga solución, es decir sea un sistema consistente:

$$x + y + z = 9$$

$$3x - y + 2z = 10$$

$$2x + 7y - 3z = 8$$

$$ax - by + cz = 20$$

$$ax + by + cz = 44$$

$$10ax + 3by - cz = 26$$

9. Transformar las matrices propuestas a su forma escalonada y luego a su forma escalonada reducida. En cada caso, determine el rango de la matriz. Se debe tener presente que solamente se pueden utilizar las transformaciones elementales de filas en las operaciones.

a)
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

d)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

e)
$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

f)
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

g)
$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

h)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$i) \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ -3 & 6 & 12 & -9 \\ 2 & -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$j) \begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

10. Transformar las matrices propuestas en el ejercicio anterior a su forma normal y determinar, en cada caso el rango de la matriz.
Para llegar a la forma normal, es posible aplicar transformaciones de filas y de columnas indistintamente.

MATRICES DE TRANSFORMACIÓN

7.1 Introducción

Este capítulo se presenta con tres objetivos. El primer objetivo es hacer ver que las transformaciones elementales de filas, de las cuales hicimos uso extensivamente en el capítulo anterior, no son sino premultiplicaciones de matrices elementales, y que las operaciones elementales de columnas, son posmultiplicaciones de matrices igualmente elementales. En segundo lugar, proponer la teoría para presentar el método de inversión de matrices por transformaciones sucesivas. Como tercer objetivo, definiremos las matrices elementales, veremos qué significan, cómo se utilizan, las invertiremos y mostraremos cómo descomponer una matriz regular o inversible en un producto de ellas. Finalmente veremos matrices de transformación generales, aplicadas como premultiplicadoras y posmultiplicadoras, que igualmente permitirán invertir matrices.

7.2 Matrices elementales

Una matriz cuadrada de orden n se llama elemental, si ella se obtiene a partir de la matriz identidad I_n , por medio de una sola operación elemental de filas o de columnas.

En general denotaremos las matrices elementales como $F_{s,t}$, $F_s(k)$ y $F_{s,t}(k)$, matrices de premultiplicación que resultan al aplicar a la matriz I , las operaciones elementales de filas: Intercambio de las filas s y t , Multiplicación de la fila s por una constante k , $k \neq 0$ y Agregar a la fila s , la fila t multiplicada por la constante k .

En forma similar, las matrices elementales $C_{s,t}$, $C_s(k)$ y $C_{s,t}(k)$, son matrices de posmultiplicación que resultan al aplicar a una matriz I , las operaciones elementales de columnas I , M y A , respectivamente.

Ejemplo 1

Determinar las matrices elementales que resultan de aplicar a la matriz I_3 , las transformaciones elementales de filas siguientes:

1. Invertir las filas segunda y tercera.
2. Multiplicar la tercera fila por -5
3. Agregar a la primera fila, el doble de la tercera.

Sea la matriz:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. I Intercambiar las filas 2^{da} y 3^{ra}

$$F_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. M Multiplicar la fila 3^{ra} por -5

$$F_3(-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

3. A Agregar a la 1^{ra} fila el doble de la 3^{ra}.

$$F_{13}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si una matriz elemental F premultiplica a una matriz A , efectúa en la matriz A la misma operación elemental que se efectuó en la matriz elemental.

En teoría, si "e" es una operación elemental de filas que opera sobre una matriz I , se obtiene $eI = F$, demostraremos que $e(A) = FA$.

En efecto, se cumple: $e(A) = e(IA) = e(I)(A) = FA$

Ejemplo 2

Premultiplicar la matriz:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

por las matrices F_{23} , $F_3(-5)$ y $F_{13}(2)$, determinadas en el ejemplo anterior.

Premultiplicando como se ha solicitado, se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$F_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix} = F_{23} A$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$F_3(-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -5g & -5h & -5i \end{bmatrix} = F_3(-5) A$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$F_{13}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = F_{13}(2) A$$

Como puede observarse, el efecto de premultiplicar la matriz A por las matrices elementales F , hace las veces de la operación elemental que operó sobre la matriz I , para construir la matriz elemental F . ■

En consecuencia, todo lo realizado en el capítulo anterior, relativo a transformaciones elementales de filas pudo haber sido ejecutado mediante premultiplicaciones de matrices elementales, una por cada operación. Es evidente, que las transformaciones elementales de filas, que en el capítulo anterior parecían ser nuevas operaciones independientes de una operación matricial previamente definida, no lo son.

Finalmente, podemos afirmar que "si las matrices A y B son matrices equivalentes por filas, $A \sim B$, debe cumplirse: $B = PA$, donde P es el producto de matrices elementales $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k$ ", es decir:

$$A \sim B \Leftrightarrow B = F_1 F_2 F_3 \dots F_k A$$

La acción premultiplicadora de una matriz elemental F sobre una matriz A , afecta sus filas. De la misma manera, si las matrices elementales $C_{s,t}$, $C_s(k)$ y $C_{s,t}(k)$ actúan como posmultiplicadoras de una matriz A , afectarán las columnas de la matriz.

Ejemplo 3

Posmultiplicar la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

por las matrices $C_{2,3}$, $C_3(-5)$ y $C_{1,3}(2)$, que indican, respectivamente:

$C_{2,3}$: Intercambiar las columnas 2^{da} y 3^{ra}.

$C_3(-5)$: Multiplicar la tercera columna por -5

$C_{1,3}(2)$: Agregar a la 1^{ra} columna el doble de la 3^{ra}.

Efectuando los cálculos solicitados, se obtiene:

$$C_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{bmatrix} = A C_{23}$$

$$C_3(-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & -5c \\ d & e & -5f \\ g & h & -5i \end{bmatrix} = A C_3(-5)$$

$$C_{13}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a + 2c & b & c \\ d + 2f & e & f \\ g + 2i & h & i \end{bmatrix} = A C_{13}(2)$$

En consecuencia, si las matrices **A** y **B** son matrices equivalentes por columnas, $A \sim B$, debe cumplirse: $B = AQ$, donde **Q** es el producto de matrices elementales $C_k, \dots, C_2, C_3, C_1$, es decir:

$$A \sim B \Leftrightarrow B = A C_k \dots C_3 C_2 C_1$$

Como toda matriz **A** tiene una matriz normal **N**, que resulta de aplicar transformaciones elementales de filas y de columnas a la matriz **A**, toda matriz puede transformarse a su forma normal, mediante dos matrices **P** y **Q** que son productos de matrices elementales convenientemente construidas, como **PAQ**:

$$N = PAQ$$

En el siguiente ejemplo, observemos cómo se obtiene una matriz **P** de manera que la operación $\mathbf{PA} = \mathbf{B}$, convierta la matriz **A** en una matriz **B** que tenga una determinada forma.

Ejemplo 4:

Dada la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix}$$

Determinar una matriz **P** tal que el producto $\mathbf{PA} = \mathbf{B}$, donde **B** sea una matriz que tenga como primera columna, la primera columna de la matriz identidad.

Determinaremos una matriz **P**, que convierta la primera columna de la matriz dada **A**, en la primera columna de la matriz **I**. El procedimiento es simple, y se explica por sí mismo. Se trabaja con el esquema $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$, y se realizan las transformaciones de filas necesarias de manera que la matriz **A** tenga las características solicitadas. Al transformar la matriz **A** en la matriz solicitada **B**, la matriz **I** se habrá convertido en la matriz buscada **P**. El trabajo se realiza de la siguiente manera:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] \Rightarrow [\mathbf{B} \mid \mathbf{P}]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 13 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las transformaciones son:

$$\mathbf{F}_{12} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 13 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_1\left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 2,5 & 2 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 13 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{31}(-4) \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 2,5 & 2 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz **B** en el último esquema **[B P]** tiene la forma solicitada, se tiene la matriz **P** buscada:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se puede comprobar que:

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 2,5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

El esquema utilizado es en consecuencia:

$$[\mathbf{A}_{m \ n} \quad \mathbf{I}_{m \ m}] \rightarrow [\mathbf{B}_{m \ n} \quad \mathbf{P}_{m \ m}]$$

El estudiante puede optar por ir colocando las matrices elementales $\mathbf{F}_i$ en la forma usual para premultiplicar:

$$\begin{array}{c} [\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] \\ [\mathbf{F}_1][\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{P}_1] \\ [\mathbf{F}_2][\mathbf{A}_2 \quad \mathbf{P}_2] \\ \vdots \\ [\mathbf{F}_k][\mathbf{B} \quad \mathbf{P}] \end{array}$$

o utilizar en su lugar la flecha y los respectivos factores de multiplicación. ■

Si se quisiera encontrar una matriz **Q**, tal que mediante la operación **AQ = B**, transforme la matriz **A** en la matriz **B**, que tenga alguna característica en sus filas, se procedería a efectuar transformaciones elementales de columnas (que en el esquema se simbolizan como $\rightarrow$) utilizando el siguiente esquema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n \ n} \\ \mathbf{A}_{m \ n} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{n \ n} \\ \mathbf{B}_{m \ n} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5

Determinar las matrices **P** y **Q** que transformen una matriz **A** a su forma normal **N**, mediante el cálculo: **PAQ = N**.

Sea la matriz **A**:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix}$$

El problema propuesto se resuelve utilizando los dos conceptos presentados. Se pide encontrar matrices¹ **P** y **Q**, de manera que la operación matricial **PAQ** dé como resultado la matriz normal **N** de la matriz **A**.

El esquema de trabajo sería el siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} I_{n\ n} & & & & Q_{n\ n} \\ & & \ggg & & \\ A_{m\ n} & I_{m\ m} & & N_{m\ n} & P_{m\ m} \end{array}$$

donde el símbolo $\ggg$, señala que se deberán efectuar transformaciones elementales de filas y columnas en cualquier secuencia, hasta que la matriz **A** tenga la forma normal **N**.

El esquema inicial, donde por comodidad en este ejercicio se omiten los corchetes, es:

$$\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 13 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

¹ Como es fácil suponer, no existe un único par de matrices **P** y **Q** que resuelven el problema. Todo dependerá de la secuencia en la que se ejecuten las operaciones elementales o cómo se seleccionen las matrices elementales necesarias.

Luego de las transformaciones: $F_{1,2}$, $F_1(0,5)$, $F_{3,1}(-4)$, $F_{3,2}(-1)$, $F_2(0,5)$ y $F_{1,2}(-1,5)$, el esquema tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 0,25 & -1 & -0,75 & 0,50 & 0 & \\ 0 & 1 & 1,50 & 2 & 0,50 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & \end{array}$$

A continuación, se efectúan las siguientes operaciones de columnas: $C_{3,1}(-0,25)$, $C_{4,1}(1)$, $C_{3,2}(-1,50)$ y $C_{4,2}(-2)$, y se obtiene:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -0,25 & -1 & & & & \\ 0 & 1 & -1,50 & -2 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -0,75 & 0,50 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,50 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & \end{array}$$

la forma normal de la matriz **A** es:

$$N = \begin{bmatrix} I_2 & O_{2,2} \\ O_{1,2} & O_{1,2} \end{bmatrix}$$

y su rango es 2.

Por lo tanto, las matrices pedidas son:

$$P = \begin{bmatrix} -0,75 & 0,50 & 0 \\ 0,50 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,25 & -1 \\ 0 & 1 & -1,50 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El lector mediante el esquema

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PA \end{bmatrix} N \end{bmatrix}$$

podrá comprobar que $N = PAQ$, tal como se pedía.

Es importante recordar que estas matrices P y Q no son únicas, dependen de las secuencias elegidas al efectuar las transformaciones de filas y de columnas. ■

7.3 Inversa de una matriz elemental

Si se aplica una transformación elemental e a la matriz I para producir la matriz elemental E , existe otra operación e' que aplicada a la matriz E , reproduce la matriz I . En consecuencia, las operaciones elementales e y e' son inversas, y las matrices elementales E y E' son inversas, es decir, $EE' = I$, y podemos decir que

Toda matriz elemental es inversible, y su inversa es también una matriz elemental.

Se puede demostrar, por multiplicaciones directas, que se cumple:

	F	F^{-1}
Intercambio de filas	F_{rs}	F_{rs}
Multiplicación de una fila por k , $k \neq 0$	$F_r(k)$	$F_r(1/k)$
Adicionar a la fila r , k veces la fila s	$F_{rs}(k)$	$F_{rs}(-k)$

Ejemplo 5

Comprobar que las inversas de las matrices del ejemplo 1

$$F_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_3(-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$F_{13}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cumplen las expresiones propuestas en el cuadro anterior.

$$F_{23}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$F_{13}^{-1}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_{13}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$F_3^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$F_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

En forma similar se pueden determinar las inversas de matrices elementales C_i que posmultiplicando a una matriz, afectan las columnas de ella. ■

7.4 Descomposición de una matriz regular como producto de matrices elementales

Nos proponemos demostrar que toda matriz regular o inversible está formada por un producto de matrices elementales, lo que nos proporcionará un procedimiento para encontrar la inversa de matrices por transformaciones elementales, que denominaremos de inversión por Gauss-Jordan, tema que será tratado en el siguiente capítulo.

Para ello enunciaremos y demostraremos el siguiente teorema:

Si A es una matriz de orden $n \times n$, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) A es una matriz regular o inversible.
- (b) A es equivalente por filas a la matriz I_n .
- (c) A es un producto de matrices elementales.

En los cursos de Álgebra Lineal son frecuentes los enunciados de este tipo. Su demostración es simple, bastará demostrar la secuencia:

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$$

DESCOMPOSICIÓN DE UNA MATRIZ COMO PRODUCTO DE MATRICES ELEMENTALES

167

(a) $\Rightarrow$ (b) Si asumimos que la matriz A posee inversa, debe existir una serie de matrices elementales F_i , tales que:

$$F_k \dots F_3 F_2 F_1 A = I_n$$

$\therefore A$ es equivalente por filas a la matriz I_n

(b) $\Rightarrow$ (c) Si se cumple $F_k \dots F_3 F_2 F_1 A = I_n$, y como existen las inversas de cada matriz elemental, premultiplicaremos la igualdad anterior por $F^{-1}_1 F^{-1}_2 F^{-1}_3 \dots F^{-1}_k$

$$F^{-1}_1 F^{-1}_2 F^{-1}_3 \dots F^{-1}_k F_k \dots F_3 F_2 F_1 A = F^{-1}_1 F^{-1}_2 F^{-1}_3 \dots F^{-1}_k I_n$$

Como el producto $F^{-1}_1 F^{-1}_2 F^{-1}_3 \dots F^{-1}_k F_k \dots F_3 F_2 F_1$ es igual² a la matriz I , se tiene:

$$A = F^{-1}_1 F^{-1}_2 F^{-1}_3 \dots F^{-1}_k$$

expresión que indica que la matriz A es un producto de matrices elementales.

$\therefore$ La matriz A es igual al producto de matrices elementales.

(c) $\Rightarrow$ (a) Como se cumple $A = F^{-1}_1 F^{-1}_2 F^{-1}_3 \dots F^{-1}_k$, invertimos ambos miembros:

$$(A)^{-1} = (F^{-1}_1 F^{-1}_2 F^{-1}_3 \dots F^{-1}_k)^{-1}$$

Si tenemos en cuenta que la inversa de un producto de matrices es el producto de las inversas en orden contrario, se tiene:

$$(A)^{-1} = (F^{-1}_k)^{-1} \dots (F^{-1}_3)^{-1} (F^{-1}_2)^{-1} (F^{-1}_1)^{-1}$$

$$(A)^{-1} = F_k \dots F_3 F_2 F_1$$

$\therefore$ La matriz A es regular, es decir, inversible.

L.q.q.d.

Es evidente que se puede descomponer una matriz regular A en un producto de matrices elementales, pero debe observarse que ésta es una descomposición, ya que de haber trabajado con otras matrices elementales (haciendo, por ejemplo, las transformaciones en una secuencia diferente), las matrices elementales de la descomposición serían diferentes, pero igualmente sería un producto de matrices elementales.

Ejemplo 6

Descomponer la matriz A , como un producto de matrices elementales.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 18 \end{bmatrix} \\
 F_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 18 \end{bmatrix} = F_1 A \\
 F_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = F_2 F_1 A \\
 F_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = F_3 F_2 F_1 A \\
 F_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = F_4 F_3 F_2 F_1 A \\
 F_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = F_5 F_4 F_3 F_2 F_1 A
 \end{aligned}$$

Como $F_5 F_4 F_3 F_2 F_1 A = I$, necesariamente tiene que ocurrir:

$$A^{-1} = F_5 F_4 F_3 F_2 F_1$$

DESCOMPOSICIÓN DE UNA MATRIZ COMO PRODUCTO DE MATRICES ELEMENTALES

169

En consecuencia, si tomamos inversa a ambos miembros, se tiene:

$$(A^{-1})^{-1} = (F_5 F_4 F_3 F_2 F_1)^{-1}$$

$$A = F_1^{-1} F_2^{-1} F_3^{-1} F_4^{-1} F_5^{-1}$$

Escribiendo las respectivas matrices elementales inversas, se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Debe observarse que, como paso previo a la descomposición de la matriz **A** como producto de matrices elementales, se tenía:

$$A^{-1} = F_5 F_4 F_3 F_2 F_1$$

En consecuencia, la inversa de la matriz **A**, es el producto de matrices elementales:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si efectuamos el producto, se tiene como respuesta la inversa de la matriz **A**:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 3 \\ 8 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

El procedimiento encontrado se denomina inversión por Gauss-Jordan, y será el tema principal del siguiente capítulo. ■

Ejemplo 7

Descomponer la matriz **A**, como un producto de matrices elementales.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\
 F_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -7 & 2 & -1 \end{bmatrix} = F_1 A \\
 F_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} = F_2 F_1 A \\
 F_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F_3 F_2 F_1 A
 \end{aligned}$$

Como puede observarse, es imposible encontrar una matriz elemental F_4 dado que la matriz $F_3 F_2 F_1 A$ nunca podrá convertirse en la matriz I , por tener una fila de ceros. Es decir, la matriz A no puede ser puesta como el producto de matrices elementales porque ella es singular, y una condición para que una matriz pueda ser puesta como un producto de matrices elementales, es que ella sea regular o inversible. ■

7.5 Transformación general de matrices

En general, cualquier matriz identidad afectada de una o más operaciones elementales de filas (columnas) que premultiplique (posmultiplique) a una matriz, realizará en la matriz las transformaciones que permitieron construir tal matriz de transformación.

La única restricción es que las matrices de transformación, actuando como premultiplicadoras o posmultiplicadoras, no deben alterar el orden de la matriz. En consecuencia, si $A_{m \times n}$, la matriz de transformación premultiplicadora T_1 tiene que ser de orden $m \times m$; y la matriz de transformación posmultiplicadora T_2 , debe ser de orden $n \times n$, de tal manera que:

$$[T_1]_{m \times m} [A]_{m \times n} = [T_1 A]_{m \times n}$$

$$[A]_{m \times n} [T_2]_{n \times n} = [A T_2]_{m \times n}$$

Las matrices de transformación son en consecuencia matrices cuadradas, y todas ellas se obtienen aplicando a una matriz identidad una o más de una transformaciones elementales de filas o de columnas, según tenga que actuar la matriz de premultiplicadora o de posmultiplicadora.

Muchas veces la práctica hace que se pueda poner una matriz identidad e introducir en ella los cambios necesarios para que la matriz pueda ejecutar lo deseado. Mediante ejemplos veremos lo sencillo que es construir estas matrices de transformación. Insistiremos en matrices de premultiplicación, por ser ellas las que usaremos exclusivamente para encontrar la inversa de una matriz. Estas matrices de transformación general tienen igualmente inversas igualmente simples de escribir.

Ejemplo 8

Determinar una matriz de premultiplicación de la matriz A , que cambie su primera columna en una que sea igual a la primera columna de la matriz identidad.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 15 \end{bmatrix}$$

Consideremos una matriz de transformación a partir de la matriz I_3 . Como el elemento $a_{11} = 2$, el elemento correspondiente en la matriz de transformación debe ser $\frac{1}{2}$, $(-\frac{1}{a_{11}})$, de manera que al efectuar TA , el elemento (1 1) de producto sea igual a la unidad. El elemento (2 1) de la matriz de transformación debe ser 1 , $(-\frac{a_{21}}{a_{11}})$, de manera que al efectuar la multiplicación TA , el elemento (2 1) del producto sea 0. En forma similar, el elemento (3 1) debe ser -4 , $(-\frac{a_{31}}{a_{11}})$, para que el elemento (3 1) del producto sea 0. Finalmente, las columnas 2^{da} y 3^{ra} de la matriz de transformación las consideraremos iguales a las correspondientes de la matriz I .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 15 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 23 \end{bmatrix} = T A$$

Observe que se quería dividir la primera fila entre 2 (lo que equivale a multiplicarla por 0,5). La segunda fila había que incrementarla en la primera, en consecuencia el factor debe ser 1. La tercera fila había que aumentarla en -4 veces la primera, por lo que el factor será necesariamente -4 . Como se puede apreciar, el razonamiento es similar a efectuar las siguientes operaciones elementales:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 15 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 15 \end{bmatrix} \\ (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 15 \end{bmatrix} \\ (-8) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 23 \end{bmatrix} \end{array}$$

Comparemos los métodos, tomando en cuenta los factores que utilizábamos en las transformaciones de filas y la primera columna de la matriz de transformación:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 15 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 23 \end{bmatrix} = T A$$

Los coeficientes son:

$$\frac{1}{2}, 2 \text{ y } -8$$

en un caso, y

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}2 \text{ y } \frac{1}{2}(-8),$$

es decir:

$$0,5 \quad 1 \quad \text{y} \quad 4$$

en el otro.

Entre ellos existe una gran similitud.



Veremos en el siguiente capítulo cómo utilizar los procedimientos descritos para invertir matrices: el de transformaciones elementales de filas, el de premultiplicaciones por matrices elementales y el de transformaciones en general. Podemos adelantar que sólo variarán los nombres de los métodos, los que utilizarán, para la inversión de matrices, los conceptos y fundamentos presentados en este capítulo de transformaciones de matrices.

Ejercicios y problemas propuestos

Capítulo 7

1. Escribir las matrices de orden 3×3 que premultiplicando a una matriz de orden $3 \times n$:
 - a) Intercambien las filas 1^{ra} y 3^{ra} .
 - b) Multiplique la 2^{da} fila por 2.
 - c) Intercambie las filas 1^{ra} y 2^{da} , y que además, multiplique la 3^{ra} fila por 5.
 - d) Agregue a la 1^{ra} fila la 2^{da} .
 - e) Agregue a la 3^{ra} fila la 1^{ra} más 3 veces la 2^{da} .
 - f) Multiplique las filas 1^{ra} , 2^{da} y 3^{ra} por -2 , 2 y 5 .
2. Escribir las matrices de orden 3×3 que posmultiplicando a una matriz de orden $m \times 3$:
 - a) Intercambien las columnas 1^{ra} y 3^{ra} .
 - b) Multiplique la 2^{da} columna por 7.
 - c) Intercambie las filas 2^{da} y 3^{ra} , y que además, multiplique la 1^{ra} columna por -1 .
 - d) Multiplique las columnas a la 1^{ra} , 2^{da} y 3^{ra} por 5 , 2 y 7 .
3. ¿Por qué se les llama matrices elementales a ciertas matrices cuadradas?
¿Cómo se obtienen matrices elementales?
4. Indique cuál o cuáles de las siguientes son matrices elementales. Indique qué operación realiza cada matriz que sea elemental

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. Escribir las inversas de las siguientes matrices elementales:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. Descomponer cada matriz en el producto de otras elementales, realizando el trabajo en forma ordenada, a fin de dar respuesta al ejercicio siguiente:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

7. Obtenga las inversas de las matrices regulares del ejercicio anterior.
8. Determinar las inversas de las matrices de transformación general que se proponen a continuación. ¿Podría usted generalizar sus hallazgos a fin de utilizarlos en el ejercicio siguiente?

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -25 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$

9. Descomponer cada matriz de orden n en el producto de n matrices de transformación general. Prepare, en cada caso, el procedimiento para dar respuesta a la siguiente pregunta, como se ha descrito en el ejemplo 6.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 18 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 5 \\ -2 & -3 & 8 \\ 3 & -8 & 7 \end{bmatrix}$

10. Invertir las matrices del ejercicio anterior.

MÉTODOS DE INVERSIÓN DE MATRICES

8.1 Introducción

En el capítulo 5 presentamos el concepto de matriz inversa y sus propiedades, y calculamos la inversa de matrices por un método que llamamos algebraico. Este método nos llevó a suponer n^2 incógnitas para invertir una matriz de orden n , agrupadas en n ecuaciones lineales, cada una con n incógnitas. El trabajo de resolver algebraicamente los sistemas de ecuaciones lineales es repetitivo, en razón a que los sistemas son todos de las formas: $AX_1 = B_1$, $AX_2 = B_2$, $AX_3 = B_3, \dots, AX_n = B_n$. Sin embargo, se dispone de innumerables procedimientos numéricos para invertir matrices. Este capítulo pretende sistematizar los principales procedimientos matriciales que permiten determinar la inversa de una matriz. Los procedimientos tienen su fundamento teórico en las técnicas expuestas en los capítulos precedentes, en particular en los capítulos sobre transformaciones y matrices elementales.

Presentaremos los siguientes métodos de inversión:

Inversión por solución de sistemas de ecuaciones.

Inversión por Gauss-Jordan.

Inversión por matrices elementales.

Inversión por matrices de transformación.

Inversión por factorización.

Inversión de matrices simétricas por el método de Fox.

En el capítulo 10 presentaremos la matriz adjunta y un método para construir directamente la inversa de una matriz. El procedimiento, que permitirá construir la inversa, hace uso de los determinantes; es más de carácter teórico e histórico que práctico como se verá en su momento.

8.2 Inversión por solución de sistemas de ecuaciones lineales

Este método, presentado intuitivamente, se fundamenta en la definición de matriz inversa, en la unicidad de ella cuando existe, en la multiplicación e igualdad de matrices y en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Cuando se presentó el método, al que describimos como algebraico en el capítulo 6, no se tenían los procedimientos matriciales de Gauss ni de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Veamos un ejercicio para mostrar el método por solución de sistemas de ecuaciones lineales, empleando estos métodos matriciales.

Ejemplo 1

Invertir la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Si suponemos la inversa como la matriz A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{bmatrix}$$

Por definición de matriz inversa, se tiene: $AA^{-1} = I_3$
En consecuencia debe cumplirse:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si efectuamos el producto matricial, e identificamos las igualdades, tendremos tres sistemas de ecuaciones lineales, cada una con tres ecuaciones y con tres incógnitas:

$$\begin{array}{lcl} a_1 & + & 2a_3 = 1 \\ 2a_1 - a_2 & + & 3a_3 = 0 \\ 4a_1 + a_2 & + & 8a_3 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{lcl} a_4 & + & 2a_6 = 0 \\ 2a_4 - a_5 & + & 3a_6 = 1 \\ 4a_4 + a_5 & + & 8a_6 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{lcl} a_7 & + & 2a_9 = 0 \\ 2a_7 - a_8 & + & 3a_9 = 0 \\ 4a_7 + a_8 & + & 8a_9 = 1 \end{array}$$

Si queremos resolver estos sistemas por Gauss-Jordan escribiríamos las matrices ampliadas siguientes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 8 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 1 \end{array} \right]$$

Estas matrices ampliadas sólo difieren en la última columna, en la correspondiente orla. El procedimiento para llevar las matrices **A** a la forma escalonada **I** son las mismas. Haciendo transformaciones de filas, se llega a:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

En consecuencia, las orlas de cada una de las matrices ampliadas son las soluciones de los tres sistemas de ecuaciones, por lo que la matriz inversa es:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Es evidente que aplicar el método de Gauss-Jordan simplifica notablemente el proceso de resolver cada sistema por procedimientos netamente algebraicos. Sin embargo, se observará que al resolver cada sistema se deben utilizar las mismas transformaciones elementales de filas que permiten transformar la matriz **A** en la matriz **I**. Si sistematizamos el procedimiento, podríamos ejecutar sólo una vez el trabajo en la matriz **A**, y esto podría lograrse mediante el esquema que se describe a continuación, y que se conoce como Procedimiento de Inversión por Gauss-Jordan.

8.3 Inversión por Gauss - Jordan

Este método consiste en resolver los sistemas del caso anterior en forma simultánea, es decir, si se deben repetir las mismas transformaciones lineales para transformar la matriz de coeficientes **A** en la matriz identidad **I**, el método propone un esquema para realizar dichas transformaciones solamente una vez.

Sea **A** la matriz que se desea invertir. Escribimos una matriz ampliada que considere a la matriz **A** y a la matriz **I** como orla:

$$[A \quad I]$$

Se efectúan a continuación las transformaciones elementales de filas necesarias de manera que la matriz **A** se transforme en la matriz **I**. Como las transformaciones se aplican también a la orla **I**, ésta se habrá transformado en la inversa de la matriz **A**. El esquema completo será:

$$[A \quad I]$$

$$T.E.F.$$

$$[I \quad A^{-1}]$$

donde las siglas **T.E.F.** significan: transformaciones elementales de filas.

Ejemplo 2

Invertiremos la matriz del ejemplo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Escribimos el esquema $[A \ I]$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuaremos las transformaciones de filas necesarias a fin de que la matriz **A** se convierta en la matriz **I**:

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ -2 \\ -4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} -2/0 \quad -4 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \\ 2 \quad -1 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} -4/0 \quad -8 \quad -4 \quad 0 \quad 0 \\ 4 \quad 1 \quad 8 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 1 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2 \\ 0 \\ \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$0 \quad 0 \quad -1 \quad -6 \quad 1 \quad 1$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \quad -2 \quad -12 \quad 2 \quad 2 \\ 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 0 \quad -11 \quad 2 \quad 2 \end{array}$$

Como A se transformó en la matriz I , la matriz I se ha transformado en la matriz A^{-1} . Entonces, la inversa de la matriz es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Es evidente que si existe la matriz A^{-1} , A es una matriz regular o inversible. Pero si la matriz A es una matriz singular, no regular o no inversible, es imposible transformar la matriz A en la matriz I , puesto que no existe la inversa de la matriz A .

El siguiente ejemplo muestra lo que ocurre cuando, sin pensar que la matriz es singular, se inicia el trabajo con el esquema propuesto.

Ejemplo 3

Invertir por Gauss – Jordan la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Es evidente que esta matriz no tiene inversa, por tener filas linealmente dependientes (la 3ª fila es la suma de las dos primeras). Veamos qué ocurre cuando sin darnos cuenta de ello, pretendemos hallar su inversa por Gauss – Jordan:

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ -2 \\ -3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 0 \\ \rightarrow \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ \rightarrow \\ 1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Como se puede apreciar, la primera parte de la matriz ampliada contiene una fila de ceros, por lo que es imposible que se le pueda transformar en la matriz I . En consecuencia la matriz A es singular, y la respuesta al ejercicio propuesto es:

" A no tiene inversa, es una matriz singular".



8.4 Inversión por matrices elementales

En el capítulo anterior (§ 7.4), demostramos que toda matriz es el producto de matrices elementales:

$$A = F^{-1}_1 F^{-1}_2 F^{-1}_3 \dots F^{-1}_k$$

En consecuencia se cumple:

$$(A)^{-1} = F_k \dots F_3 F_2 F_1$$

donde las matrices $F_k, \dots, F_3, F_2$ y F_1 , son también matrices elementales.

En general, si se cumple:

$$(PQR \dots MNL)A = I,$$

el producto de matrices $PQR \dots MNL$ es la inversa de la matriz A , es decir:

$$A^{-1} = PQR \dots MNL$$

Si las matrices **PQR...MNL** son matrices elementales, el método de inversión se denomina "por matrices elementales". Si dichas matrices no son elementales, pero transforman la matriz **A** en la matriz **I**, son en general de matrices de transformación, y el método de inversión es "por matrices de transformación", y será tratado en el siguiente artículo.

Con un ejemplo veremos cómo invertir una matriz por matrices elementales. El esquema general que se utilizará es el siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 [& \mathbf{A} &] [& \mathbf{I} &] \\
 [& \mathbf{F}_1 &] [& \mathbf{A}' &] [& \mathbf{F}_1 &] \\
 [& \mathbf{F}_2 &] [& \mathbf{A}'' &] [& \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1 &] \\
 & \dots\dots\dots & \\
 [& \mathbf{F}_{k-1} &] [& \mathbf{A}^{(k-1)} &] [& \mathbf{F}_{k-1} \dots \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1 &] \\
 [& \mathbf{F}_k &] [& \mathbf{I} &] [& \mathbf{A}^{-1} &]
 \end{array}$$

Luego de premultiplicar sucesivamente la matriz **A** por las matrices elementales, y lograr $\mathbf{F}_k \mathbf{A}^{(k-1)} = \mathbf{I}$, se procede a efectuar los productos sucesivos:

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1, \\
 \mathbf{F}_3 \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1, \\
 \dots, \\
 \mathbf{F}_k \mathbf{F}_{k-1} \dots \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1.
 \end{array}$$

Esta última matriz es la matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$. Debe observarse el esquema utilizado en el ejemplo 4. En él primero se efectúan los cálculos de las dos primeras columnas (que nos permiten llegar a determinar si la matriz es regular), y luego se efectúan los cálculos para determinar la inversa solicitada.

Ejemplo 4

Invertir por matrices elementales de premultiplicación la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 18 \end{bmatrix}$$

La secuencia de multiplicaciones es:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 18 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{matrix} \\
 F_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -7 & 2 & 18 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 F_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 F_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
 F_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
 F_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 10 & -6 & 3 \\ 8 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

En consecuencia, la inversa buscada es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 3 \\ 8 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como se observa, la determinación de las matrices elementales es simple y también lo son las multiplicaciones. El procedimiento de invertir una matriz por premultiplicaciones de matrices elementales se resume en saber encontrar las matrices elementales y poner cuidado en las multiplicaciones.

Si se pretende invertir una matriz singular por matrices elementales, el proceso se interrumpe, impidiendo encontrar las últimas matrices elementales que permiten obtener la matriz I a partir de la matriz A .

En el ejemplo siguiente, pretendemos invertir una matriz singular de orden 3. Debe observarse, que en primer lugar sólo se busca encontrar las matrices elementales, proceso que se interrumpe al obtener una fila de ceros o evidenciarse dos filas proporcionales o dos filas iguales¹ mucho antes de obtener la fila de ceros.

Ejemplo 5

Invertir por matrices elementales la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

La matriz es evidentemente singular porque su última columna es la mitad de la suma de las dos primeras. Es decir, tiene una columna que depende de otras, en consecuencia las columnas son linealmente dependientes y la matriz no tiene inversa. Sin embargo, al tener una pregunta como la propuesta, difícilmente un alumno se dará cuenta de lo dicho anteriormente, y es seguro que iniciará el proceso de inversión solicitado.

El proceso será el siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

El proceso puede detenerse al tener la matriz dos filas proporcionales (en este caso las dos últimas filas son iguales). En consecuencia, la matriz es singular y no existe inversa. ■

¹

Es decir, la matriz tiene dos filas dependientes.

8.5 Inversión por matrices de transformación

La inversión por matrices de transformación es un proceso más rápido que el proceso de inversión por matrices elementales. Para invertir una matriz de orden n por matrices elementales será necesario, en el peor de los casos, tener que efectuar $2n^2$ multiplicaciones de matrices (una por cada elemento para saber si se puede llegar a la matriz I , y luego las n^2 multiplicaciones para obtener A^{-1}). La labor es en consecuencia larga, aunque como se ha podido apreciar es simple.

Ahora pretendemos invertir una matriz efectuando a lo más $2n$ multiplicaciones, donde n es el orden de la matriz cuadrada por invertir. El procedimiento presupone una matriz de transformación por cada columna de la matriz por invertir. Las ventajas del método que ahora presentamos, se puede apreciar en el número de multiplicaciones de uno y otro método:

ORDEN	2	3	4	5	6	7	MÉTODO
$2n^2$	8	18	32	50	72	98	M. ELEMENTALES
$2n$	4	6	8	10	12	14	M. DE TRANSFORMACIÓN

El proceso es simple. Cada matriz de transformación modificará una columna de la matriz A , y se construye de la siguiente manera: Si A es la matriz por invertir, se inicia el proceso con el esquema:

$$\begin{bmatrix} A \\ T_1[A'] \end{bmatrix}$$

Es interesante observar que si T_1 transforma la primera columna de la matriz A en la primera columna de la matriz identidad, las restantes columnas de la matriz T_1 serán las que corresponden a la matriz identidad. La primera columna de la matriz de transformación T_1 , si transforma la primera columna de la matriz A tiene como elementos la inversa de a_{11} , y los restantes elementos de la columna serán los que resulten de dividir el correspondiente elemento entre a_{11} , pero con signo cambiado. Ocurre lo mismo con cada matriz de transformación. Las matrices pueden transformar las columnas de la matriz A en cualquier orden. Veamos mediante un ejemplo la construcción de cada matriz de transformación.

Ejemplo 6

Invertir por matrices de transformación la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 18 \end{bmatrix}$$

Como el elemento $a_{11} \neq 0$, podemos escribir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 18 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & 1 & 0 \\ t_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz T_1 serán:

$$t_{11} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \quad t_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{-2}{1} = 2 \quad t_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{-7}{1} = 7$$

Reemplazando los valores y encontrando los valores de los a_{ij} supuestos², se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 18 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

²

En la práctica, los espacios de los elementos a_{ij} se dejan en blanco, y se va llenando los espacios al efectuar ordenadamente los productos.

La segunda matriz puede transformar la segunda columna . Su esquema básico es:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_{12} & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & t_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz de transformación son:

$$t_{22} = \frac{1}{a_{22}} = \frac{1}{1} = 1, \quad t_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{0}{1} = 0, \quad t_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = -\frac{2}{1} = -2$$

Reemplazando y efectuando, se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La tercera matriz transformará la tercera columna . Su esquema básico es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{31} \\ 0 & 1 & t_{32} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

donde, los elementos T_{ij} , son:

$$t_{33} = \frac{1}{a_{33}} = \frac{1}{1} = 1, \quad t_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{33}} = -\frac{-3}{1} = 3 \quad \text{y} \quad t_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{33}} = -\frac{-2}{1} = 2.$$

Reemplazando y efectuando, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el producto $T_3 T_2 T_1 A$ es la matriz identidad I , el producto $T_3 T_2 T_1$ es necesariamente A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 3 \\ 8 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Debe indicarse que puede emplearse un esquema de trabajo similar al utilizado en el ejemplo 4, el cual se presenta a continuación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 18 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -6 & 3 \\ 8 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

8.6 Inversión por factorización

En el capítulo 4, relativo a las matrices especiales, se presentó una propiedad de las matrices triangulares, que se enunció de la siguiente manera:

Una matriz cuadrada³ es el producto de una matriz triangular inferior con elementos iguales a la unidad en la diagonal principal, por una matriz triangular superior.

Esta propiedad señala que una matriz regular puede descomponerse, de una única manera, como el producto de dos matrices triangulares, es decir:

$$A = LU$$

donde las matrices **L** y **U**, lower y upper, por ser triangulares tienen un procedimiento de inversión simple y directo. El proceso de inversión de una matriz por factorización, se puede sistematizar en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{c} [L^{-1}] \\ [U^{-1}][A^{-1}] \\ [U][I] \\ [L][A] \\ [L^{-1}][I] \end{array}$$

cuya razón de ser se establece por lo siguiente:

$$\text{Si } A \text{ es regular, } A = LU \quad \text{y} \quad A^{-1} = (LU)^{-1}$$

$$\therefore A^{-1} = U^{-1} L^{-1}$$

El esquema se inicia, determinando las matrices **L** y **U**, la primera triangular inferior con elementos iguales a la unidad en su diagonal principal, y la segunda es triangular superior:

$$\begin{array}{c} [U] \\ [L][A] \end{array}$$

Como se explicó en el ejemplo 24 del capítulo 4, la determinación de estas matrices es simple, encontrando las incógnitas directamente.

Luego se procede a encontrar las matrices L^{-1} y U^{-1} , cuya determinación será igualmente simple, tal como se hizo en el ejemplo 8 del capítulo 5. El esquema tendrá en este momento la siguiente forma:

³ En realidad solamente pueden ser factorizadas, las matrices que posean inversa, es decir las matrices inversibles (Ver capítulo V).

$$\begin{array}{c}
 [U^{-1}] \\
 [U][I] \\
 [L][A] \\
 [L^{-1}][I]
 \end{array}$$

El paso siguiente será trasladar la matriz L^{-1} y efectuar el producto

$$U^{-1}L^{-1} = A^{-1}$$

Como comprobación se puede efectuar directamente el producto $AA^{-1} = I$, como se desprende del esquema inicial. Se presenta a continuación un ejemplo de aplicación, preparado para que todos los números sean enteros.

Ejemplo 7

Invertir por factorización, la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 24 & 23 & 9 \\ -2 & -8 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$

El esquema inicial, dejando los espacios necesarios, es:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & 1 & 2 & 1 & -1 \\ & 2 & 3 & 5 & 0 \\ & 4 & 24 & 23 & 9 \\ & -2 & -8 & 11 & 10 \end{bmatrix} = A$$

Efectuando convenientemente se encuentran todas las entradas que se tienen en blanco en el esquema anterior. Debe recordarse que los primeros elementos incógnitos que se deben encontrar son los que se encuentran en la diagonal principal de la matriz U . La secuencia de cálculos es: u_{11} , u_{12} , u_{13} , l_{21} , l_{31} y l_{41} ; u_{22} , u_{23} , u_{24} , l_{32} y l_{42} ; u_{33} , u_{34} y l_{43} ; y finalmente u_{44} .

Al efectuar los cálculos en la secuencia indicada, se encuentran todas las entradas que figuran en blanco en el esquema anterior.

A continuación, se procede a presentar el esquema que permite calcular las inversas de las matrices **L** y **U**.

Debemos recordar que tales inversas son también triangulares y del mismo tipo, por lo que el esquema, con los espacios en blanco por llenar es:

$$\begin{array}{c}
 U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 23 & 9 \\ -2 & -8 & 11 & 10 \end{bmatrix} = A \\
 L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Debemos recordar que la diagonal de la inversa de una matriz triangular tiene como elementos los respectivos recíprocos, por lo tanto de las matrices L^{-1} y U^{-1} , se conocen y se han colocado los elementos de sus diagonales.

Multiplicando convenientemente, se encuentran todos los elementos incógnitos, y se procede a calcular la inversa de la matriz buscada, efectuando el producto

$$A^{-1} = U^{-1} L^{-1}$$

Como el espacio es insuficiente, no es posible presentar el producto $U^{-1}L^{-1}$ que nos proporciona la matriz inversa A^{-1} , tal como se indicó en el esquema, presentando el producto fuera del mismo:

$$\begin{aligned}
 L^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -6 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 U^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -67 & 36 & -3 & -4 \\ 28 & -17 & 2 & 1 \\ 10 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1} \\
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 23 & 9 \\ -2 & -8 & 11 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I
 \end{aligned}$$

Como comprobación, se ha efectuado el producto: $AA^{-1} = I$, en el mismo esquema. ■

Es importante recordar que si no se pudiera encontrar las matrices L y U , deberemos concluir que la matriz es singular, es decir que no tiene inversa. Más adelante, en el capítulo dedicado a la matriz adjunta, presentaremos un procedimiento por medio de determinantes que nos permitirá comprobar fácilmente que una matriz es singular o no inversible.

8.7 Inversión de matrices simétricas por el método de Fox

Este método, dado a conocer por el matemático inglés Leonard Fox en el Journal of the Royal Society, es una variante del llamado "método de la raíz cuadrada" de Tadeusz Banachiewicz, y se aplica sólo para invertir matrices simétricas. Es un método simple y muy útil en la práctica ya que, como se ha señalado anteriormente, las matrices que se presentan en problemas técnicos son generalmente matrices simétricas.

Se fundamenta en las siguientes propiedades enunciadas en capítulos previos:

"La inversa de una matriz simétrica es también una matriz simétrica".

"Una matriz simétrica⁴ es igual al producto de una matriz triangular inferior por su transpuesta".

"La inversa de una matriz triangular inferior es otra matriz triangular inferior, en la que los elementos de su diagonal son los inversos de los elementos correspondientes en la matriz que se invierte".

En realidad, no existe una única matriz triangular inferior que satisface la tercera propiedad enunciada, sino 2ⁿ matrices, tal como se explicó en la teoría correspondiente. Sin embargo, se puede utilizar cualquiera de las matrices que satisfacen la propiedad para ser utilizada en el método que describimos.

El análisis es muy similar al efectuado en el método de factorización:

Si una matriz simétrica **A** se descompone en el producto indicado, se tiene:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{T}^t$$

y su inversa será:

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{T}\mathbf{T}^t)^{-1}$$

⁴ Solamente pueden descomponerse en el producto indicado las matrices que posean inversa.

En el segundo miembro se puede aplicar la propiedad de la inversa de un producto de matrices, que señala que la inversa de un producto de matrices es igual al producto de las inversas, pero en orden contrario:

$$A^{-1} = (T')^{-1}(T)^{-1}$$

Debemos aplicar ahora la propiedad de matrices que señala que la inversa de la transpuesta de una matriz es igual a la transpuesta de la inversa:

$$A^{-1} = (T^{-1})'(T)^{-1}$$

Debemos recordar finalmente que la inversa de una matriz triangular es otra triangular y su determinación es directa. Por ello, el esquema siguiente permite efectuar primero la descomposición de la matriz simétrica en el producto de matrices triangulares, y luego la inversión de la matriz T , es:

$$\begin{bmatrix} T' \\ T \\ T^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}$$

En este esquema deberá tenerse muy en cuenta que las matrices T y T' , son matrices triangulares y, en particular, una transpuesta de la otra. Como el procedimiento de determinar las matrices T y T' es iterativo, dejando los espacios a llenar en el esquema correspondiente, deberá el alumno ser muy cuidadoso al ir determinando los elementos, y trasladarlos de inmediato al lugar que deben ocupar en la respectiva transpuesta. Además, como ya se indicó, sólo es necesario determinar una de las descomposiciones, por lo que cuando se extraiga raíz cuadrada⁵, el alumno deberá elegir entre el valor positivo o el negativo.

Finalmente en forma muy natural se determina la matriz A^{-1} , y se realiza la respectiva comprobación, mediante el esquema siguiente:

$$\begin{bmatrix} T^{-1} \\ (T^{-1})' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$$

5

De allí el nombre de "método de la raíz cuadrada", como lo llamara Tadeusz Banachiewicz.

De disponer de espacio, se trabaja todo en un solo esquema:

$$\begin{bmatrix} [T^{-1}]' & [T^{-1}] & [A^{-1}] \\ [A] & [I] & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T'] \\ [T] \\ [A] \end{bmatrix}$$

Ejemplo 8

Invertir, por el método de Fox, la matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -2 & 15 \end{bmatrix}$$

El esquema inicial, dejando los espacios necesarios, es:

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \\ T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -2 & 15 \end{bmatrix} = A \\ T' &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se determinan inicialmente las matrices T y T^t , para las que se han elegido signos positivos al determinar cada uno de los elementos de la diagonal principal. Así, por ejemplo, el primer producto es: $(t_{11})^2 = 1$, y se ha considerado la solución: $t_{11} = 1$. De haber elegido $t_{11} = -1$, se hubiera determinado otra matriz T , pero la inversa A^{-1} sería la misma, la única matriz que es inversa de la matriz A , siempre que ella exista. Encontrada la matriz T se procede a encontrar la matriz T^{-1} , determinando uno a uno sus elementos, haciendo uso exclusivamente de la multiplicación de matrices.

Procediendo como se ha explicado, se obtiene:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, se efectúa el producto $(T^{-1})^t T^{-1}$, obteniendo la inversa buscada:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 30 & -17 & 7 & 4 \\ -17 & 11 & -4 & -3 \\ 7 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Una alternativa del método de Fox es el siguiente:

Como antes, se tiene para una matriz simétrica A :

$$A = TT^t$$

y su inversa será:

$$A^{-1} = (TT^t)^{-1}$$

Que es equivalente a:

$$A^{-1} = (T^{-1})^t (T)^{-1}$$

Hasta aquí, el desarrollo es igual al anteriormente descrito.

Premultiplicando ambos miembros por: T^t , se tiene:

$$T^t A^{-1} = T^t (T^{-1})^t (T)^{-1}$$

$$T^t A^{-1} = (T)^{-1}$$

El esquema, en este caso, es mucho más sencillo:

$$\begin{bmatrix} [A^{-1}] \\ [T'] [T^{-1}] \\ [T] [A] \\ [T^{-1}] [I] \end{bmatrix}$$

y se deja para que el alumno lo utilice en los ejercicios propuestos.

Debe señalarse que para los métodos de inversión por Fox y el de factorización descritos, existen una serie de esquemas y reglas prácticas, que permiten sistematizar los cálculos numéricos, que no exponemos en este trabajo y que sólo tendrían interés histórico. Si bien es cierto que se solicita que los alumnos operen manualmente matrices, éstas son de pequeño orden y generalmente con números enteros o de fácil manipulación aritmética. Los métodos de inversión presentados en este capítulo, se proporcionan a fin de que el alumno, cuando tenga que operar matrices en situaciones reales, pueda identificar qué procedimiento sigue el computador que las efectúa.

Los métodos presentados en esta sección, proporcionan al alumno un número suficiente de procedimientos de inversión de matrices. Sin embargo, un alumno utilizará prioritariamente uno de los métodos, usualmente el de Gauss-Jordan, pero todos ellos en conjunto le permiten disponer de una serie de conocimientos sobre la matriz inversa que, con seguridad tendrá que utilizar posteriormente, inclusive al utilizar una computadora.

Ejercicios y problemas propuestos

Capítulo 8

1. Las siguientes son matrices regulares con elementos enteros⁶, y sus inversas tienen también elementos enteros. Encuentre, en algunas de ellas, la inversa de cada matriz haciendo uso de la inversión algebraica y luego utilice los procedimientos de Gauss-Jordan y de transformaciones elementales, a fin de adquirir la práctica necesaria.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 2 & -3 & 8 \\ 3 & -8 & 7 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Invertir las siguientes matrices. Todas ellas son regulares, pero sus inversas no son todas matrices con entradas enteras, sin embargo, los cálculos se pueden efectuar a mano. Efectuar la inversión de estas matrices con más de uno de los procedimientos presentados en este capítulo.

a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

6

En el apéndice I se define las matrices enteras y se presenta procedimientos para construir matrices enteras, con inversas y con elementos enteros.

$$d) \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -10 & 1 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -7 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Invertir las siguientes matrices por Gauss-Jordan. Todas ellas son regulares y sus inversas son todas matrices con entradas enteras. Sin embargo, los cálculos son más complejos que en los ejercicios anteriores, pero se pueden efectuar a mano.

$$a) \begin{bmatrix} 20 & -45 & 58 \\ 22 & -46 & 69 \\ -11 & -24 & 33 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 16 & 25 & 36 \\ 19 & 29 & 41 \\ 9 & 14 & 20 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 7 & 9 & 16 \\ 20 & 27 & 42 \\ 8 & 10 & 19 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 16 & 19 & 9 \\ 25 & 29 & 14 \\ 36 & 41 & 20 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 15 & -35 & 42 \\ 22 & -51 & 62 \\ 32 & -75 & 89 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 104 & 137 & 228 \\ 137 & 182 & 296 \\ 62 & 82 & 135 \end{bmatrix}$$

4. Invertir las siguientes matrices simétricas. Todas ellas son regulares, con inversas que tienen entradas enteras. Invierta cada matriz por Gauss-Jordan, y luego algunas de ellas por el procedimiento de Fox.

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 & 10 & -2 \\ 6 & 10 & 12 & 15 & -3 \\ 8 & 12 & 17 & 20 & -4 \\ 10 & 15 & 20 & 26 & -5 \\ -2 & -3 & -4 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Invertir las siguientes matrices antisimétricas por Gauss-Jordan. Todas ellas son regulares.

6

a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 10 & 2 \\ -2 & -10 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

6. Invertir las siguientes matrices por Gauss-Jordan. No todas ellas son regulares; las regulares no tienen todos los elementos enteros.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 12 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 14 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 14 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 6 \\ -3 & -5 & -4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 12 \\ 0 & 2 & -5 & -6 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 0 & 6 \\ 5 & 5 & -1 & 6 \\ 5 & 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

DETERMINANTES

9.1 Introducción

Se definen en este capítulo los determinantes a partir de permutaciones, por lo que se ofrece una breve descripción de ellas al inicio. Luego se proporciona la definición general de un determinante y sus propiedades en dos secciones. No se dan demostraciones completas de las propiedades, se pretende que el alumno entienda cómo se puede llegar a demostrar cada propiedad, a partir de la definición general.

9.2 Permutaciones

9.2.1 Definición y notación

Cuando nos preguntan de cuántas maneras pueden ingresar tres personas: a, b, y c, por una puerta podemos escribir, para explicar nuestro razonamiento:

abc, acb, bac, bca, cab, cba

Se tienen seis arreglos o grupos formados de tres en tres, distinguiéndose unos de los otros por su ordenamiento. Estos arreglos reciben el nombre de permutaciones:

"Las permutaciones de n objetos son las distintas ordenaciones en que se pueden disponer n objetos".

Las permutaciones de dos y tres elementos son:

ab, ba.

abc, acb, cab,
bac, bca, cba.

Las permutaciones de cuatro elementos son:

abcd, abdc, adbc, dabc,	acbd, acdb, adcb, dacb,
cabd, cadb, cdab, dcab,	bacd, badc, bdac, dbac.
bcad, bcda, bdca, dbca,	cbad, cbda, cdba, dcba.

9.2.2 Determinación de las permutaciones

Para escribir las permutaciones de tres elementos se parte de las permutaciones de dos elementos, colocando el tercer objeto "c", en todas las posiciones posibles: al final, entre los elementos y al principio:

Para ab:	abc, acb, cab,
Para ba:	bac, bca, cba.

Para escribir las permutaciones de cuatro elementos se procede, a partir de las permutaciones de tres elementos, en forma similar. Así, los primeros cuatro de la lista anterior, se obtienen intercalando el objeto "d", en la permutación abc:

abc d, ab d c, a d bc, d abc.

9.2.3 Número de permutaciones de n objetos

La manera de determinar todas las permutaciones de n elementos u objetos es general, y nos permitirá llegar a determinar el número de permutaciones, que es más importante para la definición de determinantes que el saber escribirlas.

Si consideramos que la notación P_n nos indica el número de permutaciones de n objetos, tenemos que convenir en que: $P_2 = 2$ es decir, el número de permutaciones de 2 elementos es dos.

Para obtener P_3 , se partió de cada permutación de dos objetos, colocando el tercer objeto "c", en tres posiciones

$$\therefore P_3 = 3P_2 \Rightarrow P_3 = 3 \times 2$$

Para determinar P_4 , debemos observar que se intercaló el cuarto objeto "d" en cuatro posiciones en cada permutación de tres objetos:

$$\therefore P_4 = 4P_3 \Rightarrow P_4 = 4 \times 3 \times 2$$

En general, el número de permutaciones de "n" objetos es:

$$P_n = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \times 2 \times 1$$

Al producto: $n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \dots 3 \times 2 \times 1$, que es el producto de todos los enteros desde 1 hasta el número n , se le llama factorial de n , y se le denota como:

$$n!$$

"El número de permutaciones de n elementos u objetos es factorial de n ".

Ejemplo 1

El número de permutaciones de 5 objetos es $P_5 = 5!$

$$P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$P_5 = 120$$

Observación

Si los objetos que intervienen en la permutación son números, conviene escribir la permutación de la forma: (1; 2; 3; 4; 5; 6), esta notación evitará confundir el número 123456 con la permutación que determinan dichos números.

9.2.4 Inversiones de una permutación



Si se considera una permutación como base o permutación principal, el número de inversiones de una permutación está dada por el número de cambios que deben hacerse para llegar a la permutación base. Se entiende por cambio el intercambiar dos elementos u objetos adyacentes.

Ejemplo 2

Determinar el número de inversiones de la permutación (b; c; a) con respecto a la permutación base (a; b; c).

Para llegar de la permutación (b; c; a) en la permutación (a; b; c), se deben hacer los siguientes cambios:

$$(b; c; a) \Rightarrow (b; a; c) \Rightarrow (a; b; c)$$

Como se han efectuado dos cambios, la permutación dada presenta dos inversiones.

Ejemplo 3

Determinar el número de inversiones de la permutación (2; 1; 5; 4; 3; 6) con respecto a la permutación natural o base (1; 2; 3; 4; 5; 6).

Veamos cuántos intercambios deben efectuarse:

$$(2; 1; 5; 4; 3; 6) \Rightarrow (1; 2; 5; 4; 3; 6) \Rightarrow (1; 2; 5; 3; 4; 6) \Rightarrow \\ (1; 2; 3; 5; 4; 6) \Rightarrow (1; 2; 3; 4; 5; 6)$$

como se han realizado cuatro cambios, posee cuatro inversiones. ■

Observación

El orden en el que se efectúen los intercambios no afecta al número de inversiones de la permutación.

Así, en el ejemplo anterior, los intercambios pueden ser:

$$(2; 1; 5; 4; 3; 6) \Rightarrow (1; 2; 5; 4; 3; 6) \Rightarrow (1; 2; 4; 5; 3; 6) \Rightarrow \\ (1; 2; 4; 3; 5; 6) \Rightarrow (1; 2; 3; 4; 5; 6)$$

El número de inversiones de una permutación con respecto a otra tomada como base, es un número constante para cada permutación. Prueba de ello es una segunda manera de determinar el número de inversiones de una permutación, cuando ella es numérica y la base es la natural. Para ello bastará contar cuántos elementos son seguidos por números menores, es decir cuántos presentan inversión con respecto al orden natural. Debe señalarse que tratándose de permutaciones de números, cuando no se menciona la base o permutación principal, deberá entenderse que es la serie natural de los números.

Ejemplo 4

Determinar el número de inversiones de la permutación (2; 1; 5; 4; 3; 6), contando el número de inversiones que presenta.

Base: (1; 2; 3; 4; 5; 6)
Permutación: (2; 1; 5; 4; 3; 6)

Los números 1, 3 y 6 no presentan inversiones, ya que les siguen números mayores, pero los demás presentan inversiones:

2 presenta una inversión: $2 > 1$
5 presenta dos inversiones: $5 > 4$ $5 > 3$
4 presenta una inversión: $4 > 3$

en total se presentan cuatro inversiones. ■

9.2.5 Clase de una permutación

Las permutaciones pueden ser clasificadas en pares e impares, teniendo en cuenta el número de sus inversiones. Una permutación que tiene un número par de inversiones se dice que es de clase par, en caso contrario es de clase impar. Es interesante observar que si analizan todas las permutaciones de un cierto número de elementos, la mitad de las permutaciones es de clase par y las otras son de clase impar. Esta es una de las propiedades de las permutaciones, y la única que utilizaremos en la definición de un determinante.

Ejemplo 5

Clasificar como pares e impares las permutaciones de tres elementos a , b , y c , si se considera que la permutación principal es $(a; b; c)$.

Las permutaciones pares son: $(a; b; c)$, $(b; c; a)$ y $(c; a; b)$

Las permutaciones impares son: $(a; c; b)$, $(b; a; c)$ y $(c; b; a)$

Se debe observar que la permutación principal $(a; b; c)$, se considera par, al no presentar inversiones. ■

9.3 Determinante de una matriz cuadrada

Asociada a toda matriz cuadrada se tiene un número o un polinomio llamado determinante.

El determinante de una matriz cuadrada se denota:

$$\det A \quad \text{ó} \quad |A|$$

la expresión general de un determinante, es:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Observaciones

1. Debe tenerse en cuenta la diferencia entre las notaciones de una matriz y un determinante:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. Es importante observar que las matrices son del género femenino (la matriz), mientras que los determinantes son de género masculino (el determinante).
3. Además, se debe recordar que una matriz no posee un valor numérico, muestra simplemente un arreglo o disposición de $m \times n$ números, mientras que un determinante sí es un número o un polinomio.
4. Desde la educación secundaria se conocen los desarrollos de los determinantes de orden 2 y 3:

Determinante de segundo orden:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante de tercer orden:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

5. En el pasado se conocía a los determinantes como eliminantes, ya que eliminaban las incógnitas de un sistema de ecuaciones, calculando o determinando una a una las incógnitas.

Ejemplo 6

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

si se utilizan los procedimientos usuales del álgebra, se obtiene:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \Rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \Rightarrow x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Si se recuerdan los métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones (igualación, sustitución y reducción), ninguno permite directamente eliminar todas, menos una de las incógnitas. De ahí que inicialmente los determinantes recibieran el nombre de **eliminantes**. Las expresiones halladas para x_1 y x_2 se conocen como "Regla de Cramer", regla que se presentará formalmente más adelante.

9.4 Definición general

El determinante de una matriz cuadrada A de orden n es la suma de factorial de n términos:

$$|A| = \sum (\pm 1) a_{1i} a_{2j} a_{3k} \cdots a_{nr}$$

que considera todas las permutaciones del segundo subíndice. El signo será positivo o negativo según sea par o impar la permutación $(i; j; k; \cdots r)$ con respecto a la base $(1; 2; 3; \cdots n)$.

Usaremos la definición general para explicar los desarrollos de los determinantes de segundo y tercer orden, que fueron introducidos en la educación secundaria a partir de la solución de un sistema de ecuaciones, tal como se desarrolló en el ejercicio previo.

9.4.1 Determinante de dos por dos

Veamos cómo se aplica la definición dada al caso de un determinante de orden 2. Como $n = 2$, el determinante de orden dos posee $2! = 1 \times 2 = 2$ términos de la forma:

$$a_{1i} a_{2j}.$$

Además, las permutaciones de $(i; j)$ son $(1; 2)$ y $(2; 1)$, la primera par y la segunda impar. En consecuencia, los términos son: $+ a_{11} a_{22}$ y $- a_{12} a_{21}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

En la práctica, se realizan las siguientes productos:

$a_{11} a_{22}$, con su propio signo
 $a_{12} a_{21}$, con signo cambiado

9.4.2 Determinante de tres por tres

Como $n = 3$, el determinante de orden tres posee $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ términos, cada uno de la forma:

$$a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

Las permutaciones de $(i; j; k)$ son:

(1; 2; 3), (3; 1; 2), (2; 3; 1) PARES
(3; 2; 1), (1; 3; 2), (2; 1; 3) IMPARES

El desarrollo tiene seis términos:

Positivos: $a_{11}a_{22}a_{33}$ $a_{12}a_{23}a_{31}$ $a_{13}a_{21}a_{32}$ (Productos con su propio signo)

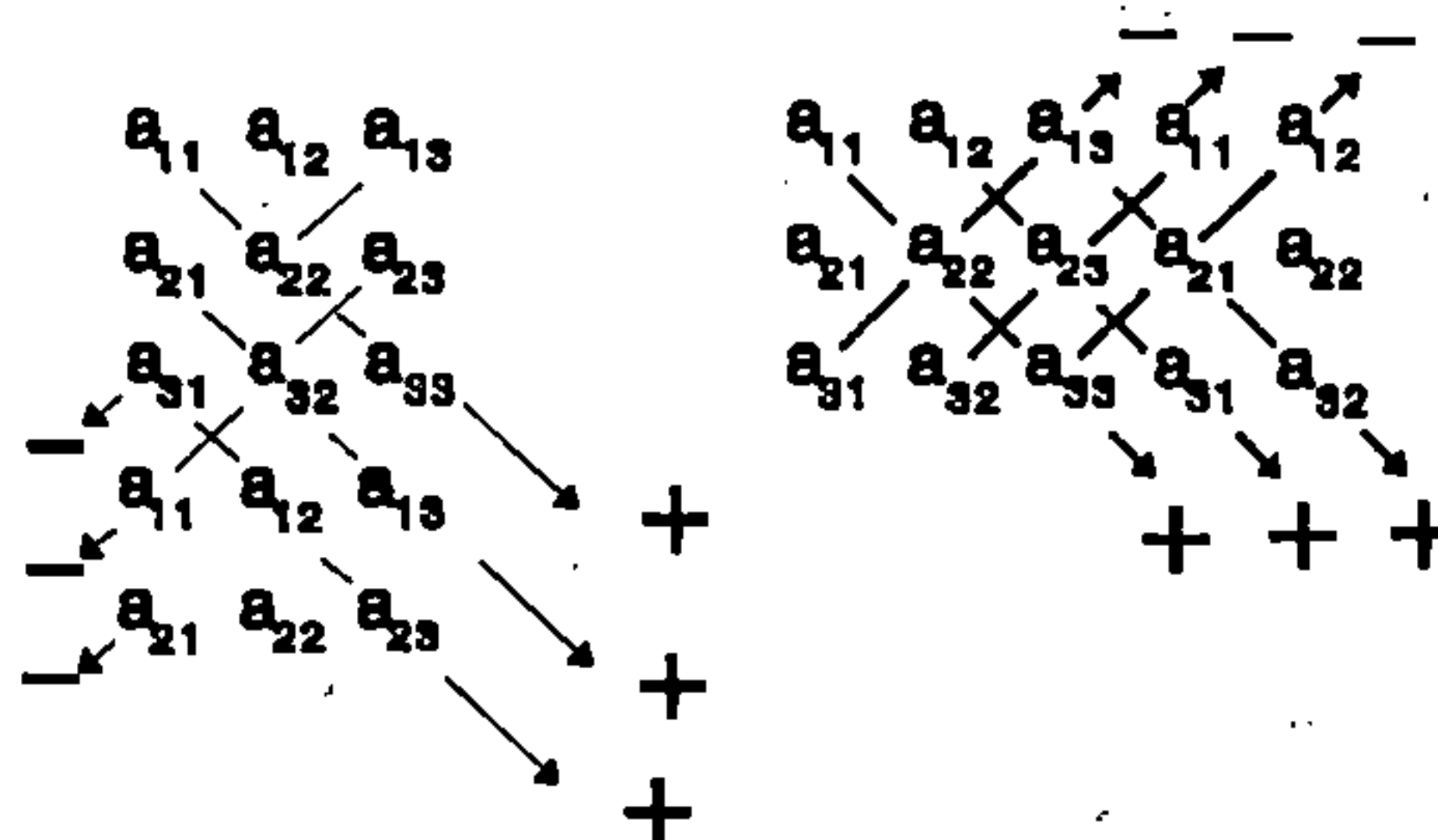
Negativos: $a_{13}a_{22}a_{31}$ $a_{12}a_{21}a_{33}$ $a_{11}a_{23}a_{32}$ (Productos con signo cambiado)

El desarrollo será:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

En la práctica se repiten las dos primeras filas o las dos primeras columnas:



Esta es la regla de Sarrus, válida sólo para determinantes de orden tres.

Se debe conocer sin embargo, un método directo de cálculo, el cual no requiere de la repetición de filas o columnas, repetición que a la larga hace perder tiempo o cometer errores. Este método de cálculo directo, tiene la forma de desarrollo de una estrella:

"Regla de la estrella"

El primer término del desarrollo es el producto de la diagonal principal: $a_{11}a_{22}a_{33}$. Los términos siguientes son el producto de los términos de las respectivas paralelas por los correspondientes extremos: $(a_{21}a_{32})a_{13}$ y $(a_{12}a_{23})a_{31}$.

Los siguientes tres van con signo cambiado y son: los de la diagonal secundaria $a_{31}a_{22}a_{13}$, y los términos de las paralelas por las respectivas esquinas opuestas: $(a_{21}a_{12})a_{33}$ y $(a_{32}a_{23})a_{11}$.

Ejemplo 7

Desarrollar por el método práctico el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -4 \\ 5 & -5 & 6 \end{vmatrix} = (1)(4)(6) + (-1)(-6)(3) + (2)(-4)(5) \\ - (5)(4)(3) - (-1)(2)(6) - (-5)(-4)(1) \\ = 24 + 15 + (-40) - (60) - (-12) - (20) \\ = -69$$

Antes de pasar a presentar las propiedades operativas de los determinantes, que nos permitirá calcularlos o evaluarlos, veamos algunos ejemplos ilustrativos de la definición, definición que utilizaremos muy pocas veces.

Ejemplo 8

¿Cuántos términos tiene el desarrollo del determinante de orden 10? Además, indicar el término general.

El determinante de orden 10 tiene $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3\,628\,800$. Son tres millones seiscientos veintiocho mil ochocientos términos. Cada uno de ellos tiene la forma: $a_{1i}a_{2j}a_{3k}a_{4l}a_{5m}a_{6n}a_{7p}a_{8q}a_{9r}a_{10s}$.

Ejemplo 9

Si $a_{13}a_{32}a_{41}a_{24}$ es uno de los 24 términos del desarrollo de un determinante de orden 4, ¿qué signo lleva dicho término?

En un determinante, el término principal es el producto de los elementos de la diagonal principal: $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$, que da la permutación base (1; 2; 3; 4) de los segundos subíndices cuando los primeros están en orden.

En el caso propuesto, primero será necesario ordenar los factores de manera que los primeros subíndices estén en el orden natural: $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$, y la permutación que hay que analizar es la de los segundos subíndices: (3; 4; 2; 1).

Veamos cuántos cambios hay que efectuar en esta permutación para llegar al orden natural:

$$(3; 4; 2; 1) \Rightarrow (3; 4; 1; 2) \Rightarrow (3; 1; 4; 2) \Rightarrow (1; 3; 4; 2) \Rightarrow (1; 3; 2; 4) \Rightarrow (1; 2; 3; 4)$$

Como son cinco cambios o sea cinco inversiones, es una permutación impar y le corresponde el signo negativo (independientemente del signo que le corresponda por los factores en sí).



Ejemplo 10

Haciendo uso exclusivamente de la definición dada, determinar el valor del determinante:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 8(-1)^{1+3} \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(8) - 40 = -320$$

Debe observarse que los términos no nulos son:

$$a_{13} = 8, a_{21} = 4, a_{32} = -2 \text{ y } a_{44} = 5.$$

Al analizar los subíndices, se encuentra que no hay dos primeros subíndices iguales ni dos segundos subíndices iguales. En consecuencia, el único término no nulo de los 24 términos del desarrollo es este término, o sea: $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$.

Para obtener el signo debemos analizar la permutación (3; 1; 2; 4)

Como se tiene: $(3; 1; 2; 4) \Rightarrow (1; 3; 2; 4) \Rightarrow (1; 2; 3; 4)$,

hay dos inversiones, entonces la permutación es par y le corresponde el signo positivo.

Finalmente:

$$|A| = a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} = (8)(4)(-2)(5) = -320$$

Este ejemplo, en este lugar, permite aplicar directamente la definición y hacer notar lo siguiente:

Como el término general del desarrollo de un determinante, no repite ningún número ni en los primeros ni en los segundos subíndices, cada término del desarrollo tiene un elemento de cada fila y uno de cada columna.

Ejemplo 11

Aplicando la definición general de determinantes, calcular:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad |B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad |C| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

En el desarrollo del determinante de la matriz **A**, el único término no nulo es el formado por los elementos de la diagonal principal, en consecuencia:

$$|A| = (2)(-1)(1)(1) = -16$$

El desarrollo del determinante de la matriz **B** es nulo, porque como el desarrollo incluye un término de cada fila y columna, al tomar un elemento de la primera columna, uno de los factores de cada sumando será cero y todos los sumandos serán iguales a cero.

$$\therefore |B| = 0$$

El determinante de la matriz triangular **C** tiene como único término no nulo, el producto formado por los elementos de la diagonal principal. El razonamiento es simple: el único elemento que se puede tomar de la primera columna, que no dé un producto nulo es 2, los demás sumandos son ceros. De la segunda columna se debe tomar el 5. No se puede tomar el elemento $a_{12} = 3$, porque estaríamos tomando dos elementos de la primera fila. Por lo tanto, hasta ahora tenemos $(2)(5)$. El único que se puede tomar de la tercera columna es el $a_{33} = 6$. No se pueden tomar los elementos $a_{13} = 1$, ni $a_{23} = 1$, por la misma razón expuesta anteriormente.

Por lo tanto, el producto hasta ahora es: $(2)(5)(6)$. Falta tomar un elemento de la cuarta columna, y el único que se puede tomar, es el $a_{44} = 1$. Por lo tanto, el desarrollo tiene solamente un elemento no nulo, el producto: $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = (2)(5)(6)(1) = 60$

$$|C| = 60$$



Los tres ejercicios resueltos en este ejercicio se presentarán como propiedades en la sección siguiente, donde omitiremos la demostración por ser una repetición del análisis que hemos realizado al resolver estos ejercicios.

9.5 Primeras propiedades

Resulta imposible aplicar directamente la definición general a un determinante de orden mayor a tres¹, el número de términos es grande y uno se perdería sólo en las permutaciones. Hemos visto que el desarrollo del determinante de orden 10 tiene 3 628 800 términos, es decir sumandos, pero cada sumando es el producto de 10 elementos. Un determinante de orden cinco tiene sólo 120 sumandos y cada uno de ellos es el producto de cinco elementos. Es evidente que es imposible aplicar la definición, sin embargo las propiedades que se dan en esta sección y en las siguientes, permiten calcular determinantes con relativa facilidad.

Se proponen en total diez propiedades, algunas de ellos con corolarios que permitirán resolver cualquier determinante, sean de elementos numéricos o literales, como tendremos oportunidad de ver. Las propiedades se han distribuido en dos secciones, en la primera las propiedades directas y en la segunda las propiedades que permiten reducir un determinante de un orden n en otro equivalente de un orden menor. En cada caso se presenta una demostración o explicación sencilla, sin entrar a complicaciones con sumatorias u otros recursos demostrativos. Se recomienda leer detenidamente las demostraciones, que mayormente son explicaciones que permiten recordar las propiedades.

1. ***"El determinante de la transpuesta de una matriz es igual al determinante de la matriz"***

$$|A| = |A^t|$$

¹ Debe indicarse que existen procedimientos similares al método de la estrella descrito anteriormente para determinantes de orden mayor a tres. Sin embargo, no son prácticos por lo que se han omitido, prefiriendo que los alumnos utilicen las propiedades que se proporcionan en las secciones siguientes para hacer los cálculos.

Se demuestra al comprobar que ambos desarrollos son idénticos. Si $A^t = B$, el desarrollo de $|B| = \sum (\pm) b_{1j} b_{2j} b_{3k} \dots b_{nr}$. Por la transposición, se cumple $|B| = \sum (\pm) a_{i1} a_{j2} a_{3k} \dots a_{nr}$, expresión idéntica al desarrollo del $|A|$, al reordenar los subíndices.

Es importante esta propiedad ya que todo lo que se pruebe para una fila es válido para las columnas. Por ello, en las propiedades se hablará de líneas para referirnos a filas o columnas.

Ejemplo 12

Calcular el valor de P

$$P = 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - 12 \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix},$$

si se sabe que

$$P = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$$

$$\text{Si hacemos } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = |D|,$$

se nos pide evaluar:

$$P = 3|D| - 12|D^t|$$

$$\text{por la propiedad, se tiene: } P = 3|D| - 12|D| = -9|D| = -90$$

$$P = -90 \quad \blacksquare$$

2. "Si se intercambian dos líneas paralelas (dos filas o dos columnas), el valor del determinante cambia de signo"

Ocurre que al intercambiar dos líneas paralelas los $n!$ términos no varían, pero cambia la permutación base dada, por cambiar los elementos de la diagonal principal. La permutación base, al producirse el intercambio, cambia de paridad con lo cual los términos positivos pasan a ser negativos, y los negativos se convierten en positivos, modificándose así solamente los signos.

Corolario 1

"Un determinante que tiene dos líneas paralelas iguales, es nulo"

Sea A una matriz con dos líneas iguales. Si aceptamos que $|A| = \alpha$, y se intercambian las líneas iguales de la matriz A , la matriz A no cambia, pero por la propiedad 2, se tiene que cumplir: $|A| = -\alpha$.

Eliminando el valor de α , se tiene:

$$|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0.$$

Corolario 2

"Si una matriz B se obtiene a partir de otra A trasladando una de sus líneas k lugares, se cumple:

$$|B| = (-1)^k |A|.$$

Si por ejemplo una quinta fila de un determinante se traslada entre la primera fila y la segunda, ella ha saltado sobre las filas 4^{ta}, 3^{ra} y 2^{da}, en consecuencia $k = 3$, y el determinante cambia de signo. El cambio de signo se explica en razón a que el proceso para llegar a esta situación implica tres intercambios sucesivos.

Ejemplo 13

Calcular el valor de Q

$$Q = 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} - 12 \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix},$$

si se sabe que:

$$P = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10.$$

Por la propiedad enunciada, se puede afirmar:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -10$$

(existía un intercambio de filas)

$$\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -10$$

(existía un intercambio de columnas)

$$\therefore Q = 3(-10) - 12(-10) = 90$$

Ejemplo 14

Evaluar el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

El valor del determinante es cero, por tener dos columnas iguales.

Ejemplo 15

Si

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ a & b & c & d \\ 4 & 3 & -1 & 1 \\ e & f & g & h \end{vmatrix} = a$$

determinar el valor del determinante:

$$|B| = \begin{vmatrix} e & f & g & h \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ a & b & c & d \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -a$$

$|B|$ tiene las mismas filas que $|A|$, solamente que la cuarta fila ha pasado a ser la primera. En consecuencia, el determinante $|B|$ se obtiene a partir de $|A|$, habiendo trasladado su cuarta fila hasta la primera, saltando las filas 3^{ra}, 2^{da} y 1^{ra}. Como $k = 3$, se cumple: $|B| = (-1)^3 |A| = -a$.

$$\therefore |B| = -a$$

3.

"Si se multiplican por una constante todos los elementos de una línea, el valor del determinante queda multiplicado por dicha constante"

Por ser cada término del desarrollo el producto de un elemento de cada fila y de cada columna, al multiplicar los elementos de una línea por una constante, en realidad se ha multiplicado por la constante cada uno de los términos del desarrollo. En consecuencia el desarrollo, o sea el valor del determinante, queda multiplicado por dicha constante.

Por lo tanto, para simplificar al máximo un determinante se debe sacar en factor común el máximo común divisor de una línea. Pero, se deberá repetir el procedimiento con todas las líneas, es decir con todas las filas y todas las columnas.

Corolario 1

Si A es una matriz de orden n , se cumple:

$$|kA| = k^n |A|$$

Debe observarse que de la propiedad 3, se deduce que si se tuviera que multiplicar un determinante por una constante, solamente debe multiplicarse una línea (fila o

columna) por dicha constante. Debe igualmente recordarse que para multiplicar una matriz por una constante, deberán multiplicarse todos los elementos por dicha constante. La validez del corolario 1 se explica por sí mismo.

Corolario 2

Si los elementos de una línea son proporcionales a los elementos de una línea paralela, el determinante es nulo.

Si sacamos en factor común de la línea proporcional el factor correspondiente, el determinante tendría dos líneas iguales, y el valor del determinante es cero.

Ejemplo 16

Simplificar el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & -6 \\ 1 & 12 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Para simplificar el determinante, en primer lugar sacamos 2 en factor común de la segunda fila:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & 12 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Ahora, de la segunda columna se puede sacar 3 en factor común, y de la tercera columna el factor 2:

$$|A| = 2(3)(2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore |A| = 12|B|,$$

donde:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Se ha logrado una simplificación del determinante $|A|$, aunque no se ha reducido el orden del determinante, que será materia de otra propiedad.

Una recomendación con respecto a esta simplificación, debe hacerse primero en las filas y luego en las columnas o viceversa:



Ejemplo 17

Evaluar el determinante

$$|P| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{vmatrix} = 24$$

Como la matriz **P** es el doble de la matriz **Q**:

$$P = 2Q$$

$$P = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

En consecuencia : $|P| = |2Q|$,
como el orden de la matriz **Q** es 3, por
el segundo corolario, se cumple:

$$|P| = 2^3 |Q|$$

$$|P| = 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Por el método de la estrella se
encuentra: $|Q| = 3$

En consecuencia, se tiene:

$$|P| = 8(3) = 24$$

$$\therefore |P| = 24$$

Ejemplo 18

Evaluar el determinante

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 0 & 4 \\ 3 & 9 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

El determinante de la matriz **T** es cero. Las columnas 1ª y 3ª son proporcionales.

$$\therefore |T| = 0$$

4.

"Si todos los elementos de una línea son ceros, el determinante es nulo"

Como en cada término del desarrollo hay un elemento de cada fila y de cada columna, al ser ceros todos los elementos de una línea, todos los términos se anulan por tener un factor cero, y el valor del determinante es cero.

Ejemplo 19

Evaluar el determinante:

$$|S| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

El determinante de la matriz **S** es cero, por tener una línea de ceros. ■

5. "Si una matriz es triangular, diagonal o escalar, su determinante es igual al producto de los elementos de su diagonal principal"

Si se analizan los términos del desarrollo de cada determinante triangular, diagonal o escalar, se encuentra que el único término que no se anula es :

$$a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$$

Ejemplo 20

Evaluar los determinantes de las matrices

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \text{diag} [1; 2; 6; -4; 12]$$

$$E = -2I_5$$

La matriz **T** es una matriz diagonal, por lo tanto $|T|$ es el producto de los elementos de su diagonal principal:

$$|T| = (1)(4)(-2)(9)(2) = -144$$

$$|T| = -144$$

La matriz **D** es diagonal

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Su determinante es el producto de los elementos de su diagonal principal:

$$|D| = (1)(2)(6)(-4)(12) = -576$$

$$|D| = -576$$

La matriz **E** es una matriz escalar de orden 5, cuyo elemento constante es -2

$$E = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

El determinante de una matriz escalar es el producto de los elementos de su diagonal principal, en este caso $(-2)^5 = -32$

$$|E| = -32$$

En general, el determinante de una matriz escalar puede expresarse como:

$$|kI_n| = k^n$$

9.6 Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

Hemos presentado cinco propiedades de los determinantes que permiten calcular directamente, para los casos indicados, el valor del determinante. Ahora nos proponemos presentar un procedimiento que nos permitirá expresar un determinante como la suma de determinantes de un orden menor en una unidad. En general, demostraremos que es posible expresar un determinante de orden n en la suma de n determinantes de orden $n - 1$. Definiremos en primer lugar el menor de un elemento de un determinante y luego su adjunto.

9.6.1 Menor de un elemento

Se llama menor M_{ij} de un elemento a_{ij} al determinante de orden $n - 1$ que resulta al suprimir en la matriz A todos los elementos de la fila i y de la columna j . En consecuencia, existe un menor por cada elemento del determinante, y por lo tanto, un determinante de orden n tiene n^2 menores.

Ejemplo 21

Determinar todos los menores del determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Como el determinante es de orden 3, se deben calcular $3^2 = 9$ menores, cada uno de los cuales se denota como M_{ij} .

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 40$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -16$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 12$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -18$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$



9.6.2 Adjunto de un elemento

Se llama adjunto o cofactor del elemento a_{ij} a su menor con su signo o con signo contrario según sea par o impar la suma $i + j$.

El adjunto del elemento a_{ij} lo denotamos como a_{ij} .

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Si $i + j$ es par, el valor del adjunto es igual al valor del menor, en caso contrario, ellos son de signo contrario.

Ejemplo 22

Determinar todos los adjuntos del determinante de la matriz A del ejemplo 20.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

En el ejercicio anterior, se calcularon 9 menores, ahora a partir de los resultados, obtendremos los 9 adjuntos. Usaremos la fórmula: $a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

$$a_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (1) \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 40$$

16
24

$$a_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6$$

0

$$a_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (1) \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8$$

12
3

$$a_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 16$$

$$a_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

$$a_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -12$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -18$$

$$a_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3$$

$$a_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$



9.6.3 Desarrollo por los elementos de una línea

Demostraremos que un determinante de orden n puede ser descompuesto como la suma de n determinantes de orden $n - 1$. Presentamos una explicación muy simple de la demostración:

Sea el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{vmatrix}$$

si tomamos los $n!$ términos de su desarrollo y factorizamos los elementos de la fila i : a_{i1} , a_{i2} , a_{i3} , $\dots$, a_{ik} , se obtiene:

$$|A| = a_{i1} \alpha_{i1} + a_{i2} \alpha_{i2} + a_{i3} \alpha_{i3} + \dots + a_{ik} \alpha_{ik}$$

también:

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} \alpha_{ik}$$

donde cada α_{ik} resulta ser el adjunto o cofactor del correspondiente elemento a_{ik} .

Si se factorizan los elementos de la columna j : a_{1j} , a_{2j} , a_{3j} , . . . , a_{kj} , resultaría:

$$|A| = a_{1j}a_{1j} + a_{2j}a_{2j} + a_{3j}a_{3j} + \dots + a_{kj}a_{kj}$$

también:

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{kj}a_{kj}$$

donde cada a_{kj} es el adjunto o cofactor del correspondiente elemento a_{kj} .

En consecuencia queda explicado cómo se demuestra el siguiente teorema

TEOREMA

"El valor de un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea cualquiera por los respectivos adjuntos o cofactores"

Este teorema es el más importante para el desarrollo de determinantes numéricos o en ejercicios de demostración, como propondremos más adelante. El teorema permite desarrollar un determinante de un orden n , como n determinantes de orden $n - 1$. Este hecho permite reducir el orden de un determinante hasta uno en el cual sea factible aplicar un desarrollo conocido o una propiedad.

Ejemplo 23

Evaluar el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Como un determinante, de acuerdo al teorema demostrado, puede ser desarrollado por cualquier línea (fila o columna), el determinante de la matriz A puede ser desarrollado de seis maneras distintas².

Desarrollaremos el determinante de la matriz A , por los elementos de la primera fila, y obtendremos la suma de cuatro determinantes de tercer orden:

$$|A| = a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} + a_{13}a_{13} + a_{14}a_{14}$$

$$\begin{aligned}
 |A| &= (1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \\
 &+ (1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Desarrollando los determinantes de tercer orden, se tiene:

$$\begin{aligned}
 |A| &= 4 - 72 + 102 - 68 \\
 |A| &= -34
 \end{aligned}$$

Conviene elegir una línea que tenga el mayor número de ceros³, que en el caso que nos ocupa es la tercera columna:

$$\begin{aligned}
 |A| &= (1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-2)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} + 0 \\
 |A| &= 102 + 0 + (-136) + 0 \\
 |A| &= -34
 \end{aligned}$$

El desarrollo por elementos de una línea recibe también el nombre de desarrollo por menores o por adjuntos o cofactores. En realidad este desarrollo es un caso particular del desarrollo de LAPLACE⁴

³ Algunos prefieren elegir la línea que tiene los números de mayor valor absoluto, a fin de no tener que manipular dichos números en las evaluaciones de los determinantes de menor orden.

⁴ Pedro Simon, marqués de Laplace, 1749 – 1827, gran matemático, físico y astrónomo francés.

Ejemplo 24

Determinar el valor de M , de manera que se cumpla:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & w \end{vmatrix} = M\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}\right)$$

Para obtener el valor de M , será necesario desarrollar el determinante y comparar su resultado con el segundo miembro.

Desarrollando por los elementos de la segunda fila, se obtienen los cuatro siguientes sumandos, siendo los tres últimos nulos:

$$(1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{vmatrix} + x(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 0 & 0 \\ 1 & 0 & z & 0 \\ 1 & 0 & 0 & w \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 =$$

El primer sumando es igual a $-yzw$

El segundo sumando es igual a x veces el desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 0 & 0 \\ 1 & 0 & z & 0 \\ 1 & 0 & 0 & w \end{vmatrix}$$

Este determinante se puede desarrollar por los elementos de la segunda fila, y su valor final es:

$$(1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & w \end{vmatrix} + y(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & z & 0 \\ 1 & 0 & w \end{vmatrix} + 0 + 0 = -zw + y(-z - w)$$

$$-\cancel{x} yzw \left(\frac{1}{\cancel{x}} \right) - yzw$$

MÁS PROPIEDADES

229

En consecuencia, se tiene en el primer miembro:

$$- yzw + x(-zw - yz - yw) =$$

$$- yzw - xzw - xyw - xyz =$$

Factorizando $-xyzw$ en el primer miembro, e igualando al segundo miembro, se tiene:

$$-xyzw \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} \right] = M \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} \right]$$

$$\therefore M = -xyzw$$

9.7 Más propiedades

Se presentan a continuación otras cinco propiedades de los determinantes, que se numeran del 6 al 10. La propiedad más importante es la número 8, que permite reducir un determinante de orden n en un solo determinante de orden $n - 1$. Las propiedades 6 y 7 permiten entender la explicación de la propiedad número 8, la propiedad 9 se refiere al producto de determinantes, cuya demostración excede este texto. La propiedad 10 es la denominada vandermondiana, determinante de forma muy especial y de fácil reconocimiento.

6. *"La suma de los productos de los elementos de una línea, multiplicados por los adjuntos de los elementos de una línea paralela a ella es cero"*

Consideremos, a fin de aclarar ideas, el desarrollo de un determinante de tercer orden como se ha indicado en la propiedad, tomando los elementos de la primera fila pero los adjuntos de la tercera:

$$x = a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33}$$

El desarrollo del segundo miembro corresponde al de un determinante que tiene como tercera fila los elementos: a_{11} , a_{12} y a_{13} , en consecuencia:

$$x = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Este determinante tiene dos filas iguales y su valor es cero.

$$a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0$$

Queda comprobado, para el caso de un determinante de orden tres, que se puede generalizar a cualquier orden lo enunciado en la propiedad.

7. *"Si los elementos de una línea son polinomios de p términos. se puede descomponer el determinante en la suma de p determinantes que tienen las mismas restantes líneas y en lugar de aquella, la formada por los primeros, segundos,... y p - ésimos, respectivamente"*

Sea el determinante de tercer orden⁵, donde la primera fila es la suma de dos términos:

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d & e+f \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} = (a+b)a_{11} + (c+d)a_{12} + (e+f)a_{13} \\ = (aa_{11} + ca_{12} + ea_{13}) + (ba_{11} + da_{12} + fa_{13})$$

El segundo miembro es la suma de dos determinantes:

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d & e+f \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & e \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d & f \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}$$

Igualmente se demostraría, si en lugar de dos términos fueran p términos, fuera un determinante de orden n , o si se tratara de otra línea.

Debe señalarse que dos o más determinantes de orden n pueden sumarse solamente si tienen $n - 1$ líneas iguales; el determinante suma tendrá las mismas $n - 1$ líneas comunes y la restante es la suma de las no comunes.

⁵

La demostración puede efectuarse con un determinante de orden n , en el que una de sus líneas tenga polinomios de p términos.

9

Ejemplo 25

Efectuar la suma de los determinantes

Orden 4.
tener 3 filas =

$$x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Como los sumandos tienen comunes las filas 1^{ra}, 3^{ra} y 4^{ta}, ellas se repetirán en la suma. La segunda fila de la suma se obtiene sumando los elementos de las segundas filas.

$$x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

donde los elementos de la segunda fila se obtienen de la siguiente manera:

$$1 + 4 = 5 \quad 3 + (-2) = 1 \quad 1 + 1 = 2 \quad 4 + 5 = 9$$

Ejemplo 26

Simplificar

$$k = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Se tiene la suma de tres determinantes, que tienen dos columnas comunes: la 1^{ra} y 3^{ra}.

De acuerdo a la propiedad 7, ellas se repiten en la suma, y se suman las entradas de la segunda columna:

$$k = \begin{vmatrix} 2 & 1+1+1 & 4 \\ 3 & 0+(-1)+9 & 8 \\ 3 & 2+5+2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 8 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$-(4)(8)(3) - 3(3)(1) - 9(6)(2)$
 $2(8)(1) + 3(8)(3) + (6)(3)(4)$
 $160 - 105 = 55$

Los cálculos del determinante de tercer orden nos da:

$$k = -25$$

Handwritten calculations for the 3x3 determinant:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 8 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 2(8 \cdot 1 - 9 \cdot 3) - 3(1 \cdot 1 - 9 \cdot 8) + 4(3 \cdot 9 - 3 \cdot 8) = 2(-19) - 3(-7) + 4(9) = -38 + 21 + 36 = 19$$

Handwritten calculations for the 3x3 determinant:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 8 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 2(8 \cdot 1 - 9 \cdot 3) - 3(1 \cdot 1 - 9 \cdot 8) + 4(3 \cdot 9 - 3 \cdot 8) = -38 + 21 + 36 = 19$$

Ejemplo 27

Simplificar el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a & d & 2a - 3d \\ b & e & 2b - 3e \\ c & f & 2c - 3f \end{vmatrix}$$

Por la propiedad 7, se puede escribir:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & d & 2a \\ b & e & 2b \\ c & f & 2c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & d & 3d \\ b & e & 3e \\ c & f & 3f \end{vmatrix}$$

Es evidente que el resultado será cero, puesto que los dos determinantes son nulos al tener columnas proporcionales.

Ejemplo 28

Demostrar:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Efectuaremos una demostración directa, comprobando que el primer miembro es igual al segundo miembro. Por la propiedad 7, el primer miembro se puede descomponer en dos determinantes:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b+c & c+a & b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

En el primer determinante disminuimos la tercera columna de la segunda, y en el segundo determinante, disminuimos la tercera columna de la primera

$$\begin{vmatrix} b+c & c & a \\ b_1+c_1 & c_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & b \\ c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

Ahora, en el primer determinante, efectuamos: 1^{ra} columna – 2^{da} columna, y en el segundo determinante: 2^{da} columna – 1^{ra} columna:

$$\begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

Finalmente, usaremos el corolario 2 de la propiedad 2, de la siguiente manera: en el primer determinante, la 3^{ra} columna "salta" dos columnas, y en el segundo determinante, la 1^{ra} columna "salta" dos columnas:

$$(-1)^2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

Por lo tanto, se ha probado que:

$$2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

■

8. "Un determinante no varía al sumar a los elementos de una línea cualquiera las correspondientes de otra paralela multiplicadas por una constante"

Sea $|A|$ un determinante de tercer orden al cual le agregamos k veces un determinante que tiene dos líneas iguales y cuyo valor es cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Se puede observar que el determinante cuyo factor es k es nulo, puesto que tiene iguales las filas 1^{ra} y 3^{ra}.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \end{vmatrix}$$

Hemos multiplicado esta matriz nula por k , efectuando el producto de su tercera fila por dicho factor. Ahora los determinantes pueden ser sumados, puesto que tienen dos líneas iguales, las que se repetirán en la suma:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{11} & a_{32} + ka_{12} & a_{33} + a_{13} \end{vmatrix}$$

En consecuencia, se ha agregado a la tercera fila k veces la primera y el valor del determinante no ha variado. Es evidente que puede disminuirse en k veces y el valor del determinante tampoco cambiará. Queda así demostrada la propiedad, para el caso específico mostrado, caso que sin ninguna dificultad puede ser generalizado a un determinante de orden n , y para una línea cualquiera.

En los siguientes cuatro ejercicios, se mostrará la efectividad de la propiedad 8 en la evaluación de determinantes.

Ejemplo 29

Evaluar el determinante:

$$|X| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Por la propiedad 8 podemos agregar a la 1^{ra} columna la 3^{ra} :

$$|X| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Como el determinante equivalente tiene dos columnas iguales, su valor es cero.

$$|X| = 0$$

Ejemplo 30

Evaluar el determinante:

$$|Y| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Agregando a la primera columna las restantes (En realidad, efectuaremos en un solo paso las siguientes operaciones: agregar a la 1^{ra} columna, la 5^{ta}; luego, agregar a la 1^{ra} columna, la 4^{ta}; agregar a la 1^{ra} columna la 3^{ra}; agregar a la 1^{ra} columna, la 2^{da}):

$$|Y| = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 11 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 11 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 11 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 11 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Factorizando 11 de la primera columna, se tiene:

$$|Y| = 11 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Disminuyendo las columnas 2^{da}, 3^{ra}, 4^{ta} y 5^{ta} en el doble de la primera:

$$|Y| = 11 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Se ha transformado la matriz en una triangular inferior, y su valor es el producto de los elementos de su diagonal principal: $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$.

En consecuencia, $|Y| = 11 \times 1 = 11$.

$$|Y| = 11$$

Ejemplo 31

Evaluar el determinante

$$|K| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

Como primera operación de reducción, restemos la primera fila a las restantes, a fin de obtener en la primera columna tres ceros:

$$|K| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna:

$$|K| = (1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 \Rightarrow |K| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Podemos, a modo de ilustración, generar más ceros en la primera columna, ejecutando las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} 2^{\text{da}} \text{ fila} &- 2(1^{\text{ra}} \text{ fila}) \\ 3^{\text{da}} \text{ fila} &- 3(1^{\text{ra}} \text{ fila}) \end{aligned}$$

$$|K| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

Se puede ahora desarrollar por los elementos de la primera columna:

$$|K| = (1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} + 0 + 0 \Rightarrow |K| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } |K| = 10 - 9 = 1$$

$$\therefore |K| = 1$$



Ejemplo 32

Demostrar

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2$$

Demostraremos que el primer miembro es igual al segundo. A fin de crear la expresión del paréntesis, multipliquemos la segunda columna por f , la tercera por e , y la cuarta por d , y para que no se altere el primer miembro, dividimos entre el producto def :

$$\frac{1}{def} \begin{vmatrix} 0 & af & be & cd \\ -a & 0 & de & de \\ -b & -df & 0 & df \\ -c & -ef & -fe & 0 \end{vmatrix} =$$

Ahora, disminuimos la segunda columna en la tercera, y le agregamos la cuarta:

$$\frac{1}{def} \begin{vmatrix} 0 & af-be+cd & be & cd \\ -a & 0 & de & de \\ -b & 0 & 0 & df \\ -c & 0 & -fe & 0 \end{vmatrix} =$$

Desarrollando por la segunda columna:

$$\frac{1}{def} \left\{ (af-be+cd)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -a & de & de \\ -b & 0 & df \\ -c & -fe & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 \right\} =$$

El signo negativo del factor $(-1)^{1+2}$, lo introducimos en el determinante:

$$\frac{af-be+cd}{def} \begin{vmatrix} a & de & de \\ b & 0 & df \\ c & -fe & 0 \end{vmatrix} =$$

Si se introducen los factores "d·e" del denominador como divisores de las columnas 2^{da} y 3^{ra}, se obtiene:

$$\frac{af-be+cd}{f} \begin{vmatrix} a & d & e \\ b & 0 & f \\ c & -f & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{af-be+cd}{f} (cdf-bef+af^2) =$$

Finalmente, hemos probado que el primer miembro es igual al segundo:

$$(af-be+cd)^2 = (af-be+cd)^2$$



9. Fórmula de Binet – Cauchy⁶

"El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes"

$$|AB| = |A||B|$$

La demostración de esta propiedad, conocida como fórmula de Binett – Cauchy, se efectúa mediante el desarrollo de un determinante por los elementos de k filas y k columnas. Este desarrollo no se presenta en este curso.

10. Determinante de Vandermonde

Es el formado por las potencias sucesivas de n números distintos: a, b, c, ... g, h, k, dispuestos de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a & b & c & \dots & h & k \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots & h^2 & k^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \dots & h^{n-1} & k^{n-1} \end{vmatrix}$$

Se llama también alternante o determinante de las diferencias. Debe observarse que el determinante es distinto de cero si y sólo si todos los números a, b, c, ..., g, h y k, son de diferente valor.

Su valor es:

$$\begin{aligned} & (b - a)(c - a)(d - a)\dots(g - a)(h - a)(k - a)x \\ & (c - b)(d - b)\dots(g - b)(h - b)(k - b)x \\ & (d - c)\dots(g - c)(h - c)(k - c)x \\ & \dots\dots\dots x \\ & \dots\dots\dots x \\ & (h - g)(k - g)x \\ & (k - h) \end{aligned}$$

Debe observarse que el desarrollo del determinante de Vandermonde o vandermondiana, como también se le llama, es igual al producto de todas las diferencias que se obtienen restando cada número a, b, c, ... g, h, k, de todos los que le siguen,

motivo por el cual se le llama determinante de las diferencias. La demostración se obtiene en forma recursiva, restando inicialmente la última fila menos la anterior multiplicada por a , y esta menos la anterior multiplicada por a , hasta llegar a restar la segunda fila menos la primera multiplicada por a . Al desarrollar por los elementos de la primera columna, se logra factorizar en las columnas, y se obtiene un determinante de un orden menor, pero también del tipo de Vandermonde⁷.

Ejemplo 33

Evaluar el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2^2 & 3^2 & 1^2 & 7^2 \\ 2^3 & 3^3 & 1^3 & 7^3 \end{vmatrix}$$

Su desarrollo, por ser un determinante de Vandermonde, es:

$$(3 - 2)(1 - 2)(7 - 2)(1 - 3)(7 - 3)(7 - 1) = 240$$

9.8 Determinante de la matriz inversa

Si A es una matriz inversible, se cumple:

$$AA^{-1} = I_n$$

Por la propiedad del determinante del producto de matrices (Fórmula de Binet – Cauchy), se cumple:

$$|AA^{-1}| = |I_n|$$

$$|A| |A^{-1}| = |I_n|$$

⁷

Se sugiere hacer una demostración previa con un determinante de orden 4 o 5, para luego efectuar la demostración para una vandermondiana general.

de donde se puede despejar $|A^{-1}|$:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Queda así demostrado el siguiente:

Teorema

"El determinante de la inversa de una matriz es igual a la inversa o recíproco del determinante de la matriz"

Ejemplo 34

Calcular el determinante de la inversa de la matriz

$$|Y| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Podría pensarse que es necesario invertir la matriz y calcular su determinante, pero no es necesario, al cumplirse:

$$|Y^{-1}| = \frac{1}{|Y|}$$

En un ejercicio anterior, se encontró: $|Y| = 11$.

En consecuencia:

$$|Y^{-1}| = \frac{1}{11}$$

Ejercicios y problemas propuestos

Capítulo 9

1. Calcular los determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \\ \operatorname{sen} \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg} \alpha \end{vmatrix}$$

$$f) \begin{vmatrix} \sqrt{2} - 1 & \sqrt{3} + 1 \\ \sqrt{3} - 1 & \sqrt{2} + 1 \end{vmatrix}$$

$$g) \begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 1 & \log_b a \end{vmatrix}$$

$$h) \begin{vmatrix} x - 1 & 1 \\ x^3 & x^2 + x + 1 \end{vmatrix}$$

2. Calcular los determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \\ 10 & 9 & 10 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$f) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Resuelva los ejercicios siguientes, haciendo uso exclusivamente de la definición de un determinante:

a) ¿Con qué signo figuran en el determinante de 5^{to} orden los productos $a_{22}a_{31}a_{43}a_{14}a_{55}$ y $a_{14}a_{32}a_{23}a_{45}a_{51}$?

b) Elegir m y n de tal manera que el producto: $a_{12}a_{41}a_{2m}a_{3n}$, figure en el desarrollo de un determinante de 4^{to} orden con signo menos.

c) Escribir todos los términos del desarrollo del determinante de 5^{to} orden que tienen la forma: $a_{1q}a_{21}a_{3p}a_{4r}a_{55}$.

d) ¿Con qué signo figura en un determinante de orden impar el producto de su diagonal principal?

- e) ¿Con qué signo figura en un determinante de orden n , el producto de los elementos de su diagonal secundaria?
- f) Explique por qué el siguiente determinante es siempre nulo.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

- g) Calcular los determinantes de las matrices

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & n-1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & a \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & n \end{bmatrix}$$

4. Calcular los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & -2 \\ 3 & 11 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & -2 \\ 0 & 21 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -6 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 6 \\ 7 & 3 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 16$

5. Desarrollar los siguientes determinantes, según lo indicado en cada caso:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & a \\ 1 & 3 & 1 & b \\ 1 & 1 & 3 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix} ; \text{ por los elementos de la última columna.}$$

$$b) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}^t ; \text{ por los elementos de la primera fila.}$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} ; \text{ por los elementos de la tercera fila.}$$

6. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 5 & x \\ 3 & 8 & -1 \\ 6 & 10 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} 2+x & x & x \\ x & 3+x & x \\ x & x & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

$$c) \begin{vmatrix} a & 0 & x \\ b & x & b \\ c & c & c \end{vmatrix} = 0$$

7. Calcular el determinante de una matriz antisimétrica de orden impar.

8. Si $|B|$ es un determinante de orden n , que se obtiene a partir de $|A|$ con todas sus filas en orden inverso, ¿qué relación existe entre $|A|$ y $|B|$?

9. Demostrar:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

10. Demostrar:

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

11. Demostrar las siguientes identidades:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = (a^3 - b^3)^2$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = (a^3 + b^3)^2$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} -2bc & c^2 & b^2 \\ c^2 & -2ac & a^2 \\ b^2 & a^2 & -2ab \end{vmatrix} = -2abc \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

12. Comprobar las siguientes identidades:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -a+b+c & b & c \\ a & a-b+c & c \\ a & b & a+b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 2bc - a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca - b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab - c^2 \end{vmatrix} = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$$

$$c) \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

$$d) \begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2(ab+bc+ca)^3$$

$$e) \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 \\ x & x & b_1 & b_2 \\ x & x & x & c_1 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x(x-a_1)(x-b_1)(x-c_1)$$

$$f) \begin{vmatrix} 2(ac-b^2) & ac_1+a_1c-2bb_1 & ac_2+a_2c-2bb_2 \\ ac_1+a_1c-2bb_1 & 2(a_1c_1-b_1^2) & a_1c_2+a_2c_1-2b_1b_2 \\ ac_2+a_2c-2bb_2 & a_1c_2+a_2c_1-2b_1b_2 & 2(a_2c_2-b_2^2) \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2$$

13. Demostrar que el determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a + \alpha + \beta & b + \alpha + \beta_1 & c + \alpha + \beta_2 \\ 1 & a_1 + \alpha_1 + \beta & b_1 + \alpha_1 + \beta_1 & c_1 + \alpha_1 + \beta_2 \\ 1 & a_2 + \alpha_2 + \beta & b_2 + \alpha_2 + \beta_1 & c_2 + \alpha_2 + \beta_2 \end{vmatrix}$$

es independiente de las variables $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ y β_2 .

14. Demostrar las siguientes proposiciones:

a) Los números 209, 646 y 931 son divisibles por 17. Demostrar sin desarrollar que el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 6 & 4 & 6 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

es divisible por 17.

b) Demostrar sin desarrollar que el determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 & 9 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$

es divisible por 19.

c) Demostrar sin desarrollar que el determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

es divisible por 331.

15. Demostrar que no se altera el valor de un determinante si se altera el signo de los elementos cuya suma de índices es impar.

16. Comprobar que son nulos los determinantes siguientes e indicar la propiedad en la que se funda:

$$a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & a & a^n \\ a^p & a^{p+1} & a^{p+n} \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & na_2 \\ b_1 & b_2 & nb_2 \\ c_1 & c_2 & nc_2 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a + \alpha & b + \beta & c + \gamma & d + \delta \\ a_1 + \alpha & b_1 + \beta & c_1 + \gamma & d_1 + \delta \end{vmatrix}$$

17. Expresar factorizado el desarrollo de los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^4 & b^4 \\ 1 & a^6 & b^6 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-3 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix}$$

18. Demostrar

$$\begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$$

19. Calcular los siguientes determinantes de orden $n + 1$:

a)
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & n \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & . & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & -1 & x \end{vmatrix}$$

c)
$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & -y_n & x_n \end{vmatrix}$$

20. Desarrollar los determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$$

21. Desarrollar los determinantes siguientes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \operatorname{sen}(a+b) & \operatorname{sen}(b+c) & \operatorname{sen}(c+a) \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}$$

22. Calcular el valor del determinante de orden $2n$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & . & . & . & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & . & . & . & b & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & b & . & . & . & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & . & . & . & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

MATRIZ ADJUNTA

10.1 Introducción

El propósito de este capítulo es presentar un procedimiento para encontrar la inversa de una matriz haciendo uso de los determinantes. Este procedimiento no es el más adecuado para invertir matrices de orden superior a cuatro, sin embargo se presenta por ser de interés teórico e histórico. Veremos que los determinantes están íntimamente ligados a la inversa de una matriz por medio de la llamada matriz adjunta y lo más importante es que llegaremos a determinar una condición para que una matriz sea regular.

10.2 Matriz adjunta

La matriz adjunta o simplemente adjunta de una matriz cuadrada es la matriz transpuesta de la formada al sustituir cada elemento por su adjunto o cofactor

La adjunta de una matriz A se denota: $\text{Adj } A$.

Si A es una matriz cuadrada de orden $n \times n$, $\text{Adj } A$ es su matriz adjunta:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Es probable que el alumno tenga en este instante una confusión entre los términos adjunta y adjunto. Para entender estos términos debe observarse que las matrices son femeninas y los determinantes, masculinos. Es así como el término adjunta, que se define en este capítulo, es una matriz; mientras que el término adjunto, definido anteriormente, es un determinante. La adjunta es un arreglo de números y no posee un valor numérico, mientras que el adjunto o cofactor es un número. Por ser la adjunta una matriz se le denota **Adj A**, con letras en negrita. La notación del adjunto o cofactor de un elemento de una matriz se denota como se hizo anteriormente: a_{ij} .

Ejemplo 1

Determinar la adjunta de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar la adjunta de la matriz dada, debemos calcular inicialmente los adjuntos o cofactores de cada elemento: $a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Es decir, debemos calcular 9 adjuntos o cofactores, por ser 9 los elementos de la matriz dada.

Calculamos los respectivos adjuntos o cofactores de los elementos de cada columna, y los colocamos en fila, de manera que logremos directamente la transposición mencionada en la definición.

Los adjuntos o cofactores de los elementos de la primera columna son a_{11} , a_{21} y a_{31} , y el cálculo de ellos es:

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11 \quad a_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \quad a_{31} = 17$$

Los adjuntos o cofactores de los elementos de la segunda columna son a_{12} , a_{22} y a_{32} , y el cálculo de ellos es:

$$a_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \quad a_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad a_{32} = -6$$

En forma similar, los adjuntos o cofactores de los elementos de la tercera columna son a_{13} , a_{23} y a_{33} , y los cálculos son:

$$a_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \quad a_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \quad a_{33} = -7$$

Formando la matriz adjunta de A , se obtiene:

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -11 & -7 & 17 \\ -6 & 0 & -6 \\ 7 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

Nota La matriz que resulta al reemplazar cada elemento de una matriz A , por su adjunto, recibe el nombre de matriz cofactores. La matriz de cofactores se denota:

Cof A .

Así, para la matriz $A = [a_{ij}]$, se tiene:

$$\text{Cof } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se observa que:

La adjunta de la matriz A es la transpuesta de su matriz de cofactores

es decir:

$$\text{Adj } A = (\text{Cof } A)^t$$

10.3 Propiedades de la matriz adjunta

Enunciaremos y demostraremos cinco propiedades de la matriz adjunta, siendo la primera la más importante porque permite verificar el cálculo de la matriz adjunta. Se recomienda sólo recordar la primera, y aprender a deducir las demás, porque estas otras propiedades tienen solamente aplicación en preguntas particulares.

1. *Las matrices A y $\text{Adj } A$, son conmutables o permutables, y su producto es la matriz escalar $|A|$*

Por lo tanto:

$$A (\text{Adj } A) = |A| I_n$$

$$(\text{Adj } A) A = |A| I_n$$

En efecto, si multiplicamos A por $\text{Adj } A$, el elemento que ocupa la fila i y la columna j sería:

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + a_{i3}a_{j3} + \cdots + a_{in}a_{jn}$$

Si $i = j$, se tiene el desarrollo del determinante de la matriz A , en consecuencia, todos los elementos de la diagonal principal del producto son iguales a $|A|$.

Si $i \neq j$, se tienen los productos de los elementos de una línea por los adjuntos o cofactores de otra línea paralela y su valor es cero, de acuerdo a la sexta propiedad de los determinantes. En consecuencia, todos los elementos que no se encuentren en la diagonal principal, son iguales a cero.

Se cumple en todos los casos:

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & |A| & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & |A| \end{bmatrix} = |A| I_n$$

Es importante observar que al calcular la adjunta de una matriz, la verificación de ella se puede realizar comprobando uno de los productos:

$$A (\text{Adj } A) = |A| I_n$$

$$(\text{Adj } A) A = |A| I_n$$

donde:

$$|A| I_n = \text{Diag } (|A|; |A|; |A|; \dots; |A|)$$

Es decir, los productos $A(\text{Adj } A)$ y $(\text{Adj } A) A$ son iguales a una matriz diagonal con elementos iguales a $|A|$.

Ejemplo 2

Comprobar el cálculo de la adjunta de la matriz A del ejemplo 1. Verificaremos los cálculos efectuando el producto: $A(\text{Adj } A)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & -7 & 17 \\ -6 & 0 & -6 \\ 7 & -7 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42 & 0 & 0 \\ 0 & -42 & 0 \\ 0 & 0 & -42 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{matriz diagonal}$$

2. *El valor del determinante de la adjunta de una matriz regular A es igual al determinante de la matriz A elevado al exponente $n - 1$, donde n es el orden de la matriz A*

Es decir:

$$| \text{Adj } A | = |A|^{n-1}$$

En efecto, se sabe que

$$A(\text{Adj } A) = |A| I_n,$$

tomando determinantes a ambos miembros, se tiene:

$$| A(\text{Adj } A) | = | (|A| I_n) |$$

Por las propiedades de los determinantes, se cumple:

$$|A| |Adj A| = |A|^n$$

Si dividimos por $|A|$, se comprueba:

$$|Adj A| = |A|^{n-1}$$

En consecuencia, para calcular el determinante de la adjunta de una matriz dada, no es necesario determinar la adjunta y luego calcular su determinante, bastará aplicar la propiedad demostrada.

Ejemplo 3

Calcular el determinante de la adjunta de la matriz Q

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Como la matriz es de orden 3, se cumple: $|Adj Q| = |Q|^{3-1}$

En consecuencia:

$$|Adj Q| = (45)^2 = 2025$$

y no hemos tenido que calcular la matriz $Adj A$. ■

3. La inversa de la adjunta de una matriz regular A es igual a la matriz A entre su determinante

Es decir:

$$(Adj A)^{-1} = \frac{A}{|A|}$$

En efecto, como se cumple:

$$A(Adj A) = |A|I_n,$$

posmultipliquemos ambos miembros por $(Adj A)^{-1}$:

$$A(Adj A)(Adj A)^{-1} = |A|I_n(Adj A)^{-1}$$

Simplificando, se obtiene:

$$A(I) = |A|(Adj A)^{-1}$$

Como la matriz A es regular, $|A| \neq 0$, se puede despejar: $(Adj A)^{-1}$

$$(Adj A)^{-1} = \frac{A}{|A|}$$

4. *La adjunta de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de las matrices adjuntas en orden inverso*

Es decir:

$$\text{Adj } AB = \text{Adj } B \text{ Adj } A$$

No se proporciona demostración de esta propiedad en este texto, pero se utilizará en la demostración de la propiedad siguiente. Debe observarse sin embargo que mantiene una constante en matrices: el orden inverso.

5. *La adjunta de la adjunta de una matriz A es igual a la matriz A multiplicada por el determinante de A elevada al exponente $(n - 1)^2$, donde n es el orden de la matriz A*

Es decir:

$$\text{Adj}(\text{Adj } A) = |A|^{(n-1)^2} A$$

En efecto, como se cumple:

$$A(\text{Adj } A) = |A| I_n$$

tomando adjunta a ambos miembros, se tiene:

$$\text{Adj } [A(\text{Adj } A)] = \text{Adj } [|A| I_n]$$

Por la propiedad anterior, en el primer miembro se cumple:

$$\text{Adj } (\text{Adj } A) \text{ Adj } A = \text{Adj } [|A| I_n]$$

En el segundo miembro $\text{Adj } [|A| I_n]$, se tiene la adjunta de una matriz $B = |A| I_n$. Como $\text{Adj } B = |B|^{n-1} I$, y $|B| = |A|^n$, el segundo miembro, es:

$$\text{Adj } [|A| I_n] = (|A|^n)^{n-1} I$$

Reemplazando, se tiene:

$$\text{Adj } (\text{Adj } A) \text{ Adj } A = (|A|^n)^{n-1} I$$

Posmultiplicando por la matriz A ,

$$\text{Adj } (\text{Adj } A) (\text{Adj } A) A = (|A|^n)^{n-1} A$$

Reemplazando: $(\text{Adj } A) A = |A| I$

$$\text{Adj } (\text{Adj } A) |A| I = (|A|^n)^{n-1} A$$

Como A es una matriz regular, se puede despejar $\text{Adj}(\text{Adj } A)$

$$\text{Adj}(\text{Adj } A) = |A|^{n^2 - n - 1} A$$

10.4 Construcción de la inversa de una matriz

Demostraremos una expresión que pudo ser incluida como una propiedad de la adjunta de una matriz, pero que por su importancia se propone como tema aparte.

La demostración se inicia, como las anteriores, con la primera propiedad:

$$A(\text{Adj } A) = |A| I_n$$

Si admitimos que A es regular, existe A^{-1} , y podemos premultiplicar la igualdad por esta matriz inversa:

$$A^{-1}A(\text{Adj } A) = A^{-1}|A| I_n$$

$$\text{Adj } A = |A| A^{-1}$$

En consecuencia, se tiene:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

Es decir, hemos probado que:

La inversa de una matriz A se puede construir dividiendo la matriz adjunta de A entre el determinante de A

Es evidente por otro lado que si el determinante de una matriz es cero, no es posible hallar la inversa de la matriz A .

Es decir, si $|A| = 0$, la matriz es singular y la matriz A no posee inversa.

Esta conclusión es la más importante del capítulo que desarrollamos.

Corolario

Si la matriz B es la inversa de otra matriz A , el elemento b_{ij} es igual al adjunto del elemento a_{ji} entre el determinante de la matriz A .

En consecuencia, se cumple:

$$B = A^{-1} \Rightarrow b_{ij} = \frac{a_{ji}}{|A|}$$

Ejemplo 4

Construir la inversa de la matriz

$(-1)^{1+1}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

En ejercicios anteriores hemos encontrado:

$|A| = -42$ y $Adj A = \begin{bmatrix} -11 & -7 & 17 \\ -6 & 0 & -6 \\ 7 & -7 & -7 \end{bmatrix}$

En consecuencia:

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -11 & -7 & 17 \\ -6 & 0 & -6 \\ 7 & -7 & -7 \end{bmatrix}}{-42}$$

o también:

$-\frac{11}{42} \quad -\frac{7}{42}$ $A^{-1} = -\frac{1}{42} \begin{bmatrix} -11 & -7 & 17 \\ -6 & 0 & -6 \\ 7 & -7 & -7 \end{bmatrix}$

Ejemplo 5

Si $\mathbf{Q}$ es la inversa de la matriz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

se desea conocer la suma de los elementos q_{12} y q_{41} .

Sea S la suma buscada: $S = q_{12} + q_{41}$

Por el corolario, se tiene:

$$S = \frac{a_{21}}{|\mathbf{P}|} + \frac{a_{14}}{|\mathbf{P}|}$$

Como $|\mathbf{P}| = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$, la matriz $\mathbf{P}$ es regular y existe la matriz $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$.

Calculando los adjuntos a_{21} y a_{14} :

$$a_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 120 \quad a_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Reemplazando:

$$S = \frac{120}{120} + \frac{0}{120}$$

$$\therefore S = 1$$

Ejercicio 6

¿Cómo comprobar que una matriz es regular sin realizar el proceso de inversión?

La respuesta es simple, bastará calcular su determinante. Si el determinante de la matriz es diferente de cero, la matriz será regular o inversible. ■

Ejercicios y problemas propuestos

Capítulo 10

1. Dada la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$, determinar los menores de la segunda columna y sus respectivos adjuntos.
2. Explique qué relación existe entre las matrices adjunta y de cofactores de una misma matriz.
3. Escribir las matrices **Adj A** y **Cof A** de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Determinar las adjuntas de las siguientes matrices. Se debe verificar cada cálculo comprobando: el producto de cada matriz por su adjunta es una matriz escalar, donde el valor de cada entrada es igual al determinante de la matriz.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 6 \\ -5 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

5. Determinar las adjuntas de las siguientes matrices (recuerde efectuar siempre una de las verificaciones propuestas):

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} & \text{b) } \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & -2 \\ 3 & 11 & -1 \end{bmatrix} \\ \text{c) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & -2 \\ 0 & 21 & 1 \end{bmatrix} & \text{d) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -6 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$e) \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$g) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 6 \\ 7 & 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 14 \\ 25 \\ 31 \end{bmatrix}$$

- i) Hallar la matriz $X'C$, si C es la matriz adjunta de la matriz A , y se cumple $AX = B$.
- ii) Calcular además, la suma de los elementos de la matriz ACB .

7. Haciendo uso, entre otras, de las siguientes propiedades de la matriz adjunta y del determinante de un producto de matrices cuadradas A y B :

$$(AdjA)A = A(AdjA) = |A|I_n$$

$$|AB| = |A||B|,$$

Demostrar: $|AdjA| = |A|^{n-1}$, donde n es el orden de la matriz A .

Luego, si:

$$AdjA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

calcular $|A|$ y $(AdjA)^{-1}$, sabiendo que $|A| > 0$.

8. Invertir las siguientes matrices, haciendo uso de la adjunta:

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 6 \\ -5 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

9. Para cada matriz del ejercicio anterior, determine haciendo uso del corolario correspondiente las entradas $(1,3)$, $(2,3)$ y $(3,3)$ de la matriz inversa, y compruebe los resultados con los cálculos anteriores.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES ($N \times N$)

11.1 Introducción

En este capítulo se presentan la terminología y los conceptos básicos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Veremos cómo se escriben los sistemas matricialmente, luego se presentan los métodos algebraicos y matriciales para resolver sistemas de n ecuaciones con n incógnitas. En el capítulo siguiente se presentarán los métodos matriciales para resolver sistemas de m ecuaciones con n incógnitas.

11.2 Ecuación lineal

11.2.1 Definición

En el sistema bidimensional, una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, es una ecuación lineal, es decir es una línea recta. En general, se dice que una ecuación es lineal en n variables, cuando las variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, tienen como exponentes a la unidad, y la ecuación es de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_n$ y b , son constantes reales.

Ejemplo 1

Las siguientes son ecuaciones lineales:

$$x + 2y = 5$$

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 11$$

Debe tenerse en cuenta que los exponentes de cada variable son iguales a la unidad, pero que el grado de cada término también es igual a la unidad, no pudiendo existir por lo tanto, productos de variables, ni exponentes diferentes de la unidad, ni radicales.

En consecuencia, no son ecuaciones lineales las siguientes:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad \sqrt{x} + x = 12$$

Tampoco son ecuaciones lineales las ecuaciones que involucren funciones trascendentes, como:

$$y - 2\cos x = 0 \qquad \log_2(x^2 + x + 1) = 8$$

11.2.2 Ecuación lineal con una incógnita

La ecuación lineal con una incógnita más simple es:

$$ax = b$$

donde a , b y x son números reales, siendo x el único elemento desconocido.

Ejemplo 2

Son ecuaciones lineales con una incógnita las siguientes:

$$2x = 5$$

$$0x = 2$$

$$0x = 0$$

La ecuación: $2x = 5$ tiene como única solución: $x = \frac{5}{2}$.

La ecuación: $0x = 2$ no tiene solución.

(No existe ningún número que multiplicado por cero es igual a 2).

La ecuación: $0x = 0$ admite para x cualquier valor.

(Cualquier número por cero, es cero).

Estas tres ecuaciones son ejemplos de las situaciones que se pueden presentar en la ecuación lineal con una incógnita:

$$ax = b$$

Los tres casos posibles son:

$a \neq 0$ solución única;

$a = 0$ y $b \neq 0$ no hay solución;

$a = 0$ y $b = 0$ infinitas soluciones.

11.2.3 Ecuación lineal con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas es de la forma:

$$ax + by = c$$

donde a , b y c son números reales conocidos, las incógnitas son: x e y .

Es frecuente que un alumno al tener una ecuación de esta naturaleza piense que no tiene solución, sin embargo veremos que esta ecuación sí puede ser resuelta. En primer lugar debemos observar que la solución son dos números x e y , es decir la solución es un par ordenado de números que sustituidos en lugar de las incógnitas, verifican la igualdad.

Se entiende por ejemplo, que el par ordenado $(-1; 3)$ es solución de una ecuación, si al reemplazar $x = -1$ e $y = 3$, el primer miembro es igual al segundo miembro de la ecuación.

Ejemplo 3

Una ecuación lineal con dos incógnitas es:

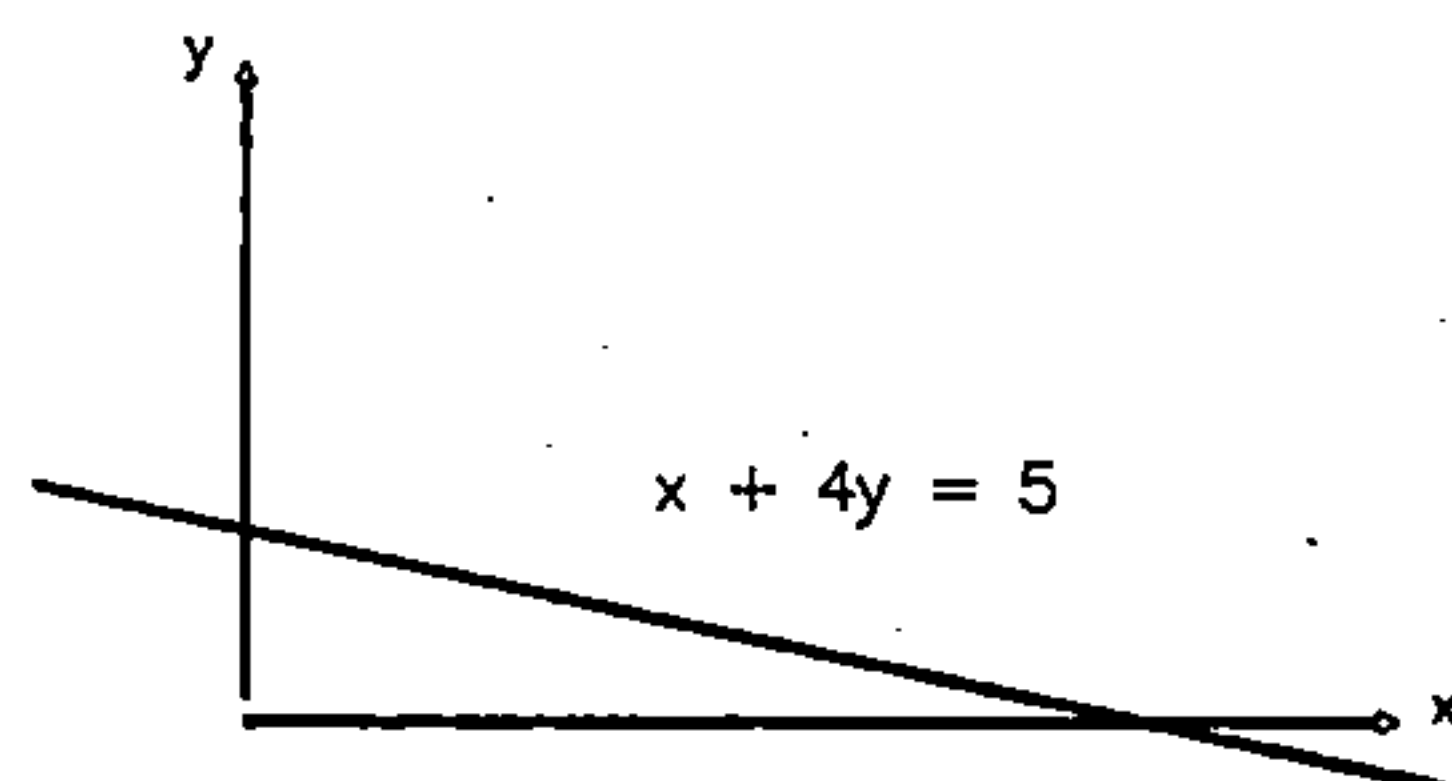
$$x + 4y = 5$$

Se observa que los pares ordenados $(1; 1)$, $(5; 0)$ y $(-15; 5)$ son soluciones, mientras que $(0; 0)$, $(-1; 2)$ y $(-1; 0)$ no lo son.

En general, la ecuación lineal con dos incógnitas: $x + 4y = 5$ admite muchas soluciones, es decir tiene un conjunto solución. Este conjunto solución es el conjunto de todos los pares ordenados que satisfacen la ecuación dada.

Es sabido que en $\mathbb{R}^2$ la ecuación representa una línea recta y muchos pares ordenados la verifican. Sin embargo, no es posible escribirlos todos, es decir aparentemente no es posible expresar el conjunto solución por comprensión.

La única manera de dar la solución es mediante una gráfica, que intente representar todos los pares solución. Esto en parte se consigue con la figura, si se admite que la solución son todos los pares que están en la recta.



Sin embargo, debemos buscar una solución algebraica a la ecuación propuesta:
 $x + 4y = 5$.

Esta solución algebraica por comprensión, se llama solución general, se escribe:

$$(5 - 4t; t)$$

es decir: $x = 5 - 4t$ $y = t$, donde $t \in \mathbb{R}$.

Esta expresión indica que la solución depende de un parámetro t , el cual toma todos los números reales ($\mathbb{R}$). Esta es la manera de escribir por comprensión todos los pares que satisfacen la ecuación, al satisfacer la ecuación dada:

$$(5 - 4t) + 4(t) = 5 \Rightarrow 5 = 5$$

Para encontrar soluciones particulares, bastará asignar al parámetro t valores reales cualesquiera:

t	$(x; y)$
0	(5; 0)
1	(1; 1)
2	(-3; 2)
3	(-7; 3)
.	.
.	.

Otras ecuaciones del mismo tipo son:

$$0x + 0y = 2$$

$$0x + 0y = 0$$

Se observa que la primera no admite ninguna solución, mientras que la segunda admite como solución cualquier par de números reales (todos los puntos del plano $\mathbb{R}^2$). ■

Para concluir esta sección, podemos afirmar que en general la ecuación:

$$ax + by = c$$

presenta los siguientes casos:

- Si $a \neq 0$ ó $b \neq 0$, la ecuación admite un número infinito de soluciones, cada una de las cuales es un par ordenado. La solución general depende de un parámetro.
- Si $a = b = 0$ y $c \neq 0$, la ecuación no admite ninguna solución.
- Si $a = b = c = 0$, la ecuación admite como solución cualquier par ordenado de números. Es decir, todos los puntos del plano bidimensional son solución de la ecuación.

11.2.4 Ecuación lineal con n incógnitas

El análisis anterior se puede generalizar a ecuaciones con más variables:

$$ax + by + cz = d$$

$$ax + by + cz + dw = e$$

Pero conviene introducir una notación que facilite el análisis. En general, una ecuación con n incógnitas se denota:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

donde los a_i , $1 \leq i \leq n$ y b son números conocidos, siendo las x_i , $1 \leq i \leq n$, las incógnitas o variables.

La solución a esta ecuación es una n-upla ordenada de números reales, que se escribe:

$$(x_1; x_2; x_3; \dots; x_n)$$

Observación: Si consideramos los vectores $\vec{a}$ y $\vec{x}$, de coeficientes y de incógnitas, respectivamente, la ecuación es el producto escalar: $\vec{a} \cdot \vec{x} = b$

Ejemplo 4

Una ecuación lineal con tres incógnitas es:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7$$

Esta ecuación admite como conjunto solución infinidad de ternas ordenadas¹: (7; 0; 0), (0; 2; -1), (2; 1; -1), e infinitas más. Debemos observar que la ecuación dada es la ecuación de un plano del espacio tridimensional, y que son infinitos los puntos que están contenidos en un plano. Debe observarse que si bien son infinitas las soluciones, ellas no son todos los puntos del espacio $\mathbb{R}^3$. Así por ejemplo, no son soluciones las ternas: (0; 0; 0), (1; 1; 1) y (2; 0; -10), entre otras.

Debemos pues admitir que la solución general debe ser por comprensión, pero en este caso, la solución tiene dos parámetros t y s :

$$(7 - 2t + 3s; t; s),$$

es decir; $x = 7 - 2t + 3s$ $y = t$ $z = s$, donde t y s son elementos de $\mathbb{R}$.

Para encontrar la solución general mostrada, se ha asignado parámetros a dos de sus incógnitas, despejando la tercera incógnita en términos de los parámetros. Pero la asignación es arbitraria; en consecuencia, podemos asignar digamos:

$$x_1 = m \quad x_2 = n \quad \text{y despejamos } x_3 = \frac{m + 2n - 7}{2}$$

y la solución general de la ecuación $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7$, puede ser también:

$$(m; n; \frac{m + 2n - 7}{2})$$

Lo importante es observar que la ecuación admite muchas soluciones que dependen de dos parámetros.

Si se quisieran soluciones particulares, se tendría que asignar valores arbitrarios a los parámetros. ■

¹ Se dice par ordenado y terna ordenada. A partir de cuatro componentes se le llama 4-upla ordenada.

Por otro lado, la ecuación

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2$$

no admite ninguna solución, mientras que la ecuación:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

se verifica para cualquier terna ordenada.

En general para la ecuación:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

se tienen los siguientes casos:

- No hay soluciones si los coeficientes de las variables son todos ceros y el coeficiente del segundo miembro no es cero:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0 \quad \text{y} \quad b \neq 0$$

- Cualquier n –upla es solución si todos los coeficientes son ceros:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = b = 0$$

- Si al menos uno de los coeficientes a_i no es cero, la ecuación admite infinitud de soluciones, dependiendo en general de $n - 1$ parámetros.

Ejemplo 5

Resolver la ecuación

$$0x + 0y + 0z + 0w = 100$$

La ecuación no admite ninguna 4–upla ordenada como solución. ■

Ejemplo 6

Resolver la ecuación

$$2x + 0y + 0z + 0w = 100$$

Se observa que uno de los coeficientes a_i es diferente de cero, en consecuencia la ecuación tiene solución.

Para resolver la ecuación debemos asignar $4 - 1 = 3$ parámetros:

$$y = t_1 \quad z = t_2 \quad w = t_3$$

reemplazando y despejando x , se obtiene: $x = 50$.

Por lo tanto, la solución general es:

$$(50; t_1; t_2; t_3)$$

Ejemplo 7

Resolver la ecuación

$$2x + 4y + 6z - 3w = 24$$

Para resolver la ecuación propuesta, se deben asignar tres parámetros, eligiendo para las tres primeras variables: $x = v_1$ $y = v_2$ $z = v_3$. Reemplazando:

$$2v_1 + 4v_2 + 6v_3 - 3w = 24$$

despejando: $w = \frac{2v_1 + 4v_2 + 6v_3 - 24}{3}$

En consecuencia, una solución general a la ecuación

$$2x + 4y + 6z - 3w = 24, \text{ es:}$$

$$\left[v_1; v_2; v_3; \frac{2v_1 + 4v_2 + 6v_3 - 24}{3} \right], \text{ donde } v_i \in \mathbb{R}$$

Matricialmente un sistema se puede escribir:

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

Dónde

A es la matriz de los coeficientes de las incógnitas.

X es la matriz de las incógnitas.

B es la matriz de los términos independientes².

La matriz **A** es una matriz de orden $m \times n$; las matrices **X** y **B**, son matrices columna de orden $n \times 1$.

La matriz de orden $m \times (n + 1)$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} & b_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

es la matriz aumentada del sistema. Recibe también el nombre de matriz ampliada u orlada.

Debe observarse que m puede ser mayor, igual o menor que n . Si $m = n$, el sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas, y se denomina cuadrado. Si $m \neq n$, el sistema es rectangular.

²

Los términos independientes en la teoría de ecuaciones, está constituido por las constantes de las ecuaciones consideradas en el segundo miembro.

11.3.2 Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales

Dado un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, el conjunto solución S es:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \dots \cap S_m$$

donde cada S_i , es el conjunto solución de las ecuaciones del sistema.

En general, en un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, se pueden presentar tres casos:

1. Que el sistema no tenga solución. ✓
2. Que el sistema tenga solución única. ✓
3. Que el sistema tenga infinitas soluciones. ✓

Por ello, los sistemas pueden clasificarse como:

INCONSISTENTE, cuando el sistema no tiene solución. ✓

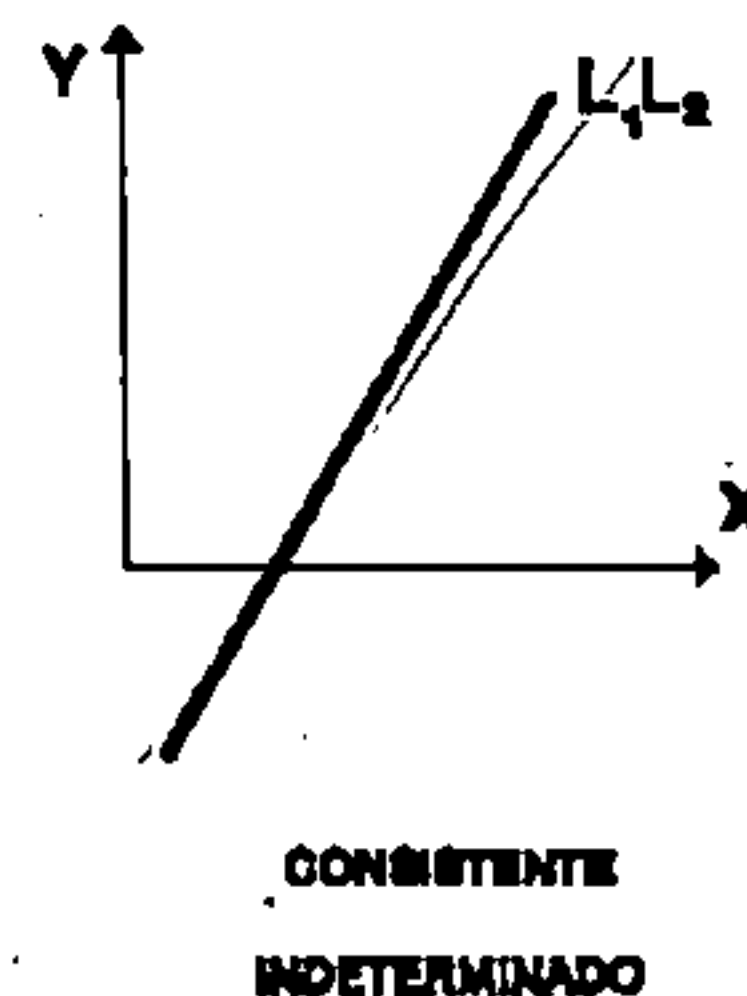
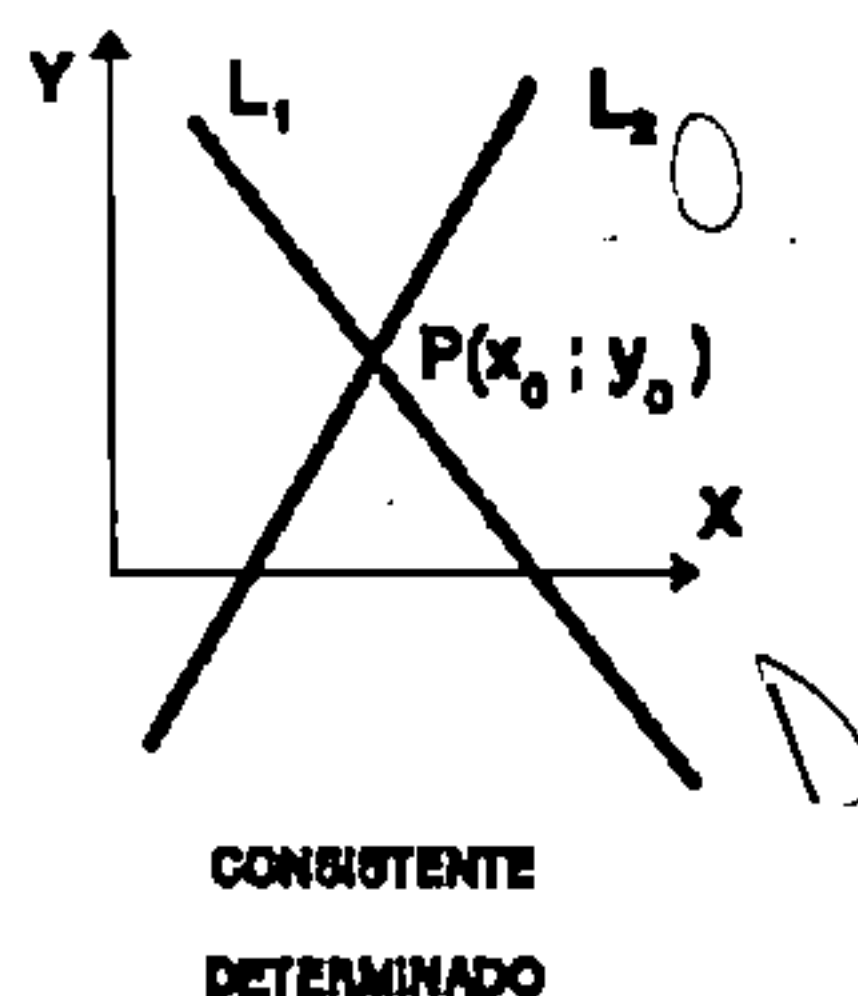
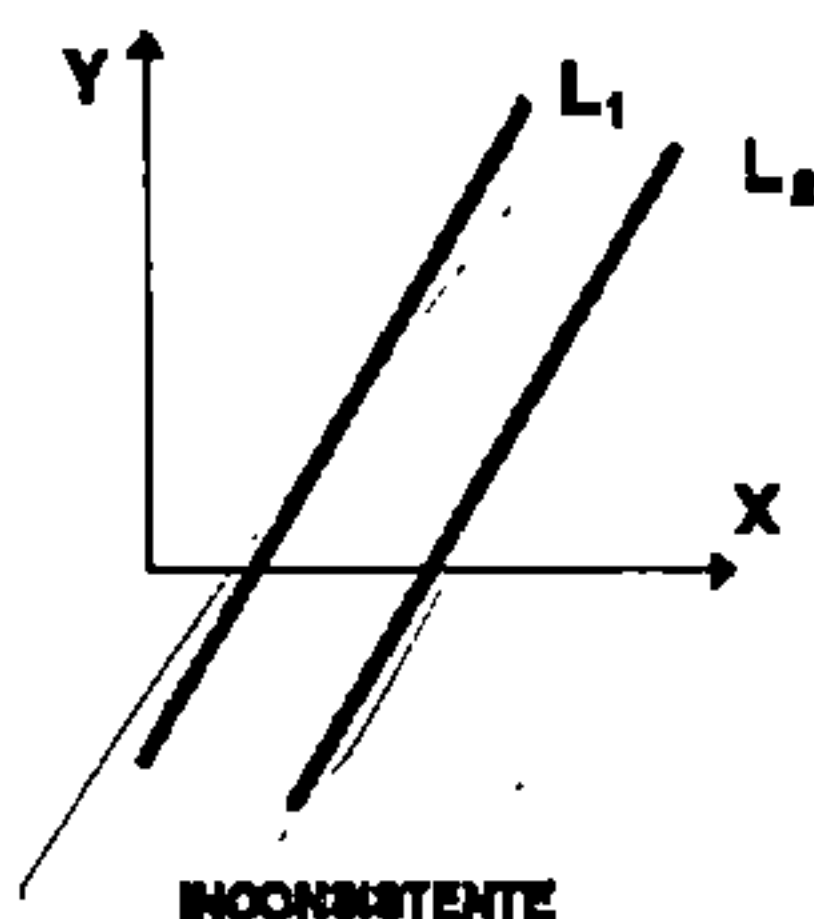
CONSISTENTE DETERMINADO, cuando el sistema tiene solución única. ✓

CONSISTENTE INDETERMINADO, cuando el sistema tiene infinitas soluciones. ✓

Podemos visualizar los tres casos para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} L_1: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ L_2: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

donde S_1 y S_2 son los conjuntos solución de cada ecuación.



El sistema es inconsistente cuando las rectas L_1 y L_2 son paralelas, y no hay intersección:

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset$$

El sistema es consistente determinado, cuando las rectas son secantes es decir, cuando se intersectan en un punto; en tal caso el sistema tiene solución única:

$$S_1 \cap S_2 = \{(x_0; y_0)\}$$

El sistema es consistente indeterminado, cuando las rectas son coincidentes; en tal caso hay infinitos pares ordenados que las verifican, y el sistema tiene infinitas soluciones:

$$S_1 \cap S_2 = \{(x_0; y_0), (x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots\}$$

11.4 Sistemas consistentes e inconsistentes

Si el conjunto solución es vacío, el sistema se denomina inconsistente o se dice que las ecuaciones que lo conforman son incompatibles, y el sistema no tiene solución. Debe observarse que un sistema es inconsistente si el conjunto solución de una de las ecuaciones es el vacío:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap \emptyset \cap S_4 \Rightarrow S = \emptyset$$

Ejemplo 8

El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 2 \\ 0x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

es inconsistente, o las ecuaciones son incompatibles, por ser vacío el conjunto solución de la tercera ecuación ($S_3 = \emptyset$)



Si el conjunto solución no es vacío, el sistema se denomina consistente, o se dice que las ecuaciones son compatibles. Se entiende entonces que el sistema admite al menos una solución.

Un sistema consistente es determinado si el conjunto solución tiene un solo elemento, y se llamará indeterminado si el conjunto solución tiene más de un elemento.

Ejemplo 9

El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= -1 \\ 3x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}$$

es consistente determinado. Su conjunto solución tiene un solo elemento:

$$S = \{(1; -1)\}.$$

Ejemplo 10

El sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

es consistente indeterminado, su conjunto solución tiene más de un elemento:

$$S = \{(0; 0; 0), (1; -1; 2), (2; -2; 4), (100; -100; 200), \dots\}$$

En realidad el sistema admite infinitas soluciones de la forma:

$$(t; -t; 2t),$$

es decir: $x_1 = t$, $x_2 = -t$, $x_3 = 2t$, donde $t \in \mathbb{R}$.

11.5 Sistemas homogéneos y no homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ se llama no homogéneo si los términos independientes no son todos nulos, es decir algún b_i puede ser cero, pero no todos son ceros. Esto equivale a decir que la matriz $B \neq [0]$.

Ejemplo 11

Son sistemas no homogéneos los siguientes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

debemos observar que las matrices B (términos independientes) no son nulas:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

■

Si todos los términos independientes son nulos ($B \neq [0]$), el sistema se denomina homogéneo, y presenta una característica muy importante, como veremos luego del siguiente ejemplo.

Ejemplo 12

Son homogéneos los sistemas:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

donde las matrices de los términos independientes $B = [0]$.

no es sol

■

Es evidente que no hay sistema homogéneo que sea inconsistente: al menos admite una solución obvia:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$$

Esta solución recibe el nombre de SOLUCIÓN TRIVIAL del sistema.

Pero un sistema homogéneo puede admitir una solución diferente a la trivial, como por ejemplo:

$$(r_1; r_2; r_3; \dots; r_n).$$

En este caso, como es fácil de comprobar, admitirá también la solución:

$$(kr_1; kr_2; kr_3; \dots; kr_n).$$

$$ax + b = 0$$

Es decir, una solución que es un múltiplo de $(r_1; r_2; r_3; \dots; r_n)$.

En consecuencia, un sistema homogéneo es siempre consistente y tiene solamente dos posibilidades de solución:

CONSISTENTE DETERMINADO
CONSISTENTE INDETERMINADO

Cuando admite sólo la solución trivial.
Admite un número infinito de soluciones, todas ellas de la forma:
 $(kr_1; kr_2; kr_3; \dots; kr_n)$, donde $k \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 13

Resolver el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Como el sistema es homogéneo es consistente y admite la solución trivial $(0; 0; 0; 0)$,

¿Nos preguntamos si el sistema admite una solución diferente de la trivial?

Para ello vemos que siempre $x_4 = 0$, además, podemos asumir que $x_3 = 1$, con lo que $x_1 = -2$ y $x_2 = -4$. Hemos encontrado una solución diferente de la trivial:

$$(-2; -4; 1; 0).$$

Según lo indicado líneas arriba, el sistema admite infinitas soluciones, de la forma $(-2t; -4t; t; 0)$.

Por lo tanto, el sistema es consistente indeterminado y la solución general del sistema homogéneo es:

$$(-2t; -4t; t; 0), \text{ donde } t \in \mathbb{R},$$

y son también soluciones particulares

$(-1; -2, 0,5; 0)$, $(0; 0; 0, 0)$, $(-10; -20; 5; 0)$ y muchas más, con solo asignar a t valores reales³.

3

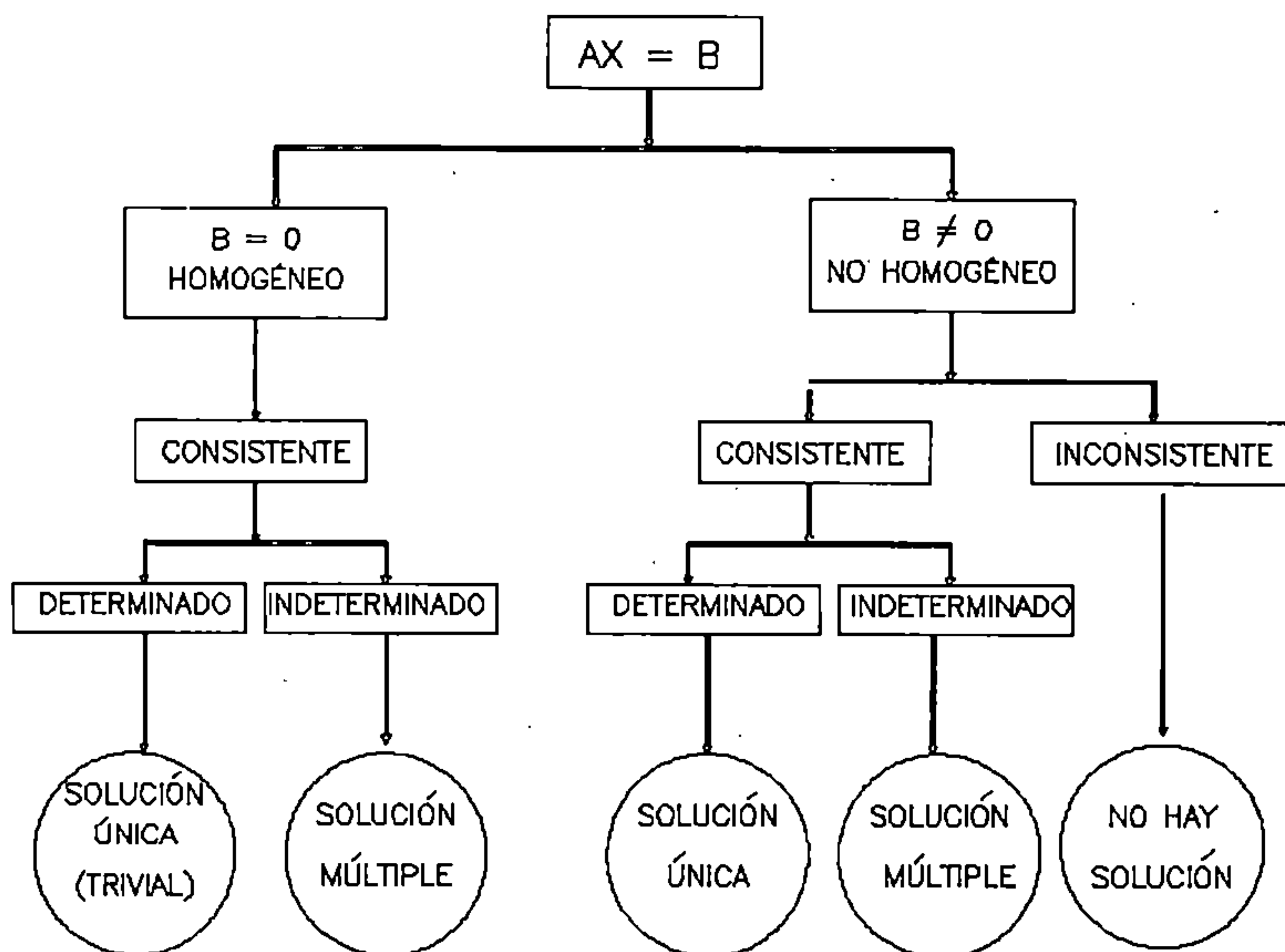
Decimos valores reales porque buscamos soluciones reales, pero si se diera al parámetro t valores complejos, se obtendrían valores complejos.

Si la única solución del sistema es la solución trivial, el sistema es consistente determinado.

Hasta el momento es claro que en un sistema de ecuaciones pueden ocurrir una de tres situaciones, que el sistema admita solución única, que tenga infinitas soluciones o que no admita solución alguna, y que al clasificar un sistema como homogéneo sabemos que el sistema es siempre consistente.

11.6 Resumen de los sistemas de ecuaciones

Se presenta a continuación un gráfico que resume todos los casos posibles para un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas.



La parte final de este capítulo está destinada a presentar la solución de sistemas de n ecuaciones con n incógnitas y en el siguiente capítulo se analizarán los sistemas de m ecuaciones con n incógnitas.

11.7 Solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas

En esta sección se presentan los métodos algebraicos y matriciales para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

11.8 Métodos algebraicos

Son algebraicos los métodos que permiten determinar una por una las incógnitas de un sistema. Se presenta en cada caso, una breve descripción de los métodos de eliminación algebraica, seguida de un ejercicio de aplicación. Luego se presentará una demostración de la regla de Cramer, aunque su aplicación está generalmente limitada, como los otros métodos algebraicos a sistemas de no más de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

11.8.1 Eliminación por igualación

Dado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se despeja una de las incógnitas de ambas ecuaciones y se igualan sus segundos miembros.

Ejemplo 14

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 7x_1 - 4x_2 &= 5 \\ 9x_1 + 8x_2 &= 13 \end{aligned}$$

Despejando x_2 de ambas ecuaciones, se tiene:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{7x_1 - 5}{4} \\ x_2 &= \frac{13 - 9x_1}{8} \end{aligned} \tag{1}$$

Igualando los segundos miembros, se tiene:

$$\frac{7x_1 - 5}{4} = \frac{13 - 9x_1}{8} \quad \text{De donde: } x_1 = 1.$$

Reemplazando en una de las ecuaciones (1), se obtiene: $x_2 = 0,5$

La solución del sistema es:

$$x_1 = 1 \wedge x_2 = 0,5$$

11.8.2 Eliminación por sustitución

Se despeja de una de las ecuaciones una de las incógnitas, reemplazando dicha expresión en las otras, se logra así un sistema que no contiene la incógnita que se despejó inicialmente, logrando un sistema con una incógnita menos.

Ejemplo 15

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

De la primera ecuación despejamos x_1 :

$$x_1 = 3 - x_2 - x_3$$

Reemplazando en las otras dos, se obtiene:

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

De la primera ecuación, despejamos x_3 : $x_3 = 2x_2$

Reemplazando en la segunda de las ecuaciones, se obtiene:

$$10x_2 = 10$$

Como $x_2 = 1$, al reemplazar se obtiene: $x_3 = 2$ y $x_1 = 0$.

La solución del sistema es:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2.$$

11.8.3 Eliminación por reducción

Se procede multiplicando las ecuaciones por factores diferentes de cero, a igualar los coeficientes de una de las incógnitas, para luego mediante una suma o una resta eliminar convenientemente una de las incógnitas. Es el procedimiento que usualmente se utiliza para resolver un sistema de ecuaciones.

Ejemplo 16

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 3x + y &= 4 \end{aligned}$$

Se multiplica la segunda ecuación por -2 , de manera que sean iguales y de signo contrario los coeficientes de la segunda incógnita:

$$x + 2y = 3$$

$$-6x - 2y = -8$$

Al sumar, se obtiene $-5x = -5$, eliminando la incógnita y . Como se verá posteriormente, este procedimiento se sistematiza mediante el llamado procedimiento de Gauss Jordan.

11.8.4 Regla de Cramer

Es frecuente encontrar en los textos secundarios una demostración de la regla de Cramer, a partir de dos o tres sistemas de ecuaciones lineales, tal como se mostró en el capítulo 9 de determinantes. A continuación nos proponemos dar una demostración general de la regla:

"El valor de cada incógnita x_i del sistema $AX = B$ es igual a

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

donde el denominador $|A|$ es el determinante de la matriz A , y el numerador $|A_i|$, es el determinante de la matriz A en la cual la i -ésima columna ha sido reemplazada por la columna B ".

Sea el sistema:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Donde:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$x = \frac{D_1}{D}$

Si multiplicamos ambos miembros por la incógnita x_1 , se tiene:

$$x_1 |A| = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

En el segundo miembro, el factor x_1 multiplica a todos los elementos de la primera columna.

Aplicamos ahora la siguiente propiedad de los determinantes:

El determinante del segundo miembro no se altera si se agrega a la primera columna, la segunda multiplicada por x_2 , la tercera columna multiplicada por x_3 , $\cdot \cdot \cdot$, la n -ésima por x_n :

$$x_1 |A| = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Si se observa, los elementos de la primera columna son respectivamente: b_1 , b_2 , b_3 , $\cdots$, b_n . Efectuando los reemplazos indicados, se obtiene:

$$x_1 |A| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Si llamamos $|A_1|$ al segundo miembro, expresión que indica que la primera columna de la matriz A se ha reemplazado por los elementos de la matriz B , se obtiene:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$$

Como el procedimiento puede aplicarse a otras columnas, se tendrá:

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \quad \dots$$

Queda así demostrada, en forma general, la Regla de Cramer.

Ejemplo 17

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 32 \end{aligned}$$

Como el sistema es de tres ecuaciones con tres incógnitas, es aplicable la regla de Cramer:

Aplicando la Regla de Cramer, se tiene:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & -3 & 5 \\ 32 & 4 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-23}{-23} = 1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 11 & 5 \\ 3 & 32 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-46}{-23} = 2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 11 \\ 3 & 4 & 32 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-69}{-23} = 3$$

La solución del sistema es: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$. ■

Observaciones

1. Los métodos algebraicos descritos permiten evaluar una a una las incógnitas, siendo prácticos para resolver sistemas que tengan tres ecuaciones con tres incógnitas. Para sistemas mayores se prefieren los métodos matriciales.
2. Si $|\mathbf{A}| = 0$, no se puede aplicar la regla de Cramer. Tales sistemas deben analizarse mediante los procedimientos que se describen en el capítulo XII.

11.9 Métodos matriciales

Los métodos matriciales permiten determinar todas las incógnitas a la vez, lo que constituye una ventaja sobre los procedimientos algebraicos.

11.9.1 Sistemas equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si y sólo si cada solución de primer sistema es solución del segundo sistema y cada solución del segundo, es solución del primer sistema.

Se tienen tres operaciones algebraicas que no modifican las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales:

- I Intercambiar dos ecuaciones del sistema.
- M Multiplicar todos los coeficientes de una ecuación por un número real diferente de cero.
- A Agregar a una ecuación del sistema otra multiplicada por un número real.

Es evidente que son estas tres operaciones las que, de una u otra manera, se realizan al resolver algebraicamente un sistema, especialmente el llamado eliminación por reducción.

Si un sistema de ecuaciones $AX = B$, se escribe en la notación matricial, como la matriz ampliada $[A|B]$, y se aplican las operaciones a las filas, estas operaciones se denominan operaciones elementales de filas:

- I Intercambiar dos filas de la matriz ampliada.
- M Multiplicar todos los coeficientes de una fila por un número real diferente de cero.
- A Agregar a una fila otra multiplicada por un número real,

y constituyen el fundamento de la triangularización de Gauss y de la diagonalización de Jordan. Ambos procedimientos transforman sucesivamente el sistema de ecuaciones inicial en otros sistemas equivalentes, hasta llegar a un sistema que, por simple inspección, proporcione el valor de las incógnitas. Ambos procedimientos fueron ampliamente presentados en el capítulo 6, sin embargo daremos a continuación una breve descripción de ellos seguido por un ejemplo de aplicación.

11.9.2 Triangulación de Gauss⁴

En el capítulo 6 se discutió ampliamente las llamadas transformaciones gaussianas, que designamos como: I, M y A. En este apartado, nos limitaremos a presentar brevemente la teoría, a modo de sinopsis.

En general un sistema de n ecuaciones con n incógnitas se expresa simbólicamente como:

$$AX = B$$

Para su solución matricial se presenta el sistema como una como la matriz ampliada:

$$[A \ B]$$

4

Se pronuncia "Guss"

Mediante transformaciones elementales de filas, la matriz A de la matriz ampliada se transforma en una matriz triangular, preferentemente con elementos iguales a la unidad en su diagonal principal, es decir, la matriz ampliada toma la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} & s_1 \\ 0 & 1 & t_{23} & \dots & t_{2n} & s_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & t_{3n} & s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & s_n \end{bmatrix}$$

Si las incógnitas del sistema son $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, el sistema algebraico equivalente es:

$$\begin{cases} x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 + \dots + t_{1n}x_n = s_1 \\ x_2 + t_{23}x_3 + \dots + t_{2n}x_n = s_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + t_{n-1}x_n = s_{n-1} \\ x_n = s_n \end{cases}$$

Este sistema se resuelve directamente, empezando por la incógnita $x_n = s_n$, valor que se sustituye en la ecuación anterior, y así sucesivamente. Este método se llama **Triangularización de Gauss**.

Ejemplo 18

Resolver el siguiente sistema mediante la triangulación de Gauss.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

Construimos la matriz ampliada del sistema, y transformamos la primera columna en la matriz columna 1 0 0 0:

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & -5 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -9 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -25 \end{array} \right]$$

Ahora debemos tener en la posición (2 2) de la matriz **A**, un elemento pivotal igual a la unidad, positiva o negativa, con el objeto de no tener que trabajar con fracciones:

$$\begin{array}{l} . \\ -1 \\ \rightarrow \\ . \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -9 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -25 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -25 \end{array} \right]$$

En esta etapa de la solución, pueden hacerse dos cosas: simplificar los elementos de las filas 3^{ra} y 4^{ta}, o hacer actuar la segunda fila sobre las filas 3^{ra} y 4^{ta}. Como los números no son grandes, optamos por la segunda alternativa:

$$\begin{array}{l} . \\ \rightarrow \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -25 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 0 \end{array} \right]$$

Podemos simplificar las dos últimas filas, y procedemos luego a usar como pivote el elemento (4 3):

$$\begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ -4 \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Invirtiendo las dos últimas filas, se logró el objetivo, la matriz **A** es triangular:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Como la matriz aumentada equivale al sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ \quad x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 5 \\ \quad \quad x_3 + x_4 = 0 \\ \quad \quad \quad x_4 = 3 \end{cases}$$

Resolviendo algebraicamente el sistema se tiene finalmente:

$$x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = -3 \text{ y } x_4 = 3$$



El proceso de solución llamado "triangulación de Gauss" que hemos descrito, es simple, pero el de diagonalización es más rápido. Se llega a la solución de una manera directa, sin tener que resolver algebraicamente el sistema final que resulta en el método de triangulación. Sin embargo, se sugiere al alumno que practique el método de triangulación, aunque al final los sistemas los resolverá por el método de diagonalización que ahora describimos.

11.9.3 Diagonalización de Jordan

El llamado método de "diagonalización de Jordan" o simplemente "método de Gauss-Jordan", consiste en transformar la matriz **A** de la matriz ampliada **[A B]**, en una matriz diagonal. Si la matriz diagonal es la matriz identidad **I**, la matriz columna **B**, será la solución del sistema. Se procede a resolver un ejemplo de aplicación, haciendo notar que en el

capítulo 6 del presente texto se hizo una amplia explicación del método.

Ejemplo 19

Resolver el siguiente sistema mediante la diagonalización de Jordan:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

El sistema es el mismo resuelto en el ejercicio precedente como aplicación del método de Gauss. La primera parte del procedimiento es el mismo:

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & -5 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -9 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -25 \end{array} \right]$$

Como en el ejercicio anterior, se busca que el elemento a_{22} sea igual a la unidad:

$$\begin{array}{l} . \\ -1 \\ \rightarrow \\ . \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -9 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -25 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -25 \end{array} \right]$$

Para ir transformando la matriz a la matriz diagonal, se procede a utilizar el elemento $a_{22} = 1$ como pivote:

$$\begin{array}{l} -2 \\ \rightarrow \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \textcircled{1} & 4 & 5 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -25 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -5 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 0 \end{array} \right]$$

Para facilitar los cálculos simplificamos las dos últimas columnas y pivotamos con el elemento a_{33} :

$$\begin{array}{l} 5 \\ -4 \\ -4 \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -5 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Procedemos luego a utilizar el elemento $a_{34} = 1$ como pivote:

$$\begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ \rightarrow \\ -1 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right]$$

El sistema está resuelto, con menos pasos que en el método de triangulación.

11.9.4 Verificación de la solución de un sistema

Al resolver un sistema de ecuaciones por los métodos de Gauss o Gauss-Jordan, es posible ir controlando la solución de manera de evitar la propagación de errores.

El control se efectúa mediante una columna adicional que llamaremos columna de control. El principio es similar al utilizado al efectuar la verificación del producto de matrices (esquema vertical). Los elementos de la columna de control son la suma de los elementos de la matriz ampliada. El ejemplo que sigue muestra el procedimiento: si la matriz ampliada del sistema $AX = B$, es $[A \ B]$, la matriz ampliada con columna de control C es: $[A \ B \ C]$. Se efectúan las transformaciones elementales de filas sobre la matriz $[A \ B \ C]$, y debe cumplirse, para cada fila i :

$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + \dots + a_{in} + b_i = c_i$$

Ejemplo 20

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z - 11 &= 0 \\ x - y - z - 2 &= 0 \\ 5x - 2y + 3z + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Reescribiendo el sistema, a fin de tener los términos independientes en el segundo miembro:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 11 \\ x - y - z &= 2 \\ 5x - 2y + 3z &= -8 \end{aligned}$$

La matriz ampliada, con la columna de control (entradas en negrita), es:

$$\begin{aligned} &-2 \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 11 & \mathbf{15} \\ 1 & -1 & -1 & 2 & \mathbf{1} \\ 5 & -2 & 3 & -8 & \mathbf{-2} \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 5 & 1 & 7 & \mathbf{13} \\ 1 & -1 & -1 & 2 & \mathbf{1} \\ 0 & 3 & 8 & -18 & \mathbf{-7} \end{array} \right] \end{aligned}$$

La verificación que debe efectuarse, es:

$$\begin{aligned} 0 + 5 + 1 + 7 &= 13 \\ 1 - 1 - 1 + 2 &= 1 \\ 0 + 3 + 8 - 18 &= -7 \end{aligned}$$

Continuando con las transformaciones de filas, se tiene:

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ 1 \\ -8 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 7 & 13 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & -18 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 7 & 13 \\ 1 & 4 & 0 & 9 & 14 \\ 0 & -37 & 0 & -74 & -111 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -5 \\ -4 \\ \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 7 & 13 \\ 1 & 4 & 0 & 9 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

De donde, sin necesidad de llegar a la matriz I, se obtiene la solución:

$$x = 1 \quad y = 2 \quad z = -3$$

Se puede verificar - como de costumbre - que ésta es la solución, reemplazando la solución hallada en el sistema original. Pero haciendo uso de la columna de control, que no implica mayor trabajo, se tiene ahora la seguridad de que es la solución, al haber comprobado la exactitud de los cálculos paso a paso.

11.9.5 Por inversión de matrices

Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales, donde A es una matriz cuadrada de orden n . Si A es regular, el sistema dado se convierte en uno equivalente con solo premultiplicar la igualdad $AX = B$, por la matriz A^{-1} , obteniendo sucesivamente:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Esta última expresión determina directamente el valor de las n incógnitas del sistema.

Ejemplo 21

Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + y - 4z &= -18 \\ -15x - 7y + 30z &= 135 \\ 22x + 10y - 43z &= -193 \end{aligned}$$

El sistema se escribe:

$$AX = B$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -15 & -7 & 30 \\ 22 & 10 & -43 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} -18 \\ 135 \\ -193 \end{bmatrix}$$

Como el sistema equivalente es: $X = A^{-1}B$, y la matriz A es regular, y su inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 15 & 2 & 0 \\ 4 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de incógnitas X , será:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 15 & 2 & 0 \\ 4 & 20 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18 \\ 135 \\ -193 \end{bmatrix}$$

Efectuando, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

El método matricial es adecuado para resolver p sistemas de ecuaciones de la forma $AX = B_i$, donde $i = 1, 2, 3, \dots, p$.

Ejemplo 22

Resolver los sistemas de ecuaciones lineales siguientes, donde el primer sistema es el mismo que el del ejercicio anterior:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & 2x + y - 4z = -18 \\ & -15x - 7y + 30z = 135 \\ & 22x + 10y - 43z = -193 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{ii)} & 2x + y - 4z = -2 \\
 & -15x - 7y + 30z = 15 \\
 & 22x + 10y - 43z = -21 \\
 \text{iii)} & 2x + y - 4z = 4 \\
 & -15x - 7y + 30z = -30 \\
 & 22x + 10y - 43z = 45
 \end{array}$$

Los sistemas equivalentes son

$$AX_1 = B_1 \quad AX_2 = B_2 \quad AX_3 = B_3$$

Sus soluciones matriciales son:

$$X_1 = A^{-1}B_1 \quad X_2 = A^{-1}B_2 \quad X_3 = A^{-1}B_3$$

Las soluciones de cada sistema se obtienen fácilmente efectuando:

$$\begin{array}{lcl}
 X_1 = & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 15 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -18 \\ 135 \\ -193 \end{bmatrix} \\
 X_2 = & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 15 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 \\ 15 \\ -21 \end{bmatrix} \\
 X_3 = & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 15 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ -30 \\ 45 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Las matrices buscadas, que representan las incógnitas de los sistemas de ecuaciones lineales, son:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Cuando se presentan sistemas de ecuaciones lineales de la forma $AX = B_i$, donde $i = 1, 2, 3, \dots, p$, es posible utilizar los procedimientos de Gauss o de Jordan presentados anteriormente, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 23

Resolver los sistemas de ecuaciones lineales propuestos en el ejercicio anterior, de manera colectiva:

$$\begin{array}{l} \text{i)} \quad \begin{array}{rcl} 2x + y - 4z & = & -18 \\ -15x - 7y + 30z & = & 135 \\ 22x + 10y - 43z & = & -193 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{ii)} \quad \begin{array}{rcl} 2x + y - 4z & = & -2 \\ -15x - 7y + 30z & = & 15 \\ 22x + 10y - 43z & = & -21 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{iii)} \quad \begin{array}{rcl} 2x + y - 4z & = & 4 \\ -15x - 7y + 30z & = & -30 \\ 22x + 10y - 43z & = & 45 \end{array} \end{array}$$

Procedemos a escribir los sistemas de ecuaciones por resolver utilizando el siguiente esquema:

$$[A|B_1|B_2|B_3]$$

Luego efectuaremos las transformaciones elementales de filas hasta convertir la matriz **A** en la matriz identidad **I**. Es decir utilizaremos el método de diagonalización de Jordan simultáneamente a todos los sistemas.

La matriz ampliada inicial, es:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -4 & -18 & -2 & 4 \\ -15 & -7 & 30 & 135 & 15 & -30 \\ 22 & 10 & -43 & -193 & -21 & 45 \end{array} \right]$$

Haciendo en ella transformaciones elementales de filas en la matriz **A**, ésta se convierte en la matriz identidad **I**, y las columnas **B₁**, **B₂**, **B₃** de la matriz ampliada, serán las matrices **X₁**, **X₂**, **X₃**, es decir, incógnitas de cada uno de los sistemas propuestos.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Si fuera imposible llevar la matriz **A** a la matriz identidad **I**, los sistemas no son determinados, correspondiendo resolverlos por los métodos que se propondrán en el capítulo siguiente, en forma individual o simultánea.

Ejercicios y problemas propuestos**Capítulo 11**

1. Analizar cada una de las ecuaciones lineales siguientes, en relación al número de soluciones que tendría cada una:
 - a) $2x = 5$
 - b) $0x = 0$
 - c) $0x = 5$
 - d) $-7x = 0$
 - e) $0x + 0y = 2$
 - f) $2x - 3y = 12$
 - g) $2x + 3y = 0$
 - h) $0x + 0y = 0$
 - i) $0x + 0y + 2z = 12$
2. Responder a las siguientes preguntas:
 - a) ¿Qué se entiende por solución de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas?
 - b) ¿Qué es solución trivial?
3. ¿Qué significa resolver una ecuación matricialmente?
4. Resolver primero algebraicamente y luego matricialmente, los siguientes sistemas:
 - a)
$$\begin{aligned} x + y &= 12 \\ 3x - 4y &= 1 \end{aligned}$$
 - b)
$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -1 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$
 - c)
$$\begin{aligned} 0,3x + 0,5y &= 1,1 \\ 0,2x - 0,6y &= -0,2 \end{aligned}$$
 - d)
$$\begin{aligned} 100x + 50y &= -50 \\ 20x - 5y &= -25 \end{aligned}$$
 - e)
$$\begin{aligned} 0,2x + 0,3y &= 0,1 \\ 0,3x - 0,1y &= 0,7 \end{aligned}$$
 - f)
$$\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ x + y &= 0,5 \end{aligned}$$
5. Resolver primero algebraicamente y luego matricialmente, los siguientes sistemas:
 - a)
$$\begin{aligned} 2x - 13y + 6z &= 35 \\ 2x - 5y - 12z &= -27 \\ 4x + y - 2z &= 1 \end{aligned}$$
 - b)
$$\begin{aligned} 5x + 6y + 14z &= 3 \\ 7x + 4y - 13z &= 28 \\ 3x + 2y + 6z &= 1 \end{aligned}$$
 - c)
$$\begin{aligned} 7x + 2y + 3z &= 1 \\ -4x + 9y + 5z &= -14 \\ 2x + 3y + 6z &= -10 \end{aligned}$$
 - d)
$$\begin{aligned} 4x + 3y + 4z &= 2,2 \\ 2x + 4y - 2z &= 0,4 \\ 4x + 3y + 4z &= 1,9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & 2x + 3y + 3z = 3 \\ & 2x + 6y + 3z = -3 \\ & 13x - 6y + 3z = 54 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & 5x + 3y + 3z = 80 \\ & 2x + 6y - 3z = 170 \\ & 8x + 3y + 2z = 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad & 3x + 2y + z = 4,3 \\ & 2x + 3y + z = 5,4 \\ & 2x + y + 3z = 7,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad & x + 2y + 4z = 0,5 \\ & 5x + y + 2z = 0,7 \\ & 3x - y + z = 0,1 \end{aligned}$$

6. Resolver y discutir la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes literales. Utilice la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (a - b)x + (a + b)y = a \\ & (a^2 - b^2)x + (a^2 + b^2)y = a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & ax + by + cz = 1 \\ & bx + cy + az = 1 \\ & cx + ay + bz = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & a^3x + a^2y + az = 1 \\ & b^3x + b^2y + bz = 1 \\ & c^3x + c^2y + cz = 1, \text{ donde } a, b \text{ y } c \text{ son diferentes dos a dos.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & x + y + z = 0 \\ & ax + by + cz = 0 \\ & bcx + acy + abz = 0, \text{ donde } a, b \text{ y } c \text{ son diferentes dos a dos.} \end{aligned}$$

7. Determinar la relación entre los coeficientes a , b , a' y b' , de manera que los sistemas:

$$\begin{aligned} f_{(x;y)} = 0 \quad & af_{(x;y)} + bg_{(x;y)} = 0 \\ g_{(x;y)} = 0 \quad & a'f_{(x;y)} + b'g_{(x;y)} = 0 \end{aligned}$$

sean equivalentes.

8. Resolver matricialmente los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2x - y - z = 4 \\ & 3x + 4y - 2z = 11 \\ & 6x + 2y + 2z = 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 3x + 2y + z = 5 \\ & 5x + 5y + 2z = 6 \\ & 5x + 3y + 4z = 16 \end{aligned}$$

- c) $x + 2y + 4z = 31$
 $6x + 3y + 6z = 60$
 $2x + 2y + z = 19$
- d) $x + y + 2z + 3u = 1$
 $3x - y - z - 2u = -4$
 $2x + 3y - z - u = -6$
 $3x + 5y + 2z - 2u = -10$
- e) $x + 2y + 3z + 4u = 5$
 $2x + y + 2z + 3u = 1$
 $3x + 2y + z + 2u = 1$
 $4x + 3y + 2z + u = -5$
- f) $x + y + z + u = 0$
 $x + 2y + 3z + 4u = 0$
 $x + 3y + 6z + 10u = 0$
 $x + 4y + 10z + 20u = 0$
- g) $x + 3y + 5z + 7u = 12$
 $3x + 5y + 7z + u = 0$
 $5x + 7y + z + 3u = 4$
 $7x + y + 3z + 5u = 16$

9. Resolver, por métodos matriciales, el sistema:

$$\begin{aligned}2x - y - z + 2u - v &= 3a \\2y - z - u + 2v - x &= 3b \\2z - u - v + 2x - y &= 3c \\2u - v - x + 2y - z &= 3d \\2v - x - y + 2z - u &= 3e\end{aligned}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (MxN)

12.1 Introducción

En este capítulo final, se revisan inicialmente las definiciones de rango y forma normal, que fueron presentadas en el capítulo 6. Luego, se busca la relación entre el rango y la matriz escalonada, relación que nos llevará directamente a encontrar la relación entre el rango y los sistemas de ecuaciones, que al final se enuncian como los teoremas de Rouché-Frobenius.

12.2 Rango de la matriz de coeficientes

Al aplicar a una matriz transformaciones elementales de filas y columnas, se obtiene la forma normal de la matriz, que es única para cada matriz como se explicó en el capítulo 6:

$$[I_r] \quad [I_r \quad 0] \quad \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango o característica como también se le llama, es un valor único para cada matriz y es importante en el análisis de los sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, como veremos más adelante, no será necesario encontrar la matriz en su forma normal, para analizar un sistema de m ecuaciones con n incógnitas.

Se ha explicado en el capítulo 6 que el rango indica también el número de filas linealmente independientes de una matriz.

Ejemplo 1

Una forma típica de una matriz escalonada de 6x6, es:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} & h_{16} \\ 0 & 0 & 1 & h_{24} & h_{25} & h_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h_{35} & h_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz tiene dos filas nulas y cuatro con elementos no nulos.

En consecuencia, tiene dos filas linealmente dependientes y cuatro linealmente independientes.

Su rango es igual a cuatro. ■

En general, la forma escalonada de una matriz muestra las filas que son linealmente dependientes, que en el proceso de transformaciones elementales de filas, se han convertido en filas con componentes nulas. En consecuencia, las filas con componentes no nulas, son linealmente independientes y el número de ellas es el rango de la matriz.

El rango de de una matriz escalonada es igual al número de filas con componentes no nulas

Este es el concepto de rango que utilizaremos para llegar a los teoremas que nos permitirán analizar un sistema de ecuaciones lineales.

12.3 Rango de la matriz ampliada

En esta sección presentaremos la teoría necesaria para poder analizar los sistemas de ecuaciones lineales, a partir del análisis del rango de la matriz de coeficientes y del rango de la matriz ampliada del sistema.

Sea $AX = B$ un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, y denotaremos:

$r[A]$, rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas
 $r[A \ B]$, rango de la matriz ampliada del sistema de ecuaciones.

Una primera consecuencia al hablar del rango de la matriz ampliada es la siguiente:

El rango de la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales es mayor o igual al rango de la matriz de coeficientes de las incógnitas

En efecto, si el rango de la matriz de coeficientes A , de un sistema de ecuaciones $AX = B$ es igual a k , $r[A] = k$, y como la matriz ampliada $[A \ B]$ tiene sólo una columna más que la matriz A , su rango será como máximo $k + 1$, pero nunca menor que k .

En consecuencia, al calcular los rangos $r[A]$ y $r[A \ B]$, solamente se pueden presentar dos casos:

$$\begin{aligned} r[A \ B] &> r[A] \\ r[A \ B] &= r[A] \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Si realizamos operaciones elementales de filas en las matrices $[A]_{4 \times 4}$ y $[A \ B]_{4 \times 5}$, se obtienen las formas escalonadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ 0 & 1 & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} & p_{14} & q_1 \\ 0 & 1 & p_{23} & p_{24} & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix}$$

Se observa que la forma escalonada de la matriz $[A]$ está incluida en la forma escalonada de la matriz ampliada $[A \ B]$. ■

En consecuencia bastará hallar la forma escalonada de la matriz aumentada $[A \ B]$ para, por inspección, determinar el rango de la matriz $[A]$ y el de la matriz aumentada correspondiente $[A \ B]$.

12.4 Análisis de los sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas

Analizaremos a continuación los dos casos posibles que pueden ocurrir entre el rango de una matriz y el rango de su matriz ampliada.

Caso: $r[A \ B] > r[A]$

Para que ocurra que el rango de una matriz ampliada $[A \ B]$ sea mayor que el rango de la matriz $[A]$, debe llegarse a una matriz ampliada de la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & \cdot & \cdot & \cdot & q_{1n} & q_1 \\ 0 & 1 & p_{23} & p_{24} & p_{25} & \cdot & \cdot & \cdot & q_{2n} & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p_{35} & \cdot & \cdot & \cdot & q_{3n} & q_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & q_{h-1 \ n} & q_{h-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & q_h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & q_{h+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De la matriz ampliada reducida por filas mostrada, se puede concluir que el rango de la matriz de coeficientes $[A]$ es igual a h . El rango de la matriz ampliada dependerá del valor que tenga la entrada q_{h+1} . Si esta entrada es diferente de cero, $q_{h+1} \neq 0$, el rango de la matriz ampliada será $h + 1$.

En este caso, el sistema tendría una ecuación de la forma:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n = q_{h+1}, \text{ donde } q_{h+1} \neq 0$$

Como esta ecuación no tiene solución, el sistema tampoco tendrá solución, y será un sistema inconsistente.

Por lo tanto se puede concluir:

Un sistema de ecuaciones es inconsistente si el rango de la matriz aumentada es mayor que el rango de la matriz de los coeficientes

Caso: $r[A \ B] = r[A]$

Para que ocurra que el rango de una matriz ampliada $[A \ B]$ sea igual al rango de la matriz $[A]$, en la matriz ampliada mostrada deberá ocurrir necesariamente: $a_{h+1} = 0$. Es decir, la primera fila que contiene solamente ceros está inmediatamente después de la última fila no nula de la matriz $[A]$. En consecuencia, el sistema equivalente tiene una serie de ecuaciones de la forma:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n = 0,$$

ecuaciones cuyo conjunto solución es cualquier n-upla de valores. Estas ecuaciones son redundantes o superfluas, y su conjunto solución es el universo. Ocurre entonces que la solución del sistema:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \dots \cap S_h \cap S_u \cap \dots \cap S_u$$

es equivalente a la solución

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \dots \cap S_h$$

donde S es la solución del sistema de ecuaciones lineales, y S_u es el conjunto universal, el cual no cambia la intersección S . En consecuencia:

Un sistema de ecuaciones lineales es consistente si y sólo si, el rango de la matriz ampliada es igual al rango de la matriz de coeficientes

En este caso al rango común $r[A] = r[A \ B]$, se le llama simplemente "rango del sistema".

De lo anterior se desprende que todos los sistemas homogéneos son consistentes, al ocurrir necesariamente $r[A] = r[A \ 0]$.

Ejemplo 3

Determinar si el sistema de ecuaciones lineales mostrado es consistente o inconsistente

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ x - 4y + z = 4 \end{cases}$$

Transformaremos la matriz ampliada correspondiente a la forma reducida:

$$\begin{array}{l} (-3) \left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right] \\ (-2) \left[\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 1 & 4 \end{array} \right] \\ \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 0 & 11 & -1 & -9 \end{array} \right] \\ (-1) \left[\begin{array}{cccc} 0 & 11 & -1 & -6 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 1 & 4 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 11 & -1 & -9 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 11 & -1 & -4 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \end{array}$$

Analizando la matriz escalonada de la matriz ampliada, se puede ver que:

$$\begin{array}{rcl} r[A] & = & 2 \\ r[A \ B] & = & 3 \end{array}$$

$\therefore$ El sistema es inconsistente

■

Ejemplo 4

Determinar si el sistema de ecuaciones lineales mostrado es consistente o inconsistente

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

El sistema es consistente por ser homogéneo. El problema, en este caso y en todos los sistemas consistentes es determinar si el sistema es consistente determinado o consistente indeterminado. Esta cuestión será abordada en el resto del capítulo.

■

Ejemplo 5

Determinar una condición necesaria y suficiente para que el sistema de ecuaciones propuesto admita solución.

$$\begin{cases} x + y - 2z = a \\ x - 8y + 7z = b \\ x - 2y + z = c \end{cases}$$

Transformaremos la matriz ampliada correspondiente a la forma reducida, de donde encontraremos la condición solicitada:

$$\begin{array}{l} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 1 & -8 & 7 & b \\ 1 & -2 & 1 & c \end{bmatrix} \\ (-1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 1 & -8 & 7 & b \\ 1 & -2 & 1 & c \end{bmatrix} \\ (-1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 1 & -8 & 7 & b \\ 1 & -2 & 1 & c \end{bmatrix} \\ (-3) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & -9 & 9 & b-a \\ 0 & -3 & 3 & c-a \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & -9 & 9 & b-a \\ 0 & -3 & 3 & c-a \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b-3c \\ 0 & -3 & 3 & c-a \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b-3c \\ 0 & -3 & 3 & c-a \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & -3 & 3 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b-3c \end{bmatrix} \end{array}$$

El sistema de ecuaciones admite solución si es consistente, y ello exige que

$$r[A] = r[A \ B]$$

Para ello, debemos tener:

$$2a + b - 3c = 0$$



Queda por analizar si el sistema consistente es determinado o indeterminado, es decir, si tiene solución única o múltiple.

En general se cumple:

Un sistema de ecuaciones es determinado si el rango del sistema es igual al número de incógnitas

Analizaremos dos situaciones generales, cuando el número de ecuaciones (m) es igual al número de incógnitas (n), y en segundo lugar, cuando $m \neq n$.

Caso: $m = n$

En este primer caso $m = n$, la matriz ampliada $[A \ B]$ se transforma en:

$$[I_n \ X_s]$$

donde los elementos de la matriz X_s son las soluciones del sistema, y estamos en el caso simple de una solución por Gauss-Jordan, tal como se analizó en los capítulos 6 y 11 precedentes. Como la matriz $[A]$ se transforma en la matriz identidad I_n , y el sistema es consistente determinado. Ejemplos de éste caso, se tienen en los capítulos mencionados.

Caso: $m \neq n$

En el segundo caso analizaremos dos situaciones $m < n$ y $m > n$.

Si $m < n$

Cuando se tienen menos ecuaciones que incógnitas se procede a aplicar las transformaciones elementales de filas llegando a la matriz escalonada reducida. Debemos luego analizar, el número de columnas distinguidas¹ de la matriz reducida correspondiente a la matriz A .

Las columnas distinguidas corresponden a las llamadas incógnitas básicas y las otras, a las incógnitas libres. Debemos observar que el número de columnas distinguidas es siempre igual al rango de la matriz; en consecuencia, el número de incógnitas libres será el número de incógnitas menos el rango, número que indica el número de parámetros que tendrá la solución del sistema. Este número de parámetros se llama también grado de libertad del sistema.

¹

Las columnas distinguidas se definieron en el capítulo 6.

Ejemplo 6

Una matriz escalonada reducida, correspondiente a un sistema de 6 ecuaciones con 5 incógnitas, puede ser:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se trata de un sistema con
 $m = 5$ ecuaciones

y
 $n = 6$ incógnitas

Se observa que:

$$r = r[A] = r[A \ B] = 4$$

El sistema es determinado y $r = 4$ es el rango del sistema.

La matriz reducida por filas tiene cuatro columnas distinguidas que son:

1^{ra}, 2^{da}, 4^{ta} y 6^{ta}.

Puede comprobarse que el número de columnas distinguidas coincide con el rango

$$r = 4.$$

Se tiene entonces:

$m = 5$	Número de ecuaciones
$n = 6$	Número de incógnitas
$r = 4$	rango (Igual al N° de columnas distinguidas)

De acuerdo a lo indicado, el número de parámetros será:

$$n - r = 2 \text{ parámetros}$$

Si admitimos que las incógnitas del sistema son:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \text{ y } x_6$$

Las incógnitas básicas, correspondientes a columnas distinguidas, son: x_1, x_2, x_4 y

x_6 .

Las incógnitas libres son: x_3 y x_5 .

Al reescribir el sistema, se tiene:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - 3x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_6 = -2 \end{cases}$$

Antes de despejar las incógnitas básicas, asignaremos a las incógnitas libres valores arbitrarios:

$$x_3 = s$$

$$x_5 = t$$

$$\begin{cases} x_1 + 2s = 2 \\ x_2 - 3s - t = 0 \\ x_4 + 2t = 5 \\ x_6 = -2 \end{cases}$$

Despejando las incógnitas básicas, se tiene la solución general del sistema:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 2s \\ x_2 &= -3s + t \\ x_3 &= s \\ x_4 &= 5 - 5t \\ x_5 &= 2 \\ x_6 &= -2 \end{aligned}, \text{ donde } s \text{ y } t \text{ son números reales.}$$

Una manera de expresar la solución general es también:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ donde } s \in \mathbb{R} \text{ y } t \in \mathbb{R}$$

Esta última manera de dar la solución general pone de manifiesto el hecho de que el sistema tiene dos grados de libertad ($n - r = 2$). Es evidente que para hallar una solución particular se debe asignar valores a los dos parámetros s y t , parámetros que deberán tener valores reales, cuando se solicite encontrar las soluciones reales del sistema; pero que en general pueden ser cualquier número.

Así por ejemplo, si se quisiera la solución particular en la cual $x_3 = -2$ y $x_5 = 3$, se puede ver que bastará asignar a los parámetros s y t los valores -2 y 3 respectivamente, con lo cual se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (3) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la solución particular es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Si $m > n$

Cuando se tienen más ecuaciones que incógnitas, se procede a aplicar las transformaciones elementales de filas llegando, como siempre, a una matriz escalonada reducida. Se presentan dos situaciones generales:

Si $r[A \ B] > r[A]$, el sistema es inconsistente.

Si $r[A \ B] = r[A]$, el sistema es consistente, siendo determinado sólo si el rango del sistema es igual al número de incógnitas.

Ejemplo 7

Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \\ 12x_1 + 9x_2 + 10x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

El sistema tiene cuatro ecuaciones y tres incógnitas. Procedemos a encontrar la matriz reducida por filas:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 9 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(-12)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como ocurre:

$$r[A] = r[A \ B] = \# \text{ incógnitas} = 3$$

el sistema es consistente determinado y su solución es:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = -3$$



Todos los resultados expuestos hasta el momento, que permiten resolver un sistema general de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas, se pueden resumir en dos teoremas que reciben el nombre de teoremas de Rouché-Frobenius.

12.5 Teoremas de Rouché-Frobenius

Todos los casos de inconsistencia y consistencia, determinación e indeterminación de sistemas de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas, se resuelven aplicando dos teoremas, los cuales son el resultado del análisis efectuado a lo largo del presente capítulo:

- (I) ***La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales sea consistente es que el rango de la matriz de coeficientes de las incógnitas y el rango de la matriz aumentada, sea el mismo***

$$r[A] = r[A \ B]$$

- (II) ***Un sistema de ecuaciones lineales consistente será determinado si el rango común es igual al número de incógnitas, en caso contrario es indeterminado***

Se presentan a continuación varios ejemplos resueltos que permiten aplicar los teoremas de Rouché-Frobenius.

Ejemplo 8

Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Escribimos la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{array}{l} (-) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ (-2) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right] \\ (-1) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right] \\ (4) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right] \\ (-) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right] \\ (-1) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & -4 \end{array} \right] \end{array}$$

Transformada la matriz ampliada en una escalonada reducida por filas:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 13 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & -4 \end{array} \right]$$

Se observa que

$$r[A] = r[AB] = 3$$

∴ Es un sistema consistente

Donde: $m = 3$, $n = 4$, $r = 3$ (rango común), como $n > r$, es un sistema consistente indeterminado con $n - r = 1$ parámetro.

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} x_1 & & + 13x_4 = 3 \\ & x_2 & + 5x_4 = 1 \\ & & x_3 - 17x_4 = -4 \end{cases}$$

Las incógnitas x_1 , x_2 y x_3 son las básicas, y la incógnita x_4 es la libre, pudiendo escribir la solución general, haciendo $x_4 = t$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - 13t \\ x_2 &= 1 - 5t \\ x_3 &= -4 + 17t \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

En consecuencia, el sistema tiene un grado de libertad, porque se le puede asignar, por ejemplo, un valor a t para hallar una solución particular. Debe observarse que también podría asignarse un valor a una de las otras incógnitas (x_1 , x_2 ó x_3) y determinando el correspondiente valor del parámetro t , se obtendría una solución particular con un valor prefijado para una de las tres primeras incógnitas.

Ejemplo 9

Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \\ 12x_1 + 9x_2 + 10x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

El sistema es no homogéneo, con cuatro ecuaciones y tres incógnitas. Luego de escribir la matriz ampliada correspondiente, y efectuar las transformaciones de filas correspondiente, se obtiene la matriz aumentada reducida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el sistema es compatible ($r[A] = r[AB] = 3$), y como $n = r$, el sistema es compatible determinado. La solución es evidente:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = -3$$

Ejemplo 10

Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

El sistema es homogéneo, por lo tanto es consistente (al menos tendrá la solución trivial). Escribimos la matriz ampliada y efectuaremos las transformaciones elementales de filas, llegando a la matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $n = 3$ y $r = 2$, la solución es indeterminada, y el sistema tiene un parámetro (o sea, un grado de libertad)

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Considerando las incógnitas x_1 y x_3 como básicas, y haciendo $x_2 = t$, se obtiene la solución general:

$$x_1 = -t \quad x_2 = t \quad x_3 = -2t$$

Ejemplo 11

Determinar "a" para que sea compatible el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ ax + y = 1 \\ x - y = a \end{cases}$$

Luego de escribir la matriz aumentada correspondiente, se aplican las transformaciones elementales de filas, y cuidando el aspecto algebraico de las transformaciones, se obtiene en dos pasos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-a & 1-2a \\ 0 & -2 & a-2 \end{bmatrix}$$

Para que el sistema sea compatible, las dos últimas filas deben ser proporcionales de manera que, al hacer la transformación de filas correspondiente, una de ellas sea $[0 \ 0 \ 0]$.

Sólo si existe esta proporcionalidad, se cumplirá: $r[A] = r[AB]$, y el sistema será compatible.

$$\therefore \frac{1-a}{-2} = \frac{1-2a}{a-2} \Rightarrow a^2 + a = 0$$

Si $a = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Si $a = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= 0,5 \\ y &= 1,5 \end{aligned}$$



Ejemplo 12

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = b \\ 2x + ay + 2z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Para qué valores de a y b

- i) El sistema tiene solución única.
- ii) El sistema tiene solución múltiple.

Si el sistema debe admitir solución, debe cumplirse:

$$r[A] = r[AB] = r$$

Además, será única la solución si se cumple: $n = r = 3$, y será múltiple si $r < 3$.

Luego de escribir la matriz aumentada correspondiente se aplican las transformaciones elementales de filas, y cuidando el aspecto algebraico de las transformaciones, se obtiene en pocos pasos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{b}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3b}{4} \\ 0 & 0 & 2-a & \frac{b}{2}(1 - \frac{3a}{4}) \end{array} \right]$$

El análisis de esta matriz escalonada, es:

1º: Para que el rango sea 3, basta que $2 - a \neq 0$

Por lo tanto: $a \neq 2$

Debe observarse que para cualquier valor de b , si el valor de $a \neq 2$, el sistema admite solución única.

2º: Por otro lado, será múltiple la solución si

$$r[A] = r[AB] = 2$$

Para ello se debe tener:

$$2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{b}{2} \left(1 - \frac{3a}{4}\right) = 0 \Rightarrow b = 0$$

3º: Como no puede ocurrir $r[\mathbf{A}] = r[\mathbf{AB}] = 1$, la única posibilidad para que la solución sea múltiple es:

$$a = 2 \text{ y } b = 0$$

La solución del problema es:

- i) solución única: $a \neq 2$ y b , cualquiera
- ii) solución múltiple: $a = 2$ y $b = 0$

Otra solución

El sistema propuesto tendrá solución si puede ser resuelta por la regla de Cramer, para ello debe cumplirse que $|\mathbf{A}| \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$$

Las soluciones son en este caso: $x = \frac{|\mathbf{A}_x|}{|\mathbf{A}|}$ $y = \frac{|\mathbf{A}_y|}{|\mathbf{A}|}$ $z = \frac{|\mathbf{A}_z|}{|\mathbf{A}|}$.

Como en el cálculo de los numeradores interviene la columna $\mathbf{B}$, el valor de b es arbitrario.

Por otro lado, si $a = 2$, el sistema es:

$$\begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{array}{l} (-1) \\ \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{array}{l} (-3) \\ (1) \\ (1) \\ (-\rightarrow) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Es evidente que el sistema será compatible indeterminado si $b = 0$, y su solución es:

$$x = t \quad y = -2t \quad z = t$$

Por lo tanto, la respuesta al problema propuesto es:

- i) Solución única: $a \neq 2$ y b , cualquiera
- ii) Solución múltiple: $a = 2$ y $b = 0$



Ejercicios y problemas propuestos

Capítulo 12

1. Clasificar y resolver los sistemas de ecuaciones propuestos (expresar la solución de los sistemas consistentes en forma matricial):

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x - 2y + z + u = 1 \\ x - 2y + z - u = -1 \\ x - 2y + z + 5u = 5 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$\text{c)} \quad \begin{cases} x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \\ 3x + 4y + 2z = 7 \\ 4x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$\text{d)} \quad \begin{cases} x - 3y + 3z - 4u = 1 \\ 2x - y + z - 3u = 4 \\ 3x - 2y + 2z - 3u = 2 \\ 5x - y + z - 3u = -1 \end{cases}$$

$$\text{e)} \quad \begin{cases} 6x - y + 5z - 4u + 7v = 4 \\ 3x - 2y + 7z - 5u + 8v = 3 \\ 2x - y + 7z - 3u + 5v = 2 \\ 3x + y - 2z + u - v = 1 \end{cases}$$

$$\text{f)} \quad \begin{cases} x + 3y + 5z - 4u = 1 \\ x + 3y + 2z - 2u + v = -1 \\ x - 2y + z - u - v = 3 \\ x - 4y + z + u - v = 3 \\ x + 2y + z - u + v = -1 \end{cases}$$

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 3x + y - 3z - u = 0 \\ 3x + 6y + 3z - 14u = 0 \\ 2x + 3y + 6z - 5u = 0 \\ x + y + 3z - u = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 3y - 6z + 2u = 0 \\ -4x + y + 10z = 0 \\ 5x - z - 3u = 0 \\ 9x - 8y + 28z - 5u = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x + 3y - 18u = 0 \\ 7x - 2z - 11u = 0 \\ 4y - 3z - u = 0 \end{cases}$$

3. Si
$$\begin{cases} 7x - 4y = C \\ 3x + 2y = C \end{cases}$$

determinar el valor de C para que x exceda en 4 a y.

¿Qué valor de x e y resuelven el sistema?

4. Determinar m de manera que sean compatibles las ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + y = 2 \\ x - y = m \end{cases}$$

5. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ ax + ay + z = 1 \\ x + ay + az = 1 \\ x + y + az = a \end{cases}$$

demostrar que si a es diferente de ± 1 , estas cuatro ecuaciones admiten un sistema de soluciones comunes. Hallar estas soluciones.

6. Comprobar que el sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + u = 0 \\ 2x + z + 2u = 0 \\ 2y + 2z + u = 0 \end{cases}$$

es consistente indeterminado. Hallar la solución general y una particular tal que:

$$y + u = 3.$$

7. Dado el sistema:
$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$
 determinar k de manera que el sistema

sea consistente indeterminado y resolver el sistema.

8. Determinar m de manera que sean compatibles las ecuaciones y resolver el sistema:

$$\begin{cases} (2m + 1)x + (m + 1)y = 10 \\ (2m - 1)x - (2 - m)y = 11 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

9. Determinar m de manera que el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas: $mx + y = 1$, $x + y = m$, $y, x - y = 3$, tenga solución.

10. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 - m \\ x + y + z = 2m + 3 \end{cases}$$

Además, si las soluciones x, y, z del sistema son los coeficientes de:

$$xu^2 + yu + z = 0$$

¿Qué valor entero hay que dar a " m " para que una de las raíces de la ecuación cuadrática en u sea doble de la otra?

11. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + ky - kz = 0 \\ 12x - (k + 2)y - 2z = 0 \\ kx - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

determinar k de manera que el sistema sea consistente indeterminado, y resolver el sistema.

12. Resolver y discutir el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y + mz = 2 \\ 5x + 3y + mz = 2 \\ mx + 5y + 3z = 2 \end{cases}$$

13. Resolver y discutir la solución del sistema:

$$\begin{cases} mx + (m + 1)y = 2m - 1 \\ (3 - m)x + (6 - 2m)y = m + 1 \end{cases}$$

14. Resolver y discutir el sistema:

$$\begin{cases} 3x - my + 3z = m - 1 \\ 2x - 5y + 3z = 1 \\ x + 3y + (1 - m)z = 0 \end{cases}$$

15. Resolver y discutir la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + ay = b \\ y + az = b \\ ax + z = b \end{cases}$$

16. Resolver y discutir la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ \lambda x + y + z = 0 \end{cases}$$

17. Si $\alpha < \beta < \gamma$ son las raíces de $t^3 - 9t^2 + 26t - 24 = 0$, resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 2 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = 3 \end{cases}$$

18. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z + u = 2 \\ x - 3z - 2u = -2 \\ 5x - 2y - 2z - 3u = -2 \\ 4x - 2y + z - u = 0 \end{cases}$$

19. Resolver y discutir el sistema:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

20. Resolver y discutir el sistema:

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$$

APÉNDICES

Se han considerado los siguientes apéndices:

- I Construcción de ejercicios con matrices enteras
Procedimientos para construir ejercicios con números enteros.
- II Matrices particionadas o por cajas
Operaciones matriciales descomponiendo las matrices convenientemente.
- III Otras notaciones
En el texto se utiliza exclusivamente la notación de Leibnitz, es decir con dos subíndices. En este apéndice se muestran otras notaciones, que pueden ser utilizadas en algunos ejercicios, tanto de matrices como de determinantes.
- IV Inversas unilaterales
Se muestra cómo determinar las inversas de matrices rectangulares, matrices que tienen inversas, sólo por un lado.
- V Otras verificaciones
Se presentan procedimientos de verificación que permiten controlar, paso a paso, la solución matricial de un sistema de ecuaciones y la inversión de matrices.
- VI Una aplicación a la geometría analítica
Se presenta un procedimiento matricial a fin de eliminar el término rectangular de una ecuación general de segundo grado en dos variables.
- VII Métodos chinos
Como curiosidad se presenta el procedimiento que los chinos utilizaban para resolver los sistemas de ecuaciones, procedimiento que en esencia es el mismo que 2000 años después se conoce como método de Gauss o Gauss-Jordan. Además, se mencionan los cuadrados mágicos, que están de alguna manera están relacionados con las matrices.

I Construcción de ejercicios con matrices enteras

En este apéndice se presentan procedimientos para elaborar ejercicios matriciales cuyas entradas son números enteros. En la mayoría de procedimientos no se proporcionarán las demostraciones.

MATRICES ENTERAS Designamos con este nombre a las matrices cuyos elementos son todos números enteros.

A El cuadrado de toda matriz P de la forma:

$$P = \begin{bmatrix} a\alpha & b\alpha & c\alpha & . & . & . \\ a\beta & b\beta & c\beta & . & . & . \\ a\gamma & b\gamma & c\gamma & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

es la matriz nula, si la traza de la matriz P es cero.

$$\therefore P^2 = [0], \text{ siempre que: } a\alpha + b\beta + c\gamma + . + . + . = 0$$

Veamos un ejemplo:

Una condición para construir una matriz nulipotente A de índice dos pueden ser los ocho enteros que satisfacen la condición:

$$(3)(2) + (1)(5) + (-4)(2) + (-3)(1) = 0$$

Con ellos se construye una matriz entera A de orden cuatro, tal que: $A^2 = [0]$

$$A = \begin{bmatrix} (3)(2) & (1)(2) & (-4)(2) & (-3)(2) \\ (3)(5) & (1)(5) & (-4)(5) & (-3)(5) \\ (3)(2) & (1)(2) & (-4)(2) & (-3)(2) \\ (3)(1) & (1)(1) & (-4)(1) & (-3)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -8 & -6 \\ 15 & 5 & -20 & -15 \\ 6 & 2 & -8 & -6 \\ 3 & 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

B El cuadrado de toda matriz **P** de la forma:

$$P = \begin{bmatrix} aa & ba & ca & . & . & . \\ a\beta & b\beta & c\beta & . & . & . \\ a\gamma & b\gamma & c\gamma & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} - I$$

es igual a la matriz identidad, si la traza de **P** es igual a 2.

$$aa + b\beta + c\gamma + . + . + . = 2 .$$

Es decir, la matriz **P** es una matriz involutiva, que satisface: $P^2 = I$

Veamos un ejemplo:

Para ello construiremos la condición dada, eligiendo ocho números enteros:

$$(2)(1) + (4)(3) + (-6)(1) + (-2)(3) = 2$$

La matriz involutiva **B** de cuarto orden correspondiente a la condición propuesta, es:

$$B = \begin{bmatrix} (2)(1) & (4)(1) & (-6)(1) & (-2)(1) \\ (2)(3) & (4)(3) & (-6)(3) & (-2)(3) \\ (2)(1) & (4)(1) & (-6)(1) & (-2)(1) \\ (2)(3) & (4)(3) & (-6)(3) & (-2)(3) \end{bmatrix} - I_4$$

Operando convenientemente, se tiene la matriz involutiva **B**:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 & -2 \\ 6 & 11 & -18 & -6 \\ 2 & 4 & -7 & -2 \\ 6 & 12 & -18 & -7 \end{bmatrix}$$

Nota

También es involutiva la matriz Q

$$Q = \begin{bmatrix} a\alpha & b\alpha & c\alpha & . & . & . \\ a\beta & b\beta & c\beta & . & . & . \\ a\gamma & b\gamma & c\gamma & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} + I$$

siempre que se cumpla: $a\alpha + b\beta + c\gamma + . + . + . = 2$.

C Matrices inversas con elementos enteros

El producto de dos matrices triangulares, una superior y otra inferior, siempre que ambas tengan elementos iguales a 1 o -1 en sus respectivas diagonales dan una matriz entera con inversa entera.

La explicación es simple: como el determinante de cada matriz es 1 o -1 , en consecuencia el determinante de su producto será también 1 o -1 , y su inversa será entera. Veamos un ejemplo:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -7 & 6 \\ -1 & -4 & 0 & -9 \\ -2 & 1 & 1 & 19 \end{bmatrix}$$

Debemos observar que toda matriz triangular es regular si los elementos de su diagonal son diferentes de cero. La matriz L tiene determinante -1 y la matriz U , determinante igual a 1, en consecuencia, el determinante de la matriz LU será, por el teorema de Binet-Cauchy: $(-1)(1) = -1$.

Además, por el teorema:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

podemos asegurar que la inversa tendrá elementos enteros. Debe observarse también que la matriz U es una matriz de Heisenberg, y la matriz L es igualmente la transpuesta de la matriz de Heisenberg.

Otra manera de obtener matrices enteras con elementos enteros es multiplicar matrices elementales que se obtengan a partir de la matriz unitaria intercambiando sus filas o agregando a una fila un múltiplo de otra. La matriz así obtenida tiene elementos enteros y su inversa también los tendrá, pero es un proceso mucho más lento que el descrito.

D Factorización matricial

Se trata de construir una matriz A tal que cumpla la propiedad:

Una matriz cuadrada¹ es el producto de una matriz triangular inferior con elementos iguales a la unidad en la diagonal principal, por una matriz triangular superior.

El proceso de construcción consiste en considerar dos matrices triangulares L y U , cada una con números enteros, y efectuar el producto.

Por ejemplo, se puede tomar:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Bastará ejecutar el producto y luego resolver el problema.

E Descomposición de matrices simétricas

Se trata de encontrar una matriz, con números enteros que pueda ser descompuesta de acuerdo a la propiedad:

Una matriz simétrica² es igual al producto de una matriz triangular inferior por su transpuesta.

¹ En realidad, solamente pueden ser factorizadas las matrices que posean inversa, es decir las matrices inversibles (ver capítulo V).

² Igualmente, solamente pueden descomponerse en el producto indicado las matrices que posean inversa (ver capítulo V).

El proceso consiste en suponer una matriz T triangular inferior, con números enteros y multiplicarla por su transpuesta. El resultado será una matriz simétrica que al ser descompuesta, de acuerdo a lo señalado en la propiedad, se obtendrán varias respuestas (2^n , donde n es el orden de las matrices), una de las cuales será la matriz T supuesta.

F Ejercicios del tipo: $AP = AQ$, con $P \neq Q$

Tome un ejercicio del tipo $AB = [0]$, y descomponga, de cualquier manera la matriz B , siempre que $B = P - Q$. Ahora tiene las tres matrices A , P y Q , que verifican $AP = AQ$, siendo $P \neq Q$.

G Determinante con valor predeterminado

Para construir un determinante cuyo valor sea un número entero predeterminado, escriba un determinante $|A|$ tal que la matriz A sea una diagonal del orden deseado, de manera que los elementos de la diagonal principal den como producto dicho número. Luego realice operaciones permitidas en determinantes y que no cambien el valor del determinante:

El determinante de la transpuesta de una matriz es igual al determinante de la matriz.

Un determinante no varía al sumar a los elementos de una línea cualquiera las correspondientes de otra paralela multiplicadas por una constante.

El determinante así transformado, tiene por valor el producto de los elementos de la diagonal de A .

I Sistemas de ecuaciones con soluciones enteras

Cuando se tiene un sistema de ecuaciones consistente determinado y se quiere que las soluciones sean otras predeterminadas, bastará modificar los términos independientes de las ecuaciones dadas de manera que la solución deseada satisfaga el sistema de ecuaciones.

Nota No hemos encontrado, ni descubierto, procedimientos para construir matrices nulipotentes, periódicas, y otras. Si se encuentran, se anexarán a esta colección de procedimientos que esperamos haya satisfecho la curiosidad de los alumnos de cómo los profesores "creamos" ejercicios y problemas con números enteros, y esperamos que este apéndice sea de utilidad para los colegas que dictan el curso.

II Matrices particionadas o por cajas

En ocasiones es necesario observar el comportamiento de un subconjunto de datos de una matriz, subconjunto que forma una submatriz, y que presentamos en este apéndice con el nombre de matrices particionadas o por cajas.

Se trabaja con matrices particionadas por varias razones, entre otras:

- Muestra una porción de una matriz que interesa observar o analizar.
- Permite realizar operaciones, como se presentará en este apéndice.
- Permite escribir, imprimir o visualizar en pantalla una matriz por partes.

Se trabajó intensamente con matrices particionadas hasta la década del 60. El uso masivo de computadoras personales ha dejado de lado la presentación de esta parte de la teoría de matrices en cursos básicos. Sin embargo se presenta en este apéndice a fin de que los alumnos puedan ver cómo se utiliza la teoría de la conformabilidad de las operaciones en cada caso. Es además un interesante aspecto histórico que ayuda a entender cómo se trabaja actualmente las matrices, tanto en las operaciones elementales como en la inversión.

DEFINICIÓN

Denominaremos submatriz de una matriz $A_{m \times n}$ a la matriz que resulta al tarjar de ella $m - s$ filas y $n - t$ columnas, resultando una matriz de orden $s \times t$.

Ejemplo 1

De una matriz genérica $A_{4 \times 6}$, encontrar una submatriz, eliminando las filas 1^{ra} y 4^{ta}, y las columnas 2^{da}, 3^{ra}, 6^{ta} y 7^{ma}.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Consideremos una matriz **B** de orden 3x4, que consideraremos descompuesta en cuatro submatrices columna, cada una designada B_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad B = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4]$$

donde:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es evidente, por ejemplo, que

$$\lambda B = [\lambda B_1 \ \lambda B_2 \ \lambda B_3 \ \lambda B_4]$$

Por otro lado es posible desarrollar el producto **AB**, utilizando la descomposición de la matriz **B** en cuatro columnas, de la siguiente manera:

$$AB = [AB_1 \ AB_2 \ AB_3 \ AB_4]$$

donde cada AB_i es una submatriz columna del producto **AB**.

Igualmente es posible descomponer la matriz **B** en tres submatrices fila, y efectuar con ellas el producto por un escalar y por otra matriz conformable en forma similar. ■

Otra manera de descomponer una matriz es mediante un seccionamiento vertical y otro horizontal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \vdots & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Donde las matrices A_{11} , A_{12} , A_{21} y A_{22} , son matrices de órdenes 3x3, 3x4, 1x3 y 1x4, y los subíndices indican la posición, fila y columna, de cada submatriz.

Si dos matrices son conformables con respecto a la adición, existe al menos una y en general varias maneras de dividir las, de manera que sea posible efectuar la operación de adición con las submatrices.

Ejemplo 3

Sean **A** y **B** dos matrices conformables para la adición, tales que se puede escribir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$$

entonces es posible efectuar la suma por cajas o bloques:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} + \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$$

se deberá tener en cuenta que para que la adición sea ejecutable por cajas, es necesario que las matrices $\mathbf{A}_{ij}$ y $\mathbf{B}_{ij}$, $\forall i,j$, sean equidimensionables, es decir las particiones de las matrices deben ser de la misma manera. ■

Es interesante observar que cuando se particiona una matriz, su transpuesta funciona de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \vdots & \mathbf{A}_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{21} & \vdots & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^t & \vdots & \mathbf{A}_{21}^t \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{12}^t & \vdots & \mathbf{A}_{22}^t \end{bmatrix}$$

En forma similar, si dos matrices son conformables respecto de la multiplicación, siempre es posible particionarlas de manera que la operación de multiplicación pueda ser ejecutada por matrices cajas. La operación se efectúa de la siguiente manera:

(1) donde las matrices $\mathbf{A}_{ik}$ y $\mathbf{B}_{kj}$, son matrices conformes o conformables con respecto a la multiplicación. De hecho, la partición de las matrices para la multiplicación debe ser hecha con sumo cuidado, a fin de tener dicha conformabilidad.

Ejemplo 4

Efectuar el producto $\mathbf{AB}$ de las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Consideremos las particiones:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{21} = [0 \ 1] \quad \mathbf{A}_{22} = [3 \ 4]$$

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones matriciales según el producto (1), se tiene:

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 7 \end{array} + \begin{array}{r} 5 \\ 5 \end{array} = \begin{array}{r} 10 \\ 12 \end{array}$$

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 16 \end{array} + \begin{array}{r} 3 \\ 3 \end{array} = \begin{array}{r} 17 \\ 19 \end{array}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + [3 \ 4] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [19]$$

$$1 + 18 = 19$$

$$4 + 8 = 12$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + [3 \ 4] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = [12]$$

Reemplazando en el producto (1):

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 12 & 18 \\ 19 & 12 \end{bmatrix}$$

Se debe observar en particular las matrices $[19]$ y $[12]$, ellas son matrices de orden 1×1 , y se comportan como un simple escalar.

La inversión de matrices por cajas o por matrices particionadas nos permite mostrar la solución de un sistema de ecuaciones matriciales. No se pretende que un alumno calcule la inversa por matrices particionadas, procedimiento que era uno de los fundamentales en los años 60; se busca que observe cómo se efectúa la solución del sistema matricial que presenta la inversión.

Sea $P_{n \times n}$ una matriz regular que consideraremos particionada:

$$P = \begin{bmatrix} A & : & B \\ \dots & \dots & \dots \\ C & : & D \end{bmatrix}$$

donde las submatrices son de los siguientes órdenes:

$A_{s \times s}$, $B_{s \times m}$, $C_{m \times s}$ y $D_{m \times m}$, siendo necesariamente: $s + m = n$.

Si Q es la inversa de P , consideraremos a Q , particionada de la misma manera:

$$Q = \begin{bmatrix} E & : & F \\ \dots & \dots & \dots \\ G & : & H \end{bmatrix}$$

donde las submatrices son de los siguientes órdenes:

$E_{s \times s}$, $F_{s \times m}$, $G_{m \times s}$ y $H_{m \times m}$, siendo igualmente: $s + m = n$.

Como $PQ = I_n$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & I_m \end{bmatrix}$$

Al efectuar el primer miembro, se tiene el siguiente sistema matricial:

$$AE + BG = I_s \quad (1)$$

$$AF + BH = O \quad (2)$$

$$CE + DG = O \quad (3)$$

$$CF + DH = I_m \quad (4)$$

Resolviendo el sistema, se tiene:

De (3):

$$G = -D^{-1}CE$$

Reemplazando en (1):

$$AE - BD^{-1}CE = I_s$$

Para despejar la matriz E , postmultiplicamos por E^{-1} :

$$A - BD^{-1}C = E^{-1}$$

de donde

$$E = (A - BD^{-1}C)^{-1}$$

De la ecuación (4), se despeja la matriz H :

$$H = D^{-1} - D^{-1}CF$$

es decir:

$$H = D^{-1}(I - CF)$$

Reemplazando en (2):

$$\begin{aligned} AF + BD^{-1} - BD^{-1}CF &= 0 \\ (A - BD^{-1}C)F &= -BD^{-1} \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de la matriz E , se obtiene:

$$E^{-1}F = -BD^{-1}$$

De donde:

$$F = -EBD^{-1}$$

Hemos logrado la solución del sistema matricial:

$$E = (A - BD^{-1}C)^{-1}$$

$$F = -EBD^{-1}$$

$$G = -D^{-1}CE$$

$$H = D^{-1}(I - CF)$$

Ejemplo 5

Invertir la matriz P :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Particionamos la matriz de la siguiente manera:

$$P = \begin{bmatrix} A_{1 \times 1} & B_{1 \times 2} \\ C_{2 \times 1} & D_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \text{ es decir:}$$

$$A = [1], \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo a lo indicado, la inversa de la matriz P es:

$$Q = \begin{bmatrix} E_{1 \times 1} & F_{1 \times 2} \\ G_{2 \times 1} & H_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

Aplicando las fórmulas:

$$E = (A - BD^{-1}C)^{-1}$$

$$E = \left[[1] - [2 \ 3] \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \left[-\frac{1}{40} \right]^{-1} = -40$$

$$F = -EBD^{-1}$$

$$F = -[-40] [2 \ 3] \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = [16 \ 9]$$

$$G = -D^{-1}CE$$

$$G = -\frac{1}{40} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} [-40] = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$H = D^{-1}(I - CF)$$

$$H = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \left(I_2 - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} [16 \ 9] \right) = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Recomponiendo la matriz Q , se obtiene:

$$P^{-1} = Q = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Es evidente que el invertir una matriz por cajas o por matrices particionadas no es el más adecuado, si se le compara por ejemplo, con el procedimiento de Gauss Jordan. Sin embargo, deben rescatarse dos aspectos: primero, que éste era el método usual para invertir una matriz de orden mayor a cuatro hasta la década de los sesenta, y en segundo lugar, debe rescatarse el procedimiento realizado para llegar a las "fórmulas" que se utilizaron.

III Otras notaciones

Como divulgación se presentan en este tercer apéndice diversas notaciones matriciales. A lo largo del texto se ha utilizado exclusivamente la notación de Leibnitz, pero conocer otras notaciones puede ser útil en problemas o ejercicios especiales. Todas las notaciones fueron presentadas en relación al desarrollo de determinantes, pero se utilizan y presentan en este apéndice con notación matricial.

Notación de Leibnitz³

Como se ha señalado en el texto, se usan dos subíndices, el primero indicativo de las filas y el segundo de las columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{LEIBNITZ}$$

Una variante, si bien poco usada, utiliza un subíndice como indicativo de las filas y un superíndice, indicativo de las columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m^1 & a_m^2 & a_m^3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_m^n \end{bmatrix}$$

³ Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646 – 1716)

Notación de Cauchy⁴

La notación de Cauchy hace uso de indicadores numéricos para las filas y alfabéticos para las columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & . & . & . & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & . & . & . & n_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & . & . & . & n_3 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_m & b_m & c_m & . & . & . & n_m \end{bmatrix} \quad \text{CAUCHY}$$

Notación de Sylvester⁵

Esta notación hace uso de dos órdenes alfabéticos para indicadores de filas y columnas. Es la notación más compleja y por ello la menos utilizada.

$$A = \begin{bmatrix} a\alpha & a\beta & a\gamma & . & . & . & a\nu \\ b\alpha & b\beta & b\gamma & . & . & . & b\nu \\ c\alpha & c\beta & c\gamma & . & . & . & c\nu \\ . & . & . & . & . & . & . \\ m\alpha & m\beta & m\gamma & . & . & . & m\nu \end{bmatrix} \quad \text{SYLVESTER}$$

Notación de Kronecker⁶

Es la notación más breve y simbólica, que sin indicar su nombre, se ha utilizado en el texto.

$$[a_{ij}] \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{KRONECKER}$$

⁴ Agustín – Luis Cauchy (1789 – 1857).

⁵ James Joseph Sylvester (1814 – 1897)

⁶ Leopold Kronecker (1823 – 1891)

esta mal

IV Inversas unilaterales

En el capítulo 5 definimos la inversa de una matriz cuadrada. Ahora nos proponemos ampliar la observación N° 2 de la página 105, donde se mencionaron las matrices unilaterales, excluyéndolas de la definición dada. El tema es de interés por estar relacionado con los sistemas de ecuaciones lineales, por lo que se sugiere la lectura de esta apéndice luego del estudio de los capítulos 11 y 12 del texto.

Definiciones

Si **A** es una matriz rectangular de orden $m \times n$, definimos:

1^{ro}. La matriz **A** tiene inversa por la izquierda si existe una matriz $L_{m \times n}$, tal que :

$$LA = I_m$$

2^{do}. La matriz **A** tiene inversa por la derecha si existe una matriz $R_{n \times m}$, tal que :

$$RL = I_n$$

Observaciones:

- 1) Utilizamos **L** por left y **R** por right (izquierda y derecha), respectivamente.
- 2) Es evidente que $LA \neq RA$, por ser la primera igual a I_m y la segunda I_n .
- 3) Debe observarse que si **A** es una matriz cuadrada regular, las matrices **L** y **R** son iguales a la matriz A^{-1} , estudiada en el capítulo 5 y siguientes. Por ello en todo este apéndice solamente considera la matriz **A** como rectangular ($m \neq n$).
- 4) Es común llamar a **L** la inversa por la izquierda o por premultiplicación, y a **R**, la inversa por la derecha o por postmultiplicación.

Con el siguiente ejemplo motivaremos la teoría básica de las matrices unilaterales.

EJEMPLO 1

Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Nos preguntamos: ¿Tiene **A** inversa por la derecha, por la izquierda o por ambos lados?

El nombre "unilaterales" de estas inversas, nos indica que la matriz rectangular tiene sólo una inversa unilateral. Pero observamos que dice inversas unilaterales y no inversa unilateral, lo que nos hace pensar que de existir, existen varias. Resolvamos la cuestión planteada en forma totalmente algebraica. Para ello supongamos $L_{3 \times 2}$ y $R_{3 \times 2}$

por ser **A** una matriz de orden 2×3 , a fin de que exista conformabilidad en las operaciones:

$$L_{3 \times 2} A_{2 \times 3} = I_3$$

$$A_{2 \times 3} R_{3 \times 2} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' & u' \\ y' & v' \\ z' & w' \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al efectuar las multiplicaciones y comparar, se obtienen dos sistemas de ecuaciones lineales:

Cálculo de matriz **L**:

Multiplicando e igualando, se obtiene:

$$\begin{array}{lll} x + 2u = 1 & y + 2v = 0 & z + 2w = 0 \\ x + u = 0 & y + v = 1 & z + w = 0 \\ -x - 2u = 0 & -y - 2v = 0 & -z - 2w = 1 \end{array}$$

Se observa que los dos sistemas son incompatibles.

∴ La matriz **A** no tiene matriz unilateral por la izquierda.

Cálculo de la matriz **R**:

Multiplicando e igualando, se obtiene:

$$\begin{array}{ll} x' + y' - z' = 1 & u' + v' - w' = 0 \\ 2x' + y' - 2z' = 0 & 2u' + v' - 2w' = 1 \end{array}$$

Los sistemas equivalentes son⁷:

$$\begin{array}{ll} x' + y' - z' = 1 & u' + v' - w' = 0 \\ -y' = -2 & v' = -1 \end{array}$$

⁷ De ser necesario, cada sistema puede ser resuelto por los métodos matriciales presentados en el texto. En este caso, por ser sistemas de dos ecuaciones, se resuelven algebraicamente.

Finalmente, se tienen las soluciones generales siguientes:

$$\begin{array}{ll} x' = t & u' = s \\ y' = 2 & v' = -1 \\ z' = t + 1 & w' = s - 1 \end{array}$$

donde t y s son parámetros reales.

En consecuencia, la matriz R , es:

$$R = \begin{bmatrix} t & s \\ 2 & -1 \\ t + 1 & s - 1 \end{bmatrix}$$

Y se cumple:

$$R = \begin{bmatrix} t & s \\ 2 & -1 \\ t + 1 & s - 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como en efecto, para todo los valores de los parámetros t y s , el producto $AR = I$, queda verificado que existen infinitas matrices R que son inversas por la derecha de la matriz A .

V Otras verificaciones

En la sección 3.2 del capítulo III, se presentó un procedimiento muy sencillo para comprobar el resultado de multiplicar dos matrices, haciendo uso de un orla. El mismo procedimiento es aplicable a la solución de un sistema por Gauss-Jordan, así como a la inversión de matrices por el mismo procedimiento.

La justificación es simple. Se mostró que para comprobar el producto $\mathbf{AB} = \mathbf{P}$,

bastará posmultiplicar por una matriz columna suma: $\mathbf{Z}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

con lo que $\mathbf{ABZ}_c = \mathbf{PZ}_c$, y las matrices $\mathbf{BZ}_c$ y $\mathbf{PZ}_c$, resultan ser las orlas, cuyas entradas son las sumas de las entradas de las filas de las matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{P}$ (revisar la sección 3.4 del texto). Debe tenerse en cuenta que las transformaciones elementales de filas que se utilizan en los procedimientos que nos ocupan, son premultiplicaciones por matrices elementales o de transformación. En consecuencia, el procedimiento de verificación es aplicable, y mediante tres ejemplos presentaremos directamente estos criterios de verificación, que permiten controlar en cada paso los resultados parciales, y no tener sorpresas al final del trabajo.

Ejemplo 1

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 2 \\ 2x + 6y + 3z = 3 \end{cases}$$

Para resolver el sistema haremos uso del procedimiento de Gauss-Jordan,

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] \Rightarrow \Rightarrow [\mathbf{I} \mid \mathbf{X}].$$

donde $\Rightarrow \Rightarrow$ significa transformaciones elementales de filas.

A fin de realizar el control permanente del proceso numérico, introducimos una columna $\mathbf{S}$ de verificación, y el esquema de Gauss-Jordan se transforma en:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{S} \mid \mathbf{B}] \Rightarrow \Rightarrow [\mathbf{I} \mid \mathbf{S} \mid \mathbf{X}]$$

donde $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes; $\mathbf{B}$ la matriz columna de términos constantes; y $\mathbf{X}$, la solución del sistema.

Escribiendo la matriz aumentada correspondiente, adicionando la columna de verificación, y aplicando las primeras transformaciones, se tiene:

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 3 & 11 & 3 \end{bmatrix}$$

Donde, como hiciéramos antes, dejamos espacios en lugar de poner rayas verticales (que se recomiendan cuando se trabaja a mano). La columna de verificación 5 5 11, es, como puede y debe verificarse, la suma de las entradas de las respectivas filas.

Los tableros siguientes son:

$$\begin{array}{l} -2 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 5 & 0 \end{array} \right] \\ \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ -2 \left[\begin{array}{cccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] \end{array}$$

La verificación resulta al comprobar las sumas:

$$1 + 2 + 2 = 5; 0 + 1 + (-1) = 0; 0 + 2 + (-1) = 1$$

$$\begin{array}{l} -4 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & 5 & -4 \end{array} \right] \\ 1 \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$

Las raíces del sistema son $x = 0$, $y = 1$ y $z = -1$.

Lo importante es que en todo momento se ha podido comprobar que no se cometían errores de cálculo. A pesar de ello, siempre se debe realizar una comprobación final, que muy bien puede ser ejecutada como sigue:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right]$$

Como se puede observar, el procedimiento algebraico de sustituir el valor de las incógnitas en las ecuaciones del sistema original, se reemplaza por una multiplicación de matrices, es decir se comprueba ejecutando:

$$AX = B.$$

Ejemplo 2

El procedimiento es aplicable inclusive cuando se pide resolver y discutir un sistema de ecuaciones lineales. Sea por ejemplo el sistema:

$$\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

La matriz ampliada, con la columna de verificación, es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & m & m+2 & m^2 \\ 1 & m & 1 & m+2 & m \\ m & 1 & 1 & m+2 & 1 \end{bmatrix}$$

El proceso se realiza exactamente igual como si se trabajara con números. Cuando es necesario aceptar una condición para continuar el proceso, se hace. En el ejemplo, se debe aceptar $m - 1 \neq 0$ en el subsiguiente paso, y al final se discute el sistema considerando $m - 1 = 0$.

Es verdad que la columna de verificación es un trabajo adicional, sobre todo en este problema, pero da la seguridad, en este caso algebraica, que se requiere en todo trabajo de matrices. La solución se deja a los interesados.

Ejemplo 3

Invertir la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invertiremos la matriz por el método de Gauss-Jordan, utilizando el esquema:

$$[A \quad I] \Rightarrow [I \quad A^{-1}]$$

A fin de realizar el control permanente del proceso numérico, introducimos dos columnas, S_1 y S_2 , de verificación, y el esquema de Gauss-Jordan se transforma en:

$$[A \quad S_1 \quad I \quad S_2] \Rightarrow [I \quad S_1 \quad A^{-1} \quad S_2]$$

donde, como antes se omiten las rayas verticales, que se sugiere deben ser utilizadas al trabajar a mano.

Las columnas de verificación se identifican, y en cada caso, son la suma de las entradas correspondientes:

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 11 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\uparrow S_1 \qquad \qquad \uparrow S_2$

$$\begin{matrix} 2 \\ \rightarrow \\ -2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 5 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 13 & 11 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\uparrow S_1 \qquad \qquad \uparrow S_2$

$$\begin{matrix} -14 \\ -6 \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 14 & 15 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & 5 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\uparrow S_1 \qquad \qquad \uparrow S_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 17 & 30 & -14 & 33 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 7 & 13 & -6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\uparrow S_1 \qquad \qquad \uparrow S_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 17 & 30 & -14 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -7 & -13 & 6 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\uparrow S_1 \qquad \qquad \uparrow S_2$

La inversa es:

$$\begin{bmatrix} 17 & 30 & -14 \\ -7 & -13 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo importante, como antes, es que en ningún momento se ha perdido el control de las operaciones. La multiplicación final de comprobación ($AA^{-1} = I$), sería ya innecesaria, pero es recomendable hacerla siempre.

VI Una aplicación a la geometría analítica

En Geometría Analítica Plana se estudia la ecuación de segundo grado en dos variables

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Veremos en este apéndice cómo hacer uso de los temas desarrollados en el texto para eliminar el término rectangular o productivo xy , haciendo uso de un procedimiento llamado diagonalización de matrices.

En este apéndice consideraremos la ecuación general de segundo grado de la siguiente forma:

$$ax^2 + 2bxy + c^2y + dx + ey + f = 0 \quad (\alpha)$$

A los tres primeros términos de la ecuación (α) : $ax^2 + 2bxy + c^2y$, se le denomina forma cuadrática asociada.

Si consideramos las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \quad y \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

la ecuación (α) , se escribe matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

Es decir:

$$X'AX + LX + f = 0 \quad (\beta)$$

Nos proponemos lograr la eliminación del término rectangular haciendo uso de matrices introduciendo el siguiente cambio de variable matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

o sea: $X = PX'$

Reemplazando en la ecuación (β) , se obtiene:

$$(PX')' A(PX') + L(PX') + f = 0$$

Al efectuar la transpuesta del producto, se obtiene:

$$X'^t P' A P X' + L P X' + f = 0 \quad (\gamma)$$

Para que la ecuación (γ) carezca de término rectangular, la matriz $P' A P$ debe ser una matriz diagonal, es decir:

$$P' A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

En efecto, si ello ocurre, la ecuación (γ) se escribe:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0$$

que al desarrollarse, se tiene:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d' x' + e' y' + f = 0$$

$$\begin{aligned} \text{donde: } d' &= d p_{11} + e p_{21} \\ e' &= d p_{12} + e p_{22} \end{aligned}$$

Nuestro problema se reduce a encontrar una matriz P que diagonalice la matriz simétrica A , es decir, que la matriz $P' A P$ sea una matriz diagonal.

Valores propios de una matriz

La determinación de la matriz P que diagonalice la matriz A , mediante la operación $P' A P$ está relacionada con la solución de un problema fundamental del Álgebra Lineal:

Determinar valores del escalar λ para que exista una matriz columna no nula X que satisfaga la ecuación $A X = \lambda X$, donde A es una matriz cuadrada de orden n

Los escalares λ , reales o complejos, se denominan **autovalores**, **valores propios**, **latentes** o **característicos** de la matriz A . Ellos se determinan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A X &= \lambda X \\ A X &= \lambda I X \\ (A - \lambda I) X &= [0] \end{aligned} \quad (\delta)$$

Como (δ) es un sistema de ecuaciones homogéneo, la solución no nula ocurre cuando el determinante de la matriz de coeficientes de las incógnitas es nulo, es decir cuando:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\text{ó } |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Esta ecuación da lugar a una ecuación polinomial de grado n , llamada **polinomio característico** de la matriz $\mathbf{A}$. Sus ceros o raíces son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, números reales o complejos, llamados **autovalores**.

Al reemplazar cada autovalor λ en la ecuación (δ), se obtiene un vector columna asociado, llamado **autovector** o **vector propio**.

Ejemplo 1

Determinar los autovalores y autovectores correspondientes a la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

El problema consiste en hallar los escalares λ y los vectores columna $\mathbf{X}$ que resuelven la ecuación matricial: $\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X}$.

El polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$, es: $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando el determinante, se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda - 6 &= 0 \\ (\lambda + 3)(\lambda - 2) &= 0 \end{aligned}$$

los autovalores son: $\lambda = 2$ y $\lambda = -3$.

La determinación de los autovalores se efectúa reemplazando los autovalores en la ecuación: $(A - \lambda I)X = [0]$.

Para $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = t$$

$$y_1 = t$$

Para $\lambda = -3$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = -0,25 s$$

$$y_2 = s$$

En consecuencia, los autovectores son:

$$X = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = s \begin{bmatrix} -0,25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Proceso de diagonalización

En general, una matriz es diagonalizable cuando existe una matriz regular P , tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal. Esta matriz P está formada por los autovectores de la matriz A .

Así, en el ejemplo 1, para la matriz A , se hallaron:

$$\begin{array}{ll} \lambda = 2 & X = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda = -3 & X = s \begin{bmatrix} -0,25 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tomando los valores particulares para $t = s = 1$, la matriz P , es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ -0,8 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Efectuando mediante un esquema horizontal, se logra:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ -0,8 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,6 & 0,4 \\ 2,4 & -2,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = P^{-1}AP$$

Es decir:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Observaciones

Nuestro problema original requería que P^tAP sea una matriz diagonal, donde la matriz A es una matriz simétrica.

En primer lugar afirmaremos, sin presentar demostración alguna para abreviar, lo siguiente:

Si la matriz A es una matriz simétrica, el polinomio característico sólo tiene raíces reales

En segundo lugar hemos logrado que $P^{-1}AP$ sea matriz diagonal, pero nosotros necesitamos, en el problema de la Geometría Analítica que resolvemos, que P^tAP sea una matriz diagonal. En consecuencia, deberá cumplirse: $P^{-1} = P$.

Es decir, la matriz P que nosotros necesitamos debe ser una matriz ortogonal (así se denominó a la matriz que cumple: $P^{-1} = P$).

Una matriz P es ortogonal cuando cumple tres condiciones:

1. El módulo de su determinante es la unidad.

$$\text{En efecto: } |P^t| = |P^{-1}| \implies |P| = \frac{1}{|P|} \implies |P|^2 = 1 \implies |P| = \pm 1$$

2. Los autovectores que corresponden a diferentes autovalores, son ortogonales. Así tenemos:

$$\begin{array}{lll} AX_i = \lambda_i X_i & \wedge & AX_j = \lambda_j X_j \\ X_j^t AX_i = \lambda_i X_j^t X_i & \wedge & X_i^t AX_j = \lambda_j X_i^t X_j \end{array}$$

Como los primeros miembros son iguales, se debe cumplir:

$$\lambda_i X_j^t X_i = \lambda_j X_i^t X_j$$

Además, $X_j^t X_i$ y $X_i^t X_j$ son números que deben ser nulos puesto que $\lambda_i \neq \lambda_j$.

3. El módulo de cada columna es la unidad.

Ejemplo 2

Diagonalizar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 3 \end{array} \right.$$

Autovectores:

$$\lambda = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}t$$

$$y_1 = t$$

$$\lambda = 3$$

$$\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = s$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}s$$

Como estas columnas deben tener módulo 1, buscamos los valores de t y s que cumplan tal condición:

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)^2 + t^2 = 1$$

$$t = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$s^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right)^2 = 1$$

$$s = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Tomando los valores positivos, tenemos:

$$\lambda_1 = 0 \quad X_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \quad X_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$$

Como se observa, los autovalores son linealmente independientes, cada uno de módulo 1 y son ortogonales.

La matriz ortogonal P es:

$$P = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$$

y su determinante es $|P| = -1$.

Finalmente, como es fácil comprobar:

$$P^t A P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Debe observarse que la matriz diagonal tiene en la diagonal los autovalores. Ahora tenemos un procedimiento matricial que permite eliminar el término rectangular de una ecuación general de segundo grado en dos variables.

Ejemplo 3

Eliminar el término rectangular de la ecuación:

$$4x^2 + 24xy - 3y^2 - 312 = 0$$

La ecuación expresada en términos matriciales, es:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 312 = 0$$

Es decir:

$$X^t A X - 312 = 0$$

El polinomio característico de la matriz A , es:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 12 \\ 12 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 156 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 13 \\ \lambda_2 = -12 \end{array} \right.$$

$$\lambda = 13 \quad \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Rightarrow X = t \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \Rightarrow X_u = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -12 \quad \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Rightarrow X = t \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \Rightarrow X_v = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz que diagonaliza la matriz **A**, es:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

y la matriz **A** diagonalizada debe ser:

$$\begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Reemplazando $X = PX'$, donde $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, se tiene:

$$(PX')^t A (PX') - 312 = 0$$

Operando convenientemente, se tiene:

$$X'^t (P^t A P) X' - 312 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 312 = 0$$

Efectuando los productos matriciales, se obtiene:

$$13x'^2 - 12y'^2 - 312 = 0$$

$$\frac{x'^2}{24} - \frac{y'^2}{26} = 1$$

La ecuación es una hipérbola.

Nota: Debe observarse que la matriz ortogonal P es de la forma:

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

En consecuencia, el ángulo de rotación es el que verifica:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{4}{5} \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Eliminar el término cuadrático de la ecuación:

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 16x + 20 = 0$$

La ecuación matricial es:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 20 = 0$$

$$X^t A X + L X + 20 = 0$$

El polinomio característico de la matriz A , es:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 2 \end{array} \right.$$

$$\lambda = 4 \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \Rightarrow \quad X = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \Rightarrow \quad X_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\lambda=2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \Rightarrow \quad X = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \Rightarrow \quad X_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz que diagonaliza la matriz **A**, es:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La sustitución $X = PX'$, donde $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, se tiene:

$$(PX')^t A (PX') + LX + 20 = 0$$

$$X'^t (P^t A P) X' + L P X' + 20 = 0$$

Al reemplazar y efectuar, se obtiene finalmente:

$$2x'^2 + y'^2 - 4\sqrt{2}x' - 4\sqrt{2}y' + 10 = 0,$$

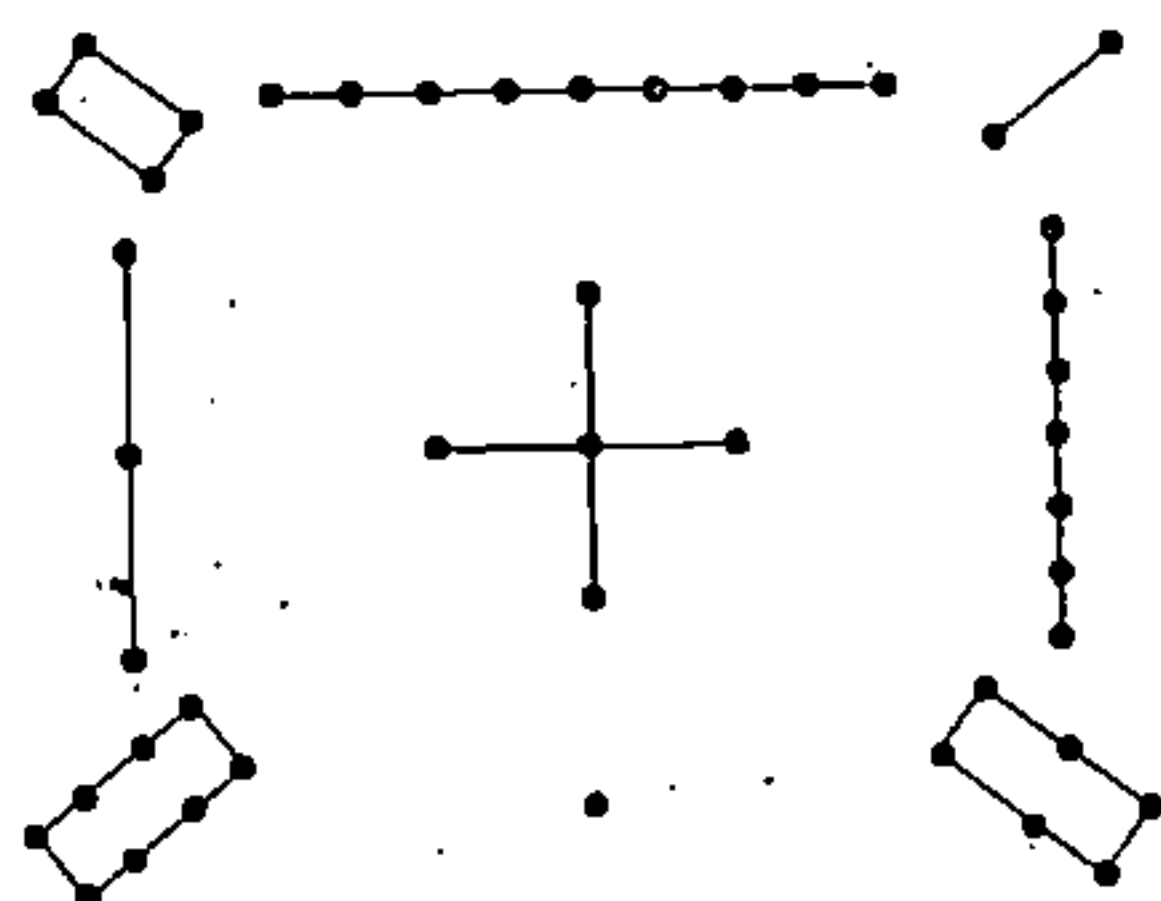
expresión sin término rectangular.

VII Métodos chinos

Se presenta en este último apéndice algunos comentarios sobre la matemática china que tienen que ver con las matrices y las ecuaciones.

Entre las obras atribuidas a Confucio se encuentra una con el título *I Qing*, traducido como el Libro de las Permutaciones. En este texto, se encuentra una figura, llamada "lo shu", que muestra mediante cuerdas con nudos el cuadrado mágico siguiente:

Este cuadrado mágico corresponde a la matriz:



$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Según la leyenda, un emperador chino encontró este diagrama en la caparazón de una tortuga hacia el año 2200 antes de Cristo.

En el texto *Zhui Suan shu* o *El arte matemático* en nueve secciones, de fecha desconocida, anterior al siglo II antes de Cristo, se encuentran problemas sobre agricultura, distribución de bienes, impuestos, cálculo de longitudes y áreas, sistemas de ecuaciones, ecuaciones cuadráticas y propiedades del triángulo rectángulo.

Presentamos a continuación, mediante un ejemplo, el procedimiento descrito para la solución de un sistema de tres ecuaciones lineales:

Resolver el sistema:

$$2x + 2y + z = 9$$

$$2x + y - z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

El procedimiento descrito en el libro de *Las nueve secciones*, consiste en escribir el sistema en forma matricial, siguiendo las reglas de la escritura china, es decir de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

El primer paso consiste en disminuir la segunda columna en el doble de la primera y la tercera columna en la primera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & -11 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

Debe observarse que se ha transformado la matriz en una matriz escalonada invertida, puesto que los ceros están arriba. Lo importante es que el sistema se ha convertido en el siguiente:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ -y - 3z &= -11 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

De la última ecuación se tiene el valor de la tercera incógnita; sustituyendo en la segunda ecuación, resulta $y = 2$; finalmente, al sustituir en la primera ecuación, se obtiene para $x = 1$. El método empleado es similar al de Gauss-Jordan presentado en el texto, pero haciendo uso de la escritura china.

Para comprender lo que hemos querido con este apéndice, vamos a hacer una breve sinopsis del Álgebra desde sus inicios hasta la solución de los sistemas de ecuaciones simultáneas.

Aparentemente el Álgebra empieza en Egipto. Así, el papiro Ahmes (S. XVII antes de Cristo) incluye progresiones aritméticas y geométricas, y también problemas diversos enunciados como el siguiente: "(hallar) una cantidad cuya séptima parte agregada a ella se convierta en 19". Este enunciado se traduciría algebraicamente como:

$$\frac{x}{7} + x = 19,$$

una ecuación lineal en una variable. Sin embargo su solución se hacía por falsa suposición simple o doble.

En Grecia, el tratamiento del Álgebra era geométrico, como se encuentra en los escritos de Platón, Euclides, Menecmo y otros, quienes buscaban la solución haciendo uso de la regla y el compás. Fue Diofanto de Alejandría, que vivió probablemente en el siglo III, el que propuso problemas con enunciados como el siguiente: "Dados dos números, buscar un tercero tal que los tres productos de cada uno de ellos por la suma de los otros dos, estén en progresión aritmética". Una solución al problema en símbolos actuales es:

$2a(b + x) = (a + b)x + (a + x)b$, de donde $x = \frac{ab}{2b - a}$. El problema lo resuelve Diofanto, para $a = 5$ y $b = 3$, por procedimientos geométricos hallando el cuarto armónico en una terna dada.

Diofanto resuelve también sistemas de ecuaciones, llamando a las incógnitas "el primer número", "el segundo número", etc⁸. Conoce las reglas operatorias, utilizando un álgebra sincopada, intermedia entre el álgebra retórica (sin símbolos) y el álgebra simbólica actual. Conoce Diofanto las reglas de los signos en la multiplicación, pero clasifica las raíces negativas (y a las irracionales e imaginarias) como imposibles.

En Europa los problemas se resolvían expresando las variables en términos de una misma cantidad, de manera que se logre una ecuación en términos de esa cantidad, evitando así el formular un sistema de ecuaciones. Fue Buteo, en el año 1559, el que introduce el uso de diferentes letras para diferentes incógnitas, y resolvía los sistemas por adición y sustracción, exactamente como lo hacemos hoy en día. Buteo utilizó las primeras letras mayúsculas como incógnitas (A, B, C,...). En el año 1590, Vieta utiliza las primeras letras minúsculas (a, b, c,...). Finalmente Descartes, en el año 1637, abandona el uso de las primeras letras como incógnitas, sustituyéndolas por las últimas letras (x, y, z,...), costumbre que permanece desde entonces.

Debe indicarse que los procedimientos matriciales descritos en el texto para resolver sistemas de ecuaciones (Gauss, Gauss-Jordan), no se utilizan como procedimientos usuales hasta los años 1950. En consecuencia, los procedimientos chinos para resolver en forma sistemática sistemas de ecuaciones lineales, pueden considerarse que se adelantaron no menos de 2000 años a los matemáticos occidentales.

8

En este aspecto, los hindúes escribían sus sistemas nombrando las incógnitas con los nombres de los colores.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Capítulo 1 (páginas 12-13)

1. $A_{3 \times 2}$, $B_{1 \times 3}$, $C_{3 \times 3}$, $D_{3 \times 4}$ y $E_{5 \times 1}$.
2. A y B no son matrices. La primera, es un ordenamiento de números, pero no tiene ningún símbolo matricial. La segunda es aparentemente una matriz de orden 3×3 , pero le faltarían 5 elementos o entradas, por lo que no es una matriz.
3. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1,5 & 2,5 & 3,5 \\ 0,5 & 1,5 & 2,5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad 2 \quad 3]$.
4. $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$
5. i) $x = 1$; ii) $x = 0,5$; iii) $x = \pm 4$
6. $M = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 7 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} -13 & -10 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$. Se sugiere determinar elemento a elemento, haciendo los cálculos independientemente para cada m_{ij} y cada n_{ij} .
7. Son inversos aditivos los elementos a_{23} y b_{23} .
8. La matriz es $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$
9. La matriz es $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$
10. a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- d) Siempre $a_{ii} = 1 \wedge a_{ij} = a_{ji} \quad \forall \quad i, j$.
- e) El primer grafo es un pentágono, cóncavo o convexo, cruzado o no. En el segundo grafo hay cuatro puntos, con una sola unión entre C y D.

Capítulo 2 (páginas 26-27)

1. $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $C + D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 11 & -7 \end{bmatrix}$ y $E + F = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. $V = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,05 & 0,05 & 0,13 \\ 0,15 & 0,29 & 0,05 & 0,10 \end{bmatrix}$ 3. 0

4. (a) $\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 13 & 6 & 11 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -3 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 13 \end{bmatrix}$

5. $X = \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 7. $S = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 10 \\ 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 9192,20 & 11210 \\ 11658,40 & 13452 \end{bmatrix}$ 9. $P = \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 10 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

10. Las soluciones son -2 , 2 , 1 y -1 .

11. La combinación lineal es la matriz $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 27 \\ 12 & 22 & -5 \end{bmatrix}$

12. Se demuestra que en la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, b y $c \in \mathbb{R}$, y $d = -a$, donde $a \in \mathbb{R}$, por

lo tanto depende solamente de tres parámetros.

Los coeficientes de la combinación lineal son: 3 , -2 y -1 .

Capítulo 3 (páginas 57-62)

1. a) $[0]$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 10 & -6 & 0 \\ 3 & 15 & -9 & 0 \\ 4 & 20 & -12 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{bmatrix}$ d) $[8]$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 8 & 16 & 19 & -6 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 20 & -2 & 6 \\ 15 & 13 & 19 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. $ABC = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ 3. Todos los productos son ejecutables, siendo iguales
: (a) = (b), (c) = (d) y (e) = (f).

a) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 18 & 15 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -14 & -2 \end{bmatrix}$

4. $ABCD = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

5. Con el esquema vertical ($A(B(CD))$) se evita el trabajar con fracciones. La respuesta es: $\begin{bmatrix} 26 & 26 \\ 26 & 26 \end{bmatrix}$

6. La matriz **B** es de orden $n \times m$, (observe que al decir el enunciado que el producto está definido, se está indicando que es posible efectuar los productos **AB** y **BA**).

7. b) En general las matrices pueden ser de las siguientes dimensiones:

$$A_{m \times n}, B_{m \times n}, C_{n \times p} \text{ y } D_{n \times p}.$$

8. Demostraciones. (Tenga en cuenta en cada caso la propiedad distributiva).

9. i)
$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= 3 \\ x + 5y - z &= 0 \\ 4x + 3y + 2z &= 1 \end{aligned}$$
 ii)
$$\begin{aligned} 3z &= 9 \\ 9x - 5y &= -1 \\ x + 2y + 4z &= 17 \end{aligned}$$

10.
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$
 11. $A \# B = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

12. Deberá comprobarse: $AB = BA = C$, $BC = CB = A$ y $AC = CA = B$

13. i) Las matrices deben ser cuadradas y permutables ($AB = BA$)

- ii) Las matrices deben ser cuadradas y antipermutables ($AB = -BA$)

14. Demostraciones.

15. Conmutan las matrices de la forma
$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

donde a, b, c y $d \in \mathbb{R}$. (es una familia de matrices).

16. a) $\begin{bmatrix} 14 & 12 & 9 \\ 9 & 8 & 6 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 175 & 275 \\ 275 & 450 \end{bmatrix}$ 17. Demostraciones por inducción.
18. Demostración. 19. La suma de los elementos es 23.
20. Deberá comprobarse, en todos los casos, que: $A^2 = A$.
21. La traza es la suma de las entradas 1 1 y 2 2 de la matriz.
22. Bastará verificar: $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = BA = [0]$.
23. Demostración. 24. Son matrices periódicas, de periodo 3.
25. Son periódicas y sus periodos son 3 y 7, respectivamente.
26. Como la primera potencia nula de la matriz A es A^6 , el orden de nulipotencia es 6.
27. Como la matriz A es nulipotente de índice 3, $A^{12} = [0]$.
28. La matriz A es nulipotente de índice 4, por lo tanto:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

29. En todos los casos se cumple: $AB = BA = [0]$.
30. Demostración.
31. No siempre. Será posible sólo cuando el número de columnas de la matriz B es igual al número de filas de la matriz C .
32. a) C y D no son matrices de probabilidad. En el primer caso, tiene una entrada negativa; en el segundo, la tercera fila no suma 1. b) y c) comprobaciones.

Capítulo 4 (páginas 94 – 102)

1. $w = -9$, $x = 1$, $y = 0$, $z = -5$ ✓

2. $a = 0,5$

3. Todos los productos deben ser $[0]$

4. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad 6. \quad \begin{bmatrix} 4 & -4 & 21 \\ 6 & -6 & 36 \\ 8 & -8 & 45 \end{bmatrix}$$

$$7. \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -5 \\ -3 & -5 & 26 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$8. \quad \text{tr} A^2 B = 428, \text{tr} A^3 = 911 \text{ y } \text{tr} B^4 = 2401.$$

$$9. \quad 30 \quad 10. \quad = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -3 \\ 7 & 14 & 5 \\ -3 & 5 & 18 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$11. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \checkmark \quad 12. \quad X = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -10 & 4 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$13. \quad AA^t \text{ es una matriz simétrica. } (A^t A)^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$14. \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -5 \\ -3 & -5 & 26 \end{bmatrix}$$

$$15. \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$16. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$17. \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

18. Para cada matriz A existen varias posibles soluciones para la matriz triangular T (en realidad 2^n soluciones, donde n es el orden de la matriz A). Se presenta para cada matriz A la solución T_A , con cada entrada con doble signo. Deberá tomarse, para cada columna, uno de los dos signos.

$$T_A = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ \pm 4 & \pm 2 \end{bmatrix} \quad T_B = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ \mp 2 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

$$T_C = \begin{bmatrix} \pm 4 & 0 & 0 \\ \mp 1 & \pm 2 & 0 \\ \pm 2 & \mp 3 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad T_D = \begin{bmatrix} \pm 3 & 0 & 0 \\ \pm 5 & \pm 2 & 0 \\ \pm 8 & \mp 2 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

$$T_E = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mp 1 & \pm 4 & 0 & 0 \\ \pm 2 & \pm 3 & \mp 1 & 0 \\ \pm 4 & \pm 8 & \pm 6 & \pm 3 \end{bmatrix}$$

19. $X = \begin{bmatrix} 1,5 & 2,0 & 0,5 \\ 7,6 & 0,4 & 9,8 \\ 5,0 & -3,0 & -4,0 \end{bmatrix}$

20. Demostración

21. A^3 es la matriz identidad.

22. Todas las matrices son involutivas: A , I , I y D .

23. La traza de la matriz M es 4.

24. Demostración

25. Se deberá comprobar: $A^2 = B^2 = C^2 = I$ y $AB = BA = C$, $AC = CA = B$ y $BC = CB = A$

26. Los valores de α y β son los pares $(\alpha; \beta)$ del conjunto:

$$\{(1; 0), (-1, 0), (\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}), (-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})\}$$

27. $\begin{bmatrix} -8 & -16 & 0 \\ 6 & 12 & 16 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

28. $k = \pm \frac{i}{3}$

29. Definiciones.

31. $Q = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Como $A^6 = I$, $A^7 = A$, la matriz A es una matriz periódica.

32. Demostración.

33. Se obtiene la matriz nula, por ello la matriz A es un cero de la función matricial $f_{(A)} = A^2 - 4A - 5I$.

34. $7I$

35. $[O]$

36. $4A + 5I$

37. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, debe cumplirse: $a + d = 0$, $a^2 + bc + 1 = 0$

38. Son varias las matrices que satisfacen cada ejercicio. (Todas ellas con números reales)

39. Demostración.

Capítulo 5 (Página 118)

1. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 18 \end{bmatrix}$.

Las matrices **B**, **D** y **F**, no tienen inversa, son singulares.

2. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$ $D^{-1} = \text{Diag} [1; 1/2; 1/3; 1/4]$

Las matrices **B** y **E** son singulares (Tienen un elemento nulo en la diagonal principal).

3. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$, $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{bmatrix}$. Las matrices

B y **E**, son singulares (tienen un elemento nulo en la diagonal principal)4. **A** es singular por ser la primera columna, la suma de las otras dos (Es decir, la primera columna es combinación lineal de las otras dos). **B** es singular, por tener una línea de ceros.5. Bastará probar que: $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{k-1}$, puesto que las potencias siguientes son nulas. La demostración se logra multiplicando ambos miembros por $I - A$.

6. $\text{tr}z Q^{-1} = 0,24$

7. a) Demostración. b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4})$
- c) $X = \begin{bmatrix} -1 & -9 & -44 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 9. Demostración. 10. Demostración. 11. Demostraciones.
12. a) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}$
13. $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
14. $X = \begin{bmatrix} 1+a & b \\ -2a & 1-2b \end{bmatrix}$ a y $b \in \mathbb{R}$. No existe solución única para la matriz X por ser la matriz premultiplicadora una singular.
15. Comprobaciones. 16. La proposición es falsa. Un contraejemplo lo comprueba.
17. Demostraciones.
18. Proponga dos matrices A y B regulares, y verifique que la igualdad es válida.

Capítulo 6 (páginas 151 – 153)

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 11 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 0 & 5 & -40 \\ 1 & 1 & 1 & -40 \\ 5 & 3 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(Recuerde, que cuando se trabaja en forma manuscrita es mejor colocar una raya vertical en lugar del espacio en blanco que separa la matriz A de la matriz B . Así se minimiza el riesgo de cometer errores involuntarios al utilizar métodos matriciales en la solución de sistemas de ecuaciones lineales).

2. Los sistemas son equivalentes por tener la misma solución:
a) $x = 1$, $y = -1$; b) $x = y = 1$, $z = 2$
3. $a = 2$ y $b = 1$ (Luego de resolver cada sistema, bastará igualar las incógnitas para formar otro sistema que permite hallar a y b)
4. Nota: Todas las respuestas a los sistemas se dan como: $(x; y; z)$ ó $(x; y)$.
a) $(1; -1; 2)$ b) $(2; -3; 0)$ c) $(3; -1; -1)$ d) $(10; 20; -10)$ e) $(1; 0; 1)$ f) $(1; 0; -1)$ g) $(-3; 0; 1)$ h) $(-14,25; -22,50; 2,25)$

5. Nota: Todas las respuestas a los sistemas se dan como: (x; y; z).
a) (0,5; 1; 1) b) No admite solución. c) (0,5; -0,5; 0,5) d) (2; 1; 1)
6. Nota: Todas las respuestas a los sistemas se dan como: (x; y).
a) (1; 1) b) (-4; 2) c) (-3; 2) d) (-5; 9) e) (0; 0) f) No admite solución
g) (-3; -9) h) (-2; 1).
7. $a = 1$ y $b = 4$ (Se resuelve el sistema formado por las tres últimas ecuaciones y al reemplazar en las primeras, se hallan a y b)
8. $a = 2$, $b = 4$ y $c = 6$ (Se resuelve el sistema formado por las tres primeras ecuaciones, y al reemplazar en las tres siguientes, se forma un nuevo sistema de donde se halla la respuesta al ejercicio)
9. Los rangos de las matrices son: a) 3 b) 1 c) 2 d) 3 e) 2 f) 4 g) 2 h) 1 i) 2 j) 2
10. Los rangos de las matrices son: a) 3 b) 1 c) 2 d) 3 e) 2 f) 4 g) 2 h) 1 i) 2 j) 2

Capítulo 7 (página 174 – 176)

1. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
2. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

3. Se les llama matrices elementales porque realizan sobre una matriz una operación elemental, sea por premultiplicación o por posmultiplicación. Se obtienen matrices elementales aplicando una operación elemental sobre una matriz identidad.
4. Son matrices elementales a, d y g. La primera de ellas, si actúa como premultiplicadora, multiplica por 2 la segunda fila. La segunda d, de actuar como premultiplicadora, agrega a la segunda fila tres veces la primera. La tercera, g, invierte las primeras dos filas. De actuar estas matrices como postmultiplicadoras, afectarían las columnas.
5. Las inversas son:

a) $\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. La respuesta que se proporciona es una de las posibles descomposiciones:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{b)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ por} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{c)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

d y e, son ejercicios que presentan matrices singulares que no pueden ser descompuestas como producto de matrices elementales.

7. Las inversas de los ejercicios a, b y c.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} & \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{13}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & -0,25 & 0,25 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{8. a)} & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{25}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
 \text{e)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{f)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 \text{b)} \quad & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{11}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{11} \end{bmatrix} \\
 \text{c)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{d)} \quad & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{25}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Capítulo 8 (página 200)

1.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{c)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{es involutiva}) \\
 \text{d)} \quad & \begin{bmatrix} 4 & -7 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e)} \quad \begin{bmatrix} 9 & -8 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -61 & 54 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{f)} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 11 \end{bmatrix} \\
 \text{g)} \quad & \begin{bmatrix} 43 & -5 & -25 \\ 10 & -1 & -6 \\ -7 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{h)} \quad \begin{bmatrix} 7 & 14 & 4 & -6 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & -3 \\ -7 & -16 & -5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{i)} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,25 \end{bmatrix} \quad \text{c)} \quad \begin{bmatrix} 6,5 & -2,5 & -1,5 \\ -2,5 & 1,5 & 0,5 \\ -1,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$d) \begin{bmatrix} \frac{22}{3} & -9 & -4 \\ -\frac{5}{3} & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{20}{3} & -\frac{7}{3} & 3 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad a) \begin{bmatrix} -138 & -93 & 437 \\ -33 & -22 & 104 \\ 22 & 15 & -70 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 6 & 4 & -19 \\ -11 & -4 & 28 \\ 5 & 1 & -11 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} -93 & 11 & 54 \\ 44 & -5 & -26 \\ 16 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 6 & -11 & 5 \\ 4 & -4 & 1 \\ -19 & 28 & -11 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} -111 & 35 & 28 \\ -26 & 9 & 6 \\ 18 & -5 & -5 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 298 & 201 & -944 \\ -143 & -96 & 452 \\ -50 & -34 & 159 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad a) \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 9 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 55 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5. \quad a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 0 & -2 & -1 \\ -0,5 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2,5 & -2 \\ 0 & 0 & -1,5 & 1 \\ -2,5 & 1,5 & 0 & -0,5 \\ 2 & -1 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 0 & -0,6 & -0,2 & -0,6 \\ 0,6 & 0 & -1 & 0,4 \\ 0,2 & 1 & 0 & 0,8 \\ 0,6 & -0,4 & -0,8 & 0 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0,1 & -0,5 \\ 0,1 & 0 & -0,1 & 0,1 \\ -0,1 & 0,1 & 0 & -0,1 \\ 0,5 & -0,1 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. b) $\begin{bmatrix} 1,50 & 2 & -0,50 \\ 0,50 & 0,20 & -0,10 \\ -0,25 & -0,30 & 0,15 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2,50 & -0,40 & 1,90 \\ -0,50 & 0 & -0,50 \\ -1,25 & 0,30 & -1,05 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} -6 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & -5 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 0 & -6 & 5 & 0 \\ -6 & 156 & -125 & 5 \\ 5 & -125 & 100 & -4 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 0,025 & 0,025 & 0,275 & -0,225 \\ 0,025 & 0,275 & -0,225 & 0,025 \\ 0,275 & -0,225 & 0,025 & 0,025 \\ -0,225 & 0,025 & 0,025 & 0,275 \end{bmatrix}$

Las matrices de los apartados: a), d), e) y g) son singulares.

Capítulo 9 (páginas 242-249)

1. a) -20 b) 24 c) 1 d) $\sin(\alpha - \beta)$ e) $\sec^2 \alpha$ f) -1 e) 0 h) -1
2. a) 0 b) 4 c) 48 d) -1 e) -22 f) 3
3. a) Figuran con signos + y -, respectivamente.
 b) $m = 3$ y $n = 4$
 c) Los términos son seis, donde p, q y r deben ser 2, 3 y 4:

$$\begin{array}{ll} a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{55} & a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55} \\ a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}a_{55} & a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}a_{55} \\ a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}a_{55} & a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}a_{55} \end{array}$$
- d) No interesa el orden del determinante, su signo será siempre positivo.
- e) El signo es $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$
- f) Se demuestra que los 32 términos del desarrollo son nulos, por tener al menos un factor cero.
- g) En ambos casos resulta $n!$, porque el único término no nulo de ambos desarrollos es el producto de los elementos de sus diagonales.
4. a) -6 b) 160 c) -38 d) -32 e) -84 f) -30 g) 16
5. a) $-4(a + b + c - 5d)$ b) $2a - b - c - d$ c) $3a - b + 2c + d$
6. a) $x = 3$ b) $x = -\frac{12}{13}$ c) $x = \{a; b\}$
7. Su valor es cero. (Si su valor es α , al trasponerla su valor es $-\alpha$, pero al no cambiar de forma al factorizar los signos memos, se tiene que cumplir $\alpha = -\alpha$).
8. $|B| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} |A|$
9. Desdoblar en seis determinantes por la propiedad 7, cuatro de los cuales son nulos.
10. Restar de cada columna la primera, y se tendrá luego 2 columnas iguales.

11. Demostraciones. 12. Demostraciones.

13. El determinante es igual al determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \text{ expresión que no depende de las letras griegas.}$$

14. Demostraciones.

15. Demostración.

16. Los determinantes de los ejercicios a) y b) son nulos por tener dos filas proporcionales. El determinante c) es nulo al obtenerse filas iguales al disminuir las filas 3^{ra} y 4^{ta} en la 1^{ra} y 2^{da}, respectivamente.

17. a) $x(x-1)(x^3+x^2+x-1)$
 b) $a^2b^2(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)(b+a)(b-a)$
 c) $-2x(x-1)(x-2)(x-3)$

18. Demostración.

19. a) $-n! \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ b) $\frac{n+1}{1-x} + \frac{x^{n+1}-1}{(1-x)^2}$
 c) $a_0x_1x_2\cdots x_n + a_1y_1x_2\cdots x_n + a_2y_1y_2x_3\cdots x_n + \cdots + a_ny_1y_2y_3\cdots y_n$

20. a) $\sum x^4 - 2\sum x^2y^2$ b) $\sum ab(b-a)$

21. a) $2 \sin(c-a)\sin(c-b)\sin(a-b)$ b) $\cos 5x$ c) $\operatorname{cosec} x \sin 5x$

22. $(a^2 - b^2)^n$

Capítulo 10 (páginas 261-262)

1. Los menores son: $m_{12} = -16$, $m_{22} = 8$ y $m_{32} = -8$.

Los adjuntos son: $a_{12} = 16$, $a_{22} = 8$ y $a_{32} = 8$.

2. La relación entre las matrices **Adj A** y **Cof A** es que una es la transpuesta de la otra, es decir: **Adj A** = (**Cof A**)^t.

$$3. \quad \mathbf{Cof A} = \begin{bmatrix} -18 & 16 & 4 \\ -15 & 8 & -2 \\ -19 & 8 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Cof B} = \begin{bmatrix} -13 & -18 & 25 & 3 \\ -47 & -54 & 59 & 9 \\ 24 & 24 & -24 & 0 \\ 5 & 18 & -17 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Adj A} = (\mathbf{Cof A})^t \quad \mathbf{Adj B} = (\mathbf{Cof B})^t$$

4. a) $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -21 & -7 & 14 \\ -7 & -1 & 3 \\ 14 & 3 & -9 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -13 & -47 & 24 & 5 \\ -18 & -54 & 24 & 18 \\ 25 & 59 & -24 & -17 \\ 3 & 9 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 126 & -13 & 32 & 20 \\ -120 & 10 & -20 & -20 \\ -102 & -9 & -24 & 0 \\ -36 & -12 & -12 & 0 \end{bmatrix}$

5. a) $\begin{bmatrix} -12 & -1 & 1 \\ 4 & 17 & -11 \\ -2 & -13 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 16 & 23 & -14 \\ 0 & -10 & 20 \\ 48 & -41 & 18 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 44 & 21 & -2 \\ 6 & 2 & -2 \\ -126 & -42 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & -32 & 0 & 0 \\ -2 & 40 & -4 & -6 \\ 18 & -360 & 36 & 22 \\ -12 & 96 & -8 & -4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 28 & -30 & -33 & 36 \\ -28 & 6 & 15 & -24 \\ -28 & -36 & 36 & -24 \\ -28 & 24 & 18 & -12 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} -10 & 30 & -15 & -6 \\ 0 & -30 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} -12 & -32 & 12 & 16 \\ -24 & -12 & 8 & 12 \\ 12 & 28 & -12 & -12 \\ 20 & 12 & -4 & -12 \end{bmatrix}$

6. i) $[-1 \ 0 \ 0]$ ii) $[-14]$

7. Demostración

8. a) $\frac{1}{32} \begin{bmatrix} -18 & -15 & -19 \\ 16 & 8 & 8 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ b) $-\frac{1}{13} \begin{bmatrix} -24 & 68 & -25 \\ 17 & -46 & 15 \\ -4 & 7 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\frac{1}{195} \begin{bmatrix} 3 & -18 & 11 \\ 33 & -3 & -9 \\ -42 & 57 & 41 \end{bmatrix}$ d) $-\frac{1}{60} \begin{bmatrix} 126 & -13 & 32 & 20 \\ -120 & 10 & -20 & -20 \\ -102 & -9 & -24 & 0 \\ -36 & -12 & -12 & 0 \end{bmatrix}$

9. Verificación directa con los resultados del ejercicio 8.

Capítulo 11 (páginas 297-299)

1. a) Solución única b) Cualquier número es solución c) No admite ninguna solución d) Solución única e) No admite ninguna solución f) y g) Admite infinitas soluciones dependientes de un parámetro h) Cualquier par es solución i) Admite infinitas soluciones dependientes de dos parámetros.
2. a) Es el conjunto de todas las n-uplas que satisfacen a todas las ecuaciones.
b) Se llama solución trivial a la solución $(0; 0; 0; \dots; 0)$, es decir la solución evidente de un sistema de ecuaciones homogéneas: $AX = [0]$.
3. Resolver una ecuación matricialmente significa utilizar los métodos de Gauss-Jordan o la inversión de matrices para resolver un sistema, a fin de determinar simultáneamente todas las raíces. Algunos autores consideran la solución de un sistema de ecuaciones por la regla de Cramer como un método matricial, pero por utilizar exclusivamente determinantes y por determinar una a una las raíces, es definitivamente un sistema algebraico.
4. a) $x = 7; y = 5$ b) $x = y = 1$ c) $x = 2; y = 1$ d) $x = -1; y = 1$
e) $x = 2; y = -0,1$ f) $x = 0,375; y = 0,125$
5. Las respuestas se dan como ternas ordenadas $(x; y; z)$: a) $(2; -1; 3)$
b) $(1; 2; -1)$ c) $(1; 0; 2)$ d) $(0,1; 0,2; 0,3)$ e) $(1; -2; 3)$ f) $(10; 20; 30)$
g) $(0; 1,1; 2,1)$ h) $(0,1; 0,2; 0)$.
6. a) $x = y = 0,50; a \neq 0, b \neq 0$
b) $x = y = z = \frac{\sum ab - \sum a^2}{3abc - \sum a^3}, 3abc - \sum a^3 \neq 0$
c) $x = \frac{1}{abc}, y = \frac{a + b + c}{abc}, z = \frac{ab + bc + ca}{abc}, abc \neq 0$
d) $x = \frac{1}{(a-b)(a-c)}, y = \frac{1}{(b-a)(b-c)}, z = \frac{1}{(c-a)(c-b)}$
7. Resolviendo por Cramer el segundo sistema, la condición es: $ab' - a'b \neq 0$
8. Todas las respuestas se dan como n-uplas ordenadas; a) $(3; 1; 1)$ b) $(3; -2; 3)$ c) $(3; 4; 5)$ d) $(-1; -1; 0; 1)$ e) $(-2; 2; -3; 3)$ f) $(0; 0; 0; 0)$ g) $(1; -1; 0; 2)$
9. $x = a + b + c, y = b + c + d, z = c + d + e, u = d + e + a,$
 $v = e + a + b.$

Capítulo 12 (páginas 319-322)

1. a) Sistema consistente indeterminado:
 $(x; y; z; u) = (0; 0; 0; 1) + (1; 0; 2; 0)u + (0; 1; -1; 0)v$
donde: $u, v \in \mathbb{R}$.
b) Inconsistente.
c) Sistema consistente determinado: $(x; y; z) = (1; 2; -2)$
d) Inconsistente. e) inconsistente.

f) Consistente indeterminado.

$$(x; y; z; u; v) = (0; -1; 0; -1; 0) + (-0,5; -0,5; 0; -0,5; 1)t$$

donde: $t \in \mathbb{R}$.

2. a) El sistema es consistente determinado: $x = y = z = u = 0$
 b) El sistema es consistente determinado: $x = y = z = u = 0$
 c) El sistema es consistente indeterminado:
 $x = 3t, y = 4t, z = 5t, u = t, t \in \mathbb{R}$.
3. $C = 52, x = 12, y = 8$
4. Si $m = 0, x = y = 1$. Si $m = -1, x = 0,5, y = 1,5$
5. La solución común es: $x = -y = z = 1$
6. Solución general: $x = -y - 0,5t, z = -u = -t, t \in \mathbb{R}$.
 Solución particular: $t = 2, t \in \mathbb{R}$.
7. $k = 1, x = t, y = 2t, z = 3t, t \in \mathbb{R}$.
8. $m = 3, x = 2, y = -1$
9. Cuando $m = -5, x = -1, y = -4$. Cuando $m = 1, x = 2, y = -1$.
10. $x = 0,5(m + 4), y = -2(2m + 3), z = 0,5(11m + 14), m \in \mathbb{R}; m = 12$.
11. $k = -4, x = 0, y = z = t, t \in \mathbb{R}$.
12. Si $m \neq 3$, el sistema es consistente indeterminado:
 $x = t, y = t, z = 1 - 4t, t \in \mathbb{R}$.
 Si $m \neq 3 \wedge m \neq -8$, el sistema es consistente determinado:

$$x = y = \frac{m + 16}{8(m + 8)} \quad z = \frac{1}{m + 8}$$
13. Si $m = 1$, el sistema es consistente indeterminado:
 $x = 1 - 2t, y = t, t \in \mathbb{R}$.
 Si $m = 3$, el sistema es inconsistente.
 Si $m \neq 1 \wedge m \neq 3$, el sistema es consistente determinado:

$$x = \frac{3(m - 1)}{m - 3} \quad y = \frac{2m^2 - 11m + 7}{m - 3}$$
14. Si $m = 2$, el sistema es consistente indeterminado

$$x = \frac{3 - 4t}{11}, \quad y = \frac{-1 + 5t}{11}, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

 Si $m \neq 2 \wedge m \neq 5$, el sistema es consistente determinado:

$$x = \frac{2m - 5}{5 - m}, \quad y = \frac{m}{5 - m}, \quad z = \frac{5}{5 - m}, \quad m \in \mathbb{R}$$
15. Si $a \neq -1$ y $b \neq 0$, el sistema es consistente indeterminado:
 $x = y = z = t$
 Si $a^3 + 1 \neq 0$, el sistema es consistente determinado:

$$x = y = z = \frac{b}{1 + a}$$

16. Si $\lambda = 1$, el sistema es consistente indeterminado:

$$x = m \quad y = n \quad z = -m - n$$

Si $\lambda \neq 1$, el sistema es consistente determinado, su única solución es la trivial.

17. $x = -5,5 \quad y = 9 \quad z = -3,5$

$$18. \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1,5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s.$$

El máximo de valores nulos es 2(hay dos parámetros).

19. Si $m = 1$, el sistema es consistente indeterminado.

$$(x; y; z) = (1; 0; 0) + (-1; 1; 0)u + (-1; 0; 1)v, \text{ donde: } u, v \in \mathbb{R}.$$

Si $m = -2$, el sistema es inconsistente.

Si $m \neq 1 \wedge m \neq -2$, el sistema es consistente determinado:

$$(x; y; z) = (-(m+2)^{-2}; (m+2)^{-2}; (m+1)^2(m+2)^{-1})$$

20. Si $a = b = c$, el sistema es consistente indeterminado, y la solución depende de dos parámetros.

Si entre a, b y c , hay dos iguales, el sistema es consistente indeterminado, y la solución tiene un parámetro.

Si a, b y c , son diferentes dos a dos, el sistema es consistente determinado, y su solución es:

$$x = abc$$

$$y = -(ab + bc + ca)$$

$$z = a + b + c$$

LIBROS CONSULTADOS

AITKEN, A.C.: Determinantes y Matrices.
Madrid. Edit. Dossat S.A.

AYRES, Frank Jr.: Matrices.
Edit. Schaum. 1973

BAEZA VEGA, Rodolfo: Álgebra Lineal y Aplicaciones.
Chile. Edit. Universidad de La Frontera, 1991

BEER, Gerald Alan: Applied Calculus for Business and Economics, with an
Introduction to Matrices.
Edit. Winthrop Publishers, Inc. Cambridge 1978.

CÁCERES, Alberto y CHÁVEZ, Carlos: Álgebra Lineal.
Edit. IV Escuela Latinoamericana de Matemáticas, Lima. 1978.

CARAKUSHANSKY, Mina S. de y La Penha, Guilherme de: Álgebra Lineal.
Edit. McGraw - Hill Latinoamericana, 1980.

CHACÓN S.J., R. P. Enrique: Análisis Matemático
Bilbao. Edit. El Mensajero del Corazón de Jesús. 1946.

COLLETE, Jean Paul: Historia de las Matemáticas, 2 T.
Edit. Siglo Veintiuno, 1985

DICKSON, Leonard Eugene: Theory of Ecuations, New First Course in the Theory of
Equations. Edit. John Wiley & Sons Inc., 1939

DENIS-PAPIN, Maurice y KAUFMANN, A.: Cours de Calcul Matriciel Appliqué.
París. Edit. Albin Micheal 1960.

DÓRIGA, Enrique I. S.J.: Los Sistemas de Ecuaciones Lineales y su Reducción
Tabulada. Lima. Edit. Universidad del Pacífico, 1977.

FADDIEEV, D. y SOMINSKI, I.: Problemas de Álgebra Superior.
Moscú: Edit. Mir, 1976.

FLOREY, Francis G., Fundamentos de Álgebra Lineal y Aplicaciones.
Edit. Prentice Hall International, 1980.

GOLOVINA, L.I.: Álgebra Lineal y Algunas Aplicaciones.
Moscú: Edit. Mir, 1974.

HADLEY, G., : Álgebra Lineal.
Edit. Addison - Wesley Publishing Company, Inc., 1961.

HERNÁNDEZ LEFRANC, Luis A.: Elementos de Cálculo Matricial.
Lima Edit. ESTE 1975.

HOFFMAN, Kenneth y KUNZE, Ray: Álgebra Lineal.
Edit. Prentice/Hall International, 1973.

KEIMAN, Ariel y KLEIMAN, Elena de: Matrices, Aplicaciones Matemáticas en
Economía y Administración.
Edit. LIMUSA, 1985

MIQUEL Y MERINO, Pablo: Elementos de Álgebra Superior.
Guatemala: Edit. Cultural Centroamericana S.A. 1967.

REY PASTOR, J., PI CALLEJA, P, y TREJO, C.A.: Análisis Matemático.
Buenos Aires: Edit. Kapelusz, 1952.

REY PASTOR, J., BABINI: Historia de la Matemática.
Buenos Aires: Edit. Espasa Calpe, 1951.

SADLER, A.J. y THORNING, D.W.S.: Understanding Pure Mathematics.
Edit. Oxford University Press, 1990.

SAGASTUME BERRA, Alberto y FERNÁNDEZ Germán. Álgebra y Cálculo Numérico.
Edit. Kapelusz., 1960.

STANFORD, Vera: A Short History of Mathematics.
Edit. The University Press, Cambrige, 1930

TURNBULL, H.W.: Teoría de Ecuaciones.
España: Edit Dossat S.A.

ÍNDICE ANALÍTICO

ADICIÓN DE MATRICES	
Definición	15
Propiedades	17
ADJUNTA DE UNA MATRIZ	251
ADJUNTO DE UN ELEMENTO	224
ÁLGEBRA MATRICIAL	21, 29
Diferencias con el Algebra Ordinaria	38
ANÁLISIS DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (MxN)	302
CARACTERÍSTICA DE UNA MATRIZ	148
COFACTOR DE UN ELEMENTO	224
COMBINACIÓN LINEAL DE MATRICES	24
DESCOMPOSICIÓN DE UNA MATRIZ REGULAR	166
DETERMINANTE	
Construcción con valor predeterminado	328
De dos por dos	210
De segundo orden	210
De la matriz inversa	241
De tercer orden	211
De tres por tres	211
De Vandermonde	239
Definición general	210
Desarrollo por elementos de una línea	225
Notación	207
Término general	214
DIAGONALIZACIÓN DE JORDAN	132, 288
DIFERENCIA DE MATRICES	
Definición	20
ECUACIÓN LINEAL	
Con dos incógnitas	265
Con n incógnitas	267
Con una incógnita	264
Definición	261
ELEMENTOS ENTEROS	
Construcción de matrices con	324
Matrices inversas con	326
Sistemas de ecuaciones con	328

ESPACIO MATRICIAL	25
ESPACIO VECTORIAL DE MATRICES	9
ESQUEMA DE MULTIPLICACIÓN	38
Horizontal	39
Otros esquemas prácticos	42
Vertical	40
FACTORIZACIÓN DE MATRICES	80, 327
FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	121
FORMA NORMAL DE UNA MATRIZ	147
FÓRMULA DE BINET - CAUCHY	239
FUNCIÓN MATRICIAL	92
HISTORIA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	355
IGUALDAD DE MATRICES	
Definición	8
Propiedades de la	10
INVERSA	
De la matriz diagonal	114
De la matriz escalar	113
De la matriz identidad o unitaria	112
De la matriz involutiva	117
De la matriz ortogonal	117
De la matriz unitaria	112
De una matriz Construcción	258
De una matriz elemental	165
INVERSAS UNILATERALES	338
INVERSIÓN DE MATRICES	
Algebraicamente	105
Método de Fox (Matrices simétricas)	195
Por factorización	190
Por Gauss-Jordan	180
Por matrices de transformación	187
Por matrices elementales	183
Por solución de sistemas de ecuaciones lineales	178
Verificación del proceso de Gauss Jordan	341
INVERSIÓN DE MATRICES ESPECIALES	112
MATRICES	
Anticonmutables	37
Antisimétricas	73
Antigua notación de	2
Antipermutables	37

MATRICES. . .

Columna	3
Combinación Lineal de	24
Como arreglo de datos	5
Como tablas de doble entrada	5
Concepto	1
Conmutables	35
Cuadradas	3
Diagonales	
Definición	85
Propiedades	85
Elementales	155
Elementos de las	1
Entradas de las	1
Equidimensionales	9
Equivalentes por filas	144
Enteras	324
Descomposición de matrices simétricas	327
Factorización de	327
Escalares	
Definición	87
Propiedades	88
Escalonadas	139
Espacio vectorial de	9
Especiales	63
De transformación	155
Fila	3
Igualdad de	8
Inversas con elementos enteros	326
Multiplicación de	30
Notación	2
Notación con dos subíndices	4
Orden de las	1
Otras notaciones	336
Particionadas	329
Permutables	35
Por cajas	329
Por comprensión	7
Potenciación de	49
Propiedades de la	52
Rectangulares	3
Simétricas	73
Triangulares	
Definición	77
Propiedades	78

MATRIZ

Adjunta	
Definición y notación	252
Propiedades	255
Ampliada de un sistema de ecuaciones lineales	123
Antisimétrica	74
Aumentada	274
Notaciones	4

MATRIZ. . .

Cero	21
Cuadrada	
Diagonal de una	71
Traza de una	71
De cofactores	254
De Probabilidad	63
Escalonada reducida	140
Idempotente	53
Identidad	90
Inversible	109
Inversa	
Construcción	259
Definición	104
Notación	104
Inversa aditiva	21
Involutiva	91
Neutra aditiva	21
No singular	109
Nula	
Definición	21, 64
Notación	65
Propiedades	65
Nulipotente	56
Multiplicación de,	
Ver MULTIPLICACIÓN DE MATRICES	
Orlada	274
Ortogonal	192
Periódica	54
Posmultiplicadora	32
Premultiplicadora	32
Regular	107
Singular	107
Simétrica	74
Transpuesta	
Definición	66
Propiedades	67

MENOR DE UN ELEMENTO

225

MÉTODOS ALGEBRAICOS

Eliminación	281
Iguálación	281
Regla de Cramer	283
Reducción	282
Sustitución	282

MÉTODOS CHINOS

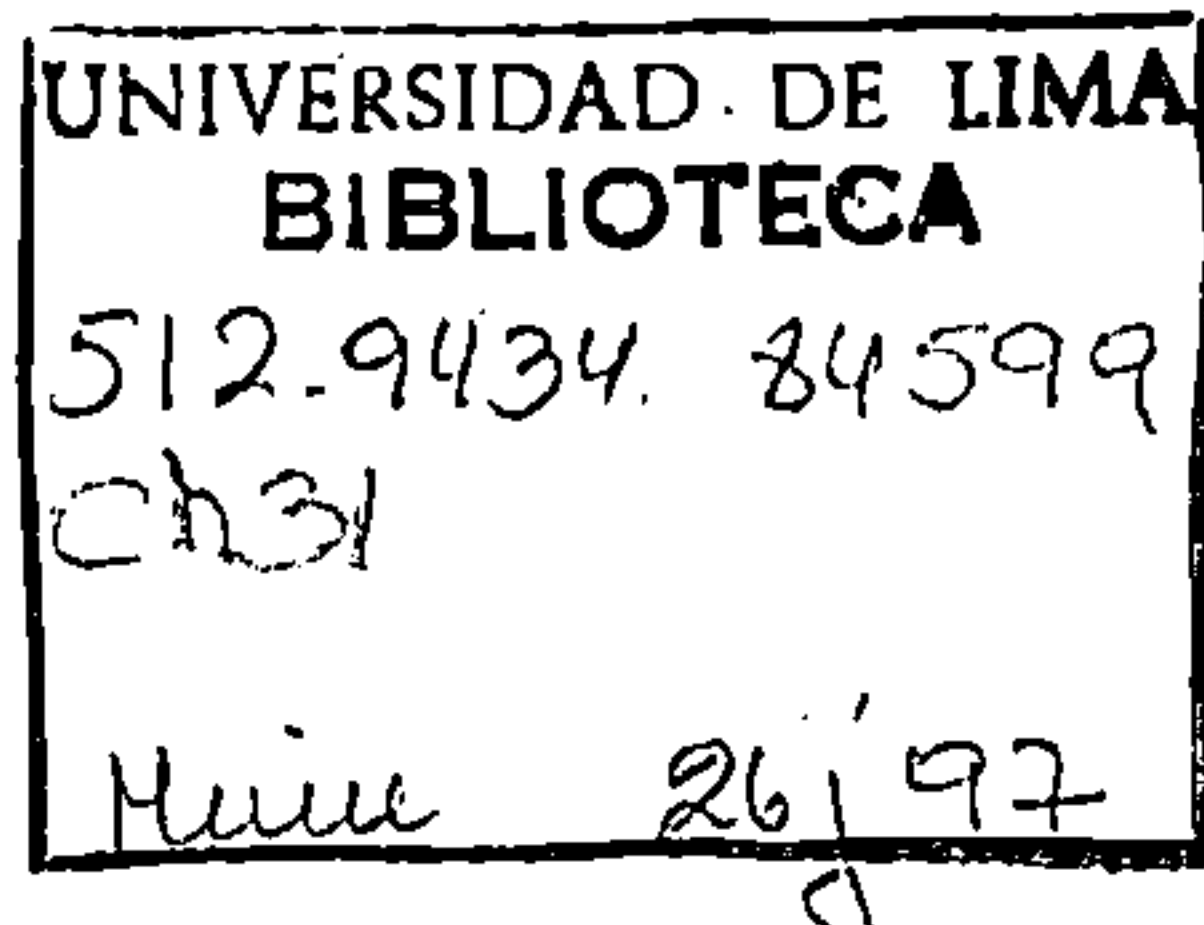
Para la solución de un sistema de ecuaciones lineales	356

MÉTODOS DE INVERSIÓN DE MATRICES

177

MÉTODOS MATRICIALES	286
Diagonalización de Jordan	290
Por inversión de matrices	294
Triangulación de Gauss	287
MULTIPLICACIÓN DE MATRICES	30
Criterios de la	44
Por la derecha	33
Por la izquierda	33
MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR	
Definición	19
Propiedades	20
NOTACIÓN	
De Cauchy	338
De Kroenecker	338
De Leibnitz	337
De Sylvester	338
OPERACIONES CON MATRICES	15
PERMUTACIONES	
Definición y notación	204
Número de	205
PRODUCTO DE DOS MATRICES	31
Conformabilidad de	133
Definición	31
Propiedades del	35
PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES	30
PROPIEDADES	
De la adición de matrices	18
De la igualdad de matrices	10
De la matriz adjunta	255
De la matriz diagonal	85
De la matriz escalar	88
De la matriz identidad	90
De la matriz inversa	109
De la matriz nula	64
De la matriz transpuesta	66
De la multiplicación	
de una matriz por un escalar	19
De la Potenciación	52
De la traza de una matriz	71
De las matrices simétricas y antisimétricas	74
De las matrices triangulares	78
De los determinantes	
Más propiedades	231
Primeras propiedades	217
Del producto de dos matrices	35

RANGO	
De la matriz ampliada	301
De una matriz	149
De una matriz de coeficientes	300
REGLA DE SARRUS	
Para determinantes de tres por tres	213
SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	
Conjunto solución	275
Consistentes	276, 279
Construcción de ..., con soluciones enteras	329
Definición y notación	273
Homogéneos	278
Inconsistentes	276
Indeterminado	279
Métodos algebraicos	281
Métodos matriciales	286
No homogéneos	278
Solución por inversión de matrices	294
Verificación de la solución	293
Verificación del procedimiento	342
SISTEMAS EQUIVALENTES	286
SOLUCIÓN TRIVIAL	278
REGLA DE LA ESTRELLA	
Para determinantes de tres por tres	214
TEOREMAS DE ROUCHE - FROBENIUS	312
TRANSFORMACIÓN	
Elemental de filas	123
Elemental de columnas	145
General de una matriz	172
TRAZA DE UNA MATRIZ CUADRADA	72
TRIANGULACIÓN DE GAUSS	129, 287
UNA APLICACIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA	346
VANDERMONDIANA	241
VERIFICACIÓN	
De la multiplicación de matrices	44
Del proceso de Gauss Jordan	344



Este libro se terminó de imprimir en mayo de 1997
en el Departamento de Impresiones de la
Universidad de Lima