

Percy Correa Espinoza

*Ejercicios de teoría
microeconómica*

Universidad de Lima
Fondo de Desarrollo Editorial
1997

84694



Colección Textos Universitarios

Primera edición 1997

© Fondo de Desarrollo Editorial
Universidad de Lima
Av. Javier Prado Este s/n, Lima 33
Apartado postal 852, Lima 100, Perú
Teléfono 437-6767
Fax 437-8066
E-mail fondo_ed@ulima.edu.pe
Internet <http://www.ulima.edu.pe>

Diseño y edición Fondo de Desarrollo Editorial

Carátula Tapul

Impreso en el Perú

Prohibida la reproducción total o parcial de este libro por cualquier medio sin permiso expreso del Fondo de Desarrollo Editorial.

ISBN 9972-45-020-1

Para Anita Valencia

Índice

Introducción	XIII
<i>I. TEORÍA DE LA ELECCIÓN DEL CONSUMIDOR</i>	1
✓ I.1 Equilibrio del consumidor	3
✓ I.2 Curva renta-consumo y curva de Engel	34
✓ I.3 Efectos sustitución y renta	51
I.4 Optimización del descanso	62
✓ I.5 Utilidad esperada	69
I.6 Consumo intertemporal	76
<i>II. TEORÍA DE LA DEMANDA DEL CONSUMIDOR</i>	81
✓ II.1 Funciones de demandas ordinarias	83
II.2 Ecuación de Slutsky. Demandas compensadas	103
✓ II.3 Elasticidad-ingreso o renta	114
II.4 Elasticidad-precio de la demanda directa y cruzada	125
<i>III. TEORÍA DE LA PRODUCCIÓN</i>	135
III.1 Funciones de producción	137
III.2 Eficiencia en la producción	144
III.3 Elasticidad de productividad	149
III.4 Elasticidad de sustitución	154

IV. <i>TEORÍA DE LOS COSTOS</i>	159
IV.1 Costos en el corto plazo ✓	161
IV.2 Función de oferta de corto plazo ✓	171
IV.3 Costos en el largo plazo	176
IV.4 Función de oferta de largo plazo	184
V. <i>TEORÍA DEL EQUILIBRIO DEL MERCADO BAJO COMPETENCIA PERFECTA</i>	191
V.1 Equilibrio de la firma y del mercado bajo competencia perfecta en el corto plazo	193
V.2 Equilibrio de la firma y del mercado bajo competencia perfecta en el largo plazo	202
V.3 Estabilidad estática del mercado competitivo	214
V.4 Estabilidad dinámica (teorema de la telaraña)	226
V.5 Producción conjunta	236
VI. <i>TEORÍA DEL MONOPOLIO</i>	253
VI.1 Monopolio puro	255
VI.2 Monopolio discriminador de precios de tercer grado	267
VI.3 Monopolio discriminador de precios de primer grado (discriminación perfecta)	302
VI.4 Monopolista con plantas múltiples	316
VI.5 Monopolista que maximiza su ingreso	327
VI.6 Regulación del monopolio	330
VII. <i>TEORÍA DEL OLIGOPOLIO</i>	343
VII.1 Firmas líderes y seguidoras	345
VII.2 Curva de demanda quebrada	358
VII.3 Colusión oligopólica	367
VIII. <i>TEORÍA DEL MERCADO DE FACTORES</i>	375
VIII.1 Elasticidad de sustitución de los factores de producción	377
VIII.2 Mercado de factores	386
IX. <i>TEORÍA DEL EQUILIBRIO GENERAL</i>	411
IX.1 Equilibrio general en el consumo	413

IX.2	Equilibrio general en la producción	423
IX.3	Equilibrio general	438

<i>BIBLIOGRAFÍA BÁSICA</i>	447



Introducción

Los profesores que tenemos a cargo la enseñanza de los cursos básicos e intermedios de Teoría Microeconómica somos testigos de las dificultades que éstos suelen crear entre los estudiantes, por su naturaleza abstracta y conceptual. Al respecto, con el propósito de aclarar y asegurar la comprensión de los principios que fundamentan la teoría convencional de los precios, se suele recurrir al planteamiento y resolución de ejercicios diversos.

Desafortunadamente, la disponibilidad de textos que ayuden al estudiante a resolverlos, de modo que le permita comprender cabalmente los principios en juego, no es muy amplia. A fin de llenar tal vacío en el mercado de los textos de microeconomía, se ha elaborado el presente libro que reúne en un solo volumen una diversidad de ejercicios, con las respectivas soluciones, ordenados según la secuencia usual en que se desarrollan los temas principales de los cursos de Teoría de los Precios, Análisis Microeconómico o equivalentes.

El grado de dificultad de los ejercicios es variado, pero en todos los casos no se ha perdido de vista el propósito que animó la preparación del presente texto: ayudar al estudiante provisto de cierto interés y nociones de geometría, álgebra y cálculo, a entender los fundamentos o principios que subyacen en cada uno de los temas tratados. Por consiguiente, se han obviado ejercicios muy elaborados, propios de cursos avanzados, o ejercicios muy sesgados al campo de las matemáticas, puesto que ello desalienta a los estudiantes, que se inician en el campo de la economía, a proseguir y profundizar el estudio de las actividades de las personas como integrantes de grupos sociales en el propósito de satisfacer el mayor número de necesidades con los escasos recursos que poseen.

Por lo tanto, el presente texto no pretende ser un libro de economía matemática, ni mucho menos de matemática con aplicaciones extraídas del campo económico. Si algún mérito el autor desearía se le reconozca es el de haber preparado un texto que facilite la comprensión de los principios fundamentales de la teoría de

los precios por parte de los estudiantes de economía en su a veces difícil tránsito por los campos de la teoría económica.

Desearía agradecer en primer término a los numerosos estudiantes de mis cursos de Microeconomía de la Universidad de Lima, quienes han sido expuestos a estos ejercicios y cuyas opiniones y observaciones en el momento de las correcciones y calificaciones han contribuido a la presentación de las soluciones aquí consideradas. También a las autoridades de la Facultad de Economía por su apoyo y aliento, y un agradecimiento especial para la señorita Claudia Loureiro Koechlin, sin cuya participación eficiente en el procesamiento de los borradores no hubiera sido posible concluir este trabajo. Ciertamente, ninguna de las personas antes aludidas son responsables de cualquier error o deficiencia que pudiera existir.

Teoría de la elección del consumidor

I.1 Equilibrio del consumidor

1. Supóngase que el consumidor se encuentra en equilibrio a lo largo de una curva de indiferencia con pendiente igual a:

$$-\frac{100}{q_1^2}$$

Si el ingreso del consumidor es de 600 y los precios de q_1 y q_2 son: $P_1^0 = 20$ y $P_2^0 = 20$, ¿cuáles son los valores de equilibrio de q_1 y q_2 ?

Respuesta:

En equilibrio debe cumplirse:

$$TMgS_{q_2/q_1} = \frac{P_1^0}{P_2^0}$$

$$-\frac{100}{q_1^2} = -\frac{20}{20}$$

$$q_1^2 = 100$$

$$q_1 = 10$$

La restricción a la que se enfrenta el consumidor permite hallar la otra cantidad de equilibrio:

$$600 = P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2$$

$$600 = (20)(10) + (20)q_2$$

$$q_2 = 20$$

2. Un consumidor tiene curvas de indiferencia rectas con pendiente $-1/2$. Si su ingreso es de 100, ¿cuál es su consumo de equilibrio?

a) Si $P_1^0 = 1$ y $P_2^0 = 1$

b) Si $P_1^0 = 1$ y $P_2^0 = 2$

Respuesta:

a) En equilibrio: $TMgS_{q_2/q_1} = -1/2$

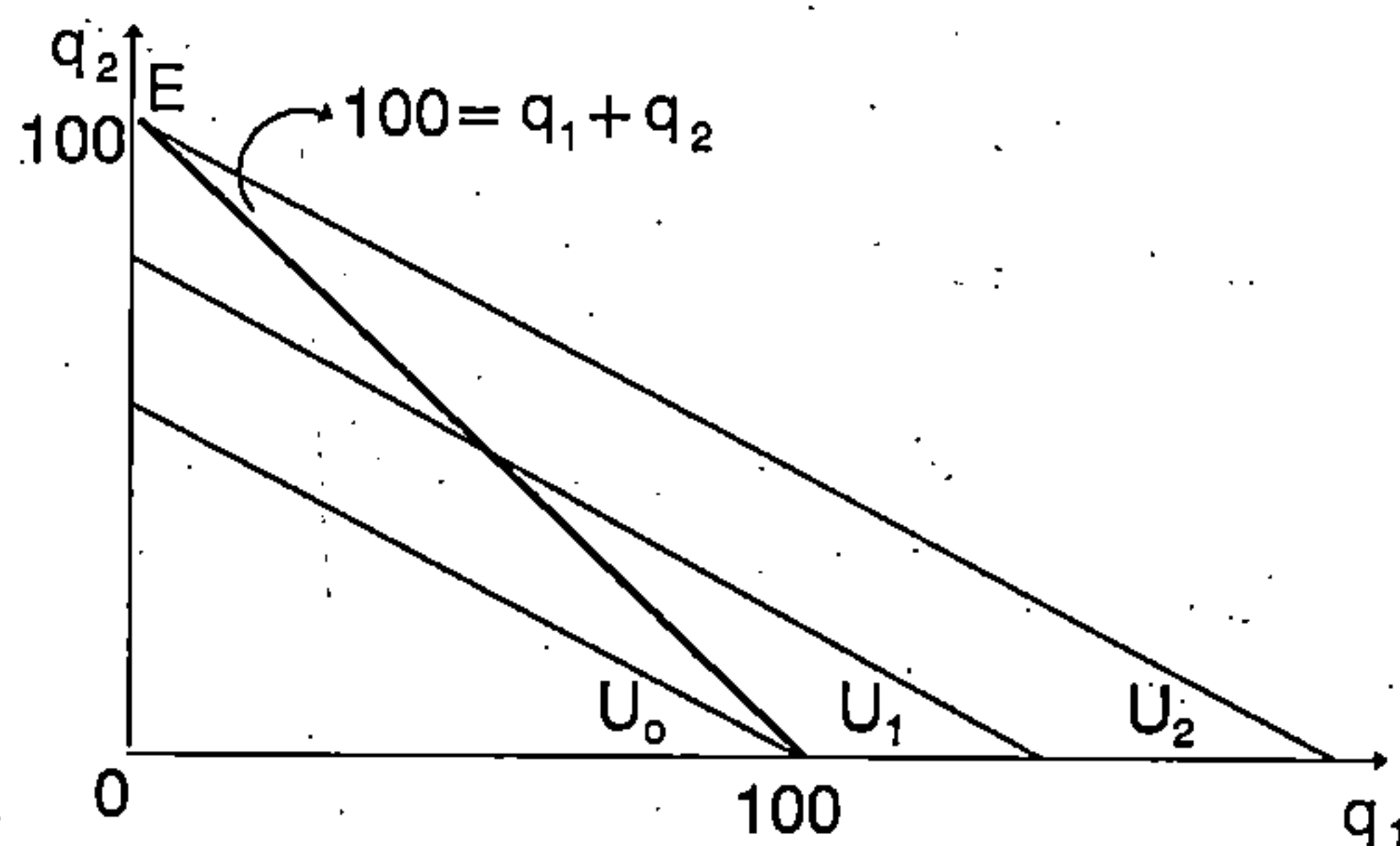
$$\frac{P_1^0}{P_2^0} = -1/2$$

Las pendientes son diferentes, por lo tanto la ecuación de presupuesto intersecará las isocuantas, pero nunca logrará una tangencia. Se debe escoger entonces la intersección que se realice con la curva de indiferencia más alta. En valor absoluto, la pendiente de la recta de presupuesto es mayor; por lo que existirá una solución de esquina. El consumidor sólo adquirirá el bien q_2 de acuerdo a su función presupuestal:

$$100 = 1q_1 + 1q_2$$

El nivel más alto de utilidad dentro del primer cuadrante se da cuando $q_1 = 0$ y $q_2 = 100$ (ver gráfico N° I.1.1).

Gráfico N° I.1.1



b) En equilibrio: $TMgS_{q_2/q_1} = -1/2$

$$\frac{P_1}{P_2} = -1/2$$

Las pendientes son iguales, la recta de presupuesto se superpone a la curva de indiferencia más alta que puede alcanzar. En este caso, los límites en los ejes vienen dados por:

$$100 = 1q_1 + 2q_2$$

$$q_1 = 0$$

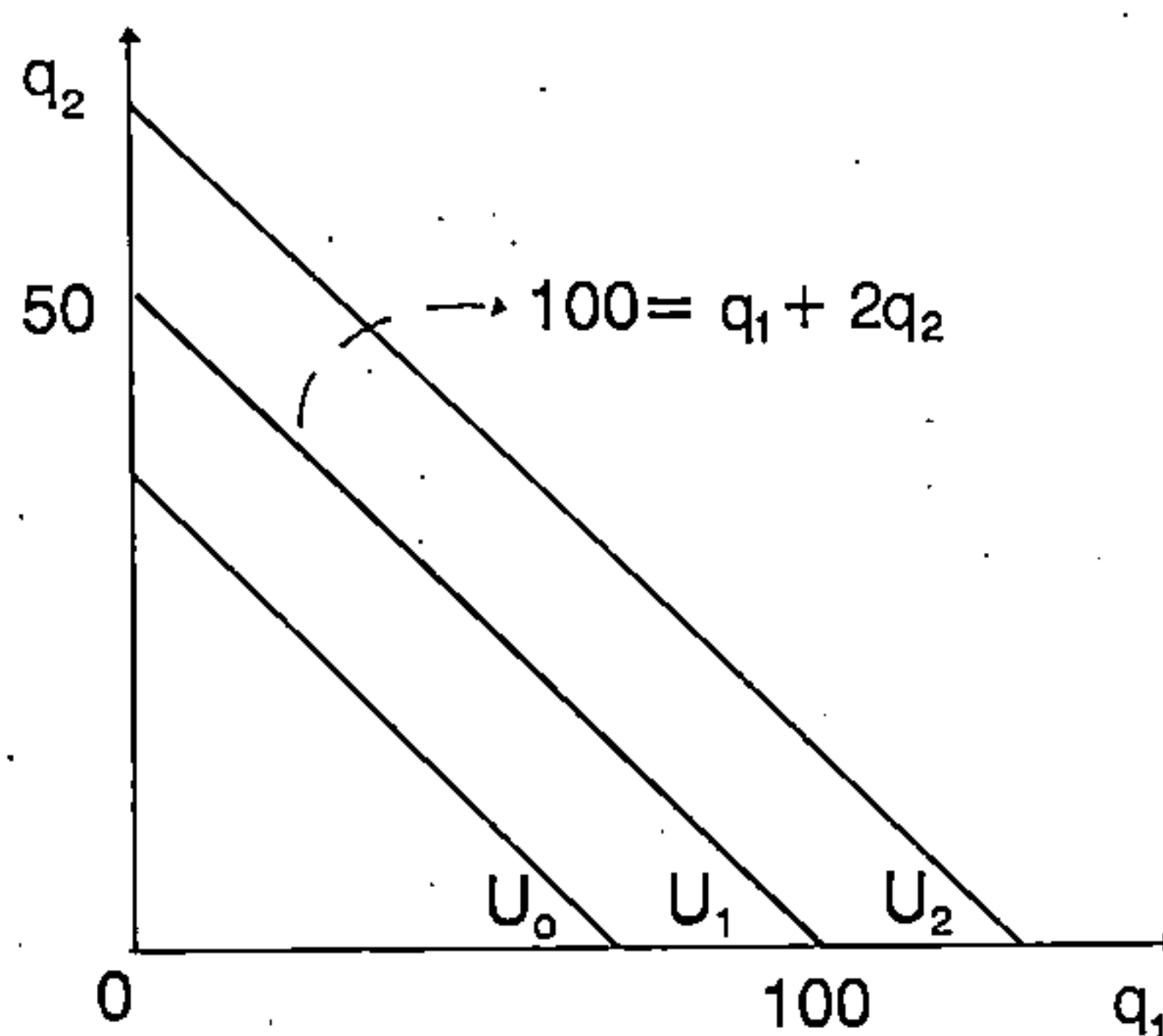
$$\text{entonces } q_2 = 50$$

$$q_1 = 100$$

$$\text{entonces } q_2 = 0$$

Por lo tanto no existirá un solo punto de optimización. Se podrá escoger cualquier punto a lo largo de la recta de presupuesto. En general, si las curvas de indiferencia no son convexas al origen sino cóncavas o rectas, el consumidor se especializa en el consumo de uno de los bienes, o se tendrá una situación de soluciones múltiples como se observa en el siguiente gráfico:

Gráfico N° 1.1.2



3. ¿Qué sucede con el equilibrio del consumidor cuando el ingreso nominal crece en 10% en comparación al caso de que los precios se reduzcan en 10%, manteniendo el ingreso constante?

Respuesta:

- a) **Primera opción:** $\Delta I = 10\%$

Las intersecciones originales de la recta de presupuesto con los ejes son:

$$\frac{I^0}{P_2^0}; \frac{I^0}{P_1^0}$$

Las nuevas intersecciones serán:

$$\frac{1.1I^0}{P_2^0}; \frac{1.1I^0}{P_1^0}$$

Dado que el incremento se realiza en una constante, las pendientes de las rectas de presupuestos no se alteran:

$$I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2$$

$$m = -\frac{P_1^0}{P_2^0}$$

$$1.1I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2$$

$$m' = -\frac{P_1^0}{P_2^0}$$

b) Segunda opción: $\nabla P_{1,2} = 10\%$

Las nuevas intersecciones en los ejes de coordenadas son:

$$\frac{I^0}{0.9P_2^0}; \frac{I^0}{0.9P_1^0}$$

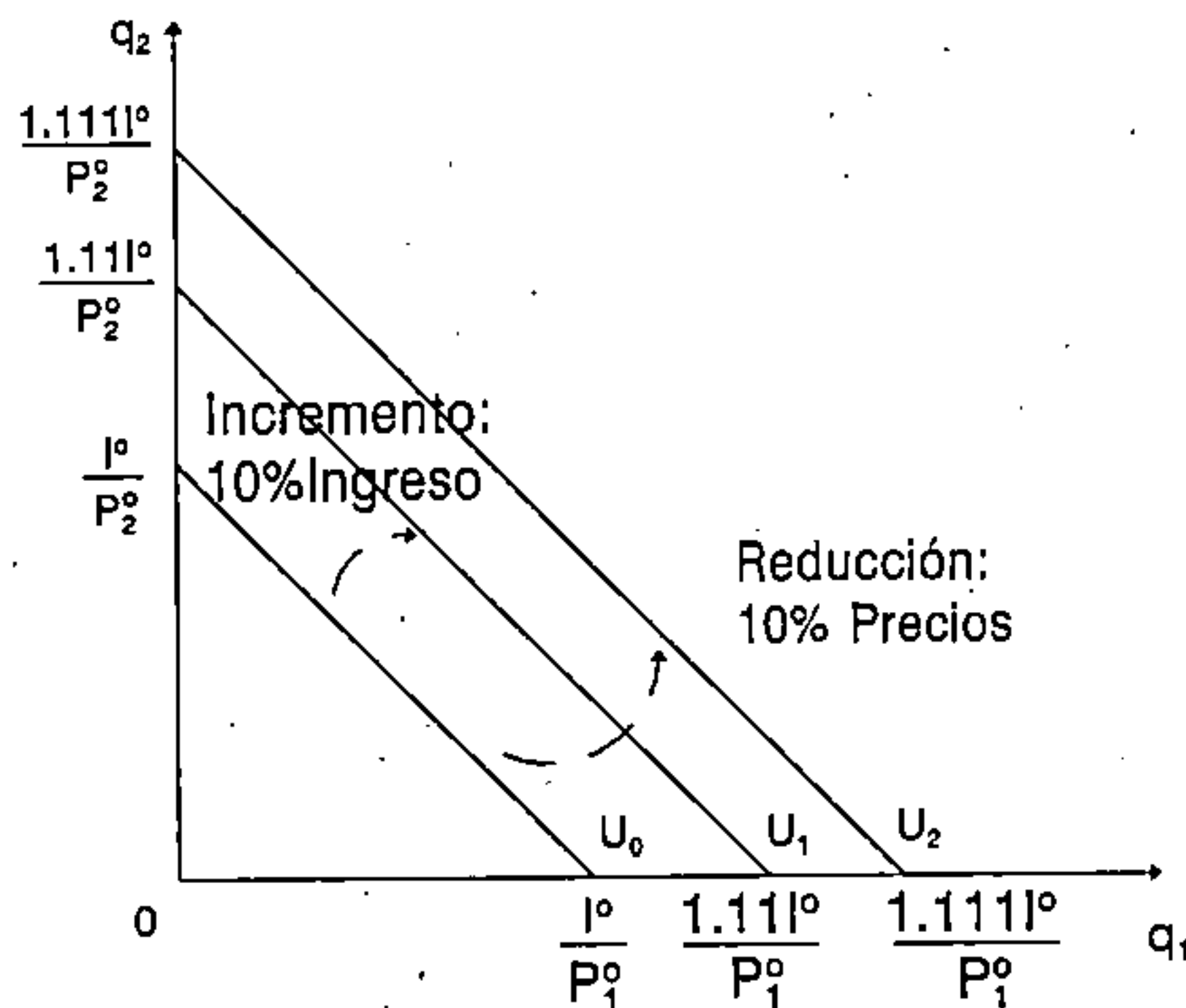
$$\frac{1.111I^0}{P_2^0}; \frac{1.111I^0}{P_1^0}$$

$$I^0 = 0.9P_1^0 q_1 + 0.9P_2^0 q_2$$

$$m' = -\frac{P_1^0}{P_2^0}$$

En este caso tampoco se altera la pendiente de la recta presupuestal original, pero si los precios se reducen, el consumidor alcanzará una curva de indiferencia más alta. Por ello, será preferible para el consumidor que los precios de mercado se reduzcan en 10% ya que la recta presupuestal se desplazará un poco más a la derecha (ver gráfico N° I.1.3).

Gráfico N° I.1.3



4. Un consumidor alcanza su posición de máxima utilidad a lo largo de una curva de indiferencia cuya ecuación es:

$$q_2 = \frac{8}{q_1} + 3$$

La pendiente de la recta de balance es -2 . Sabiendo que si al comprar 11 unidades del bien q_2 gastará todo su ingreso, determinar la combinación q_1 y q_2 donde maximiza su utilidad.

$$q_2 = 11$$

Respuesta:

a) Primer método:

A partir de los datos del problema se puede obtener la recta de presupuesto:

$$I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2$$

$$\frac{I^0}{P_2^0} = \frac{P_1^0}{P_2^0} q_1 + q_2$$

$$q_2 = \frac{I^0}{P_2^0} - \frac{P_1^0}{P_2^0} q_1$$

pero, según el enunciado del problema, $q_1 = 0$

$$\frac{I^0}{P_2^0} = 11$$

y

$$TMgS_{q_2/q_1} = -\frac{P_1^0}{P_2^0} = -2$$

entonces, reemplazando en: $q_2 = \frac{I^0}{P_2^0} - \frac{P_1^0}{P_2^0} q_1$

se obtiene: $q_2 = 11 - 2q_1$

Por otro lado, se tiene la curva de indiferencia. En el punto óptimo debe darse una tangencia entre ésta y la recta presupuestal. Igualando:

$$11 - 2q_1 = q_2 = \frac{8}{q_1} + 3$$

$$11 - 2q_1 = \frac{8}{q_1} + 3$$

$$q_1 = 2 \quad \text{y} \quad q_2 = 7$$

El equilibrio se observa en el gráfico N° I.1.4.

b) Segundo método: En equilibrio:

$$TMgS_{q_2/q_1} = -\frac{P_1^0}{P_2^0} = -2$$

$$TMgS_{q_2/q_1} = -\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{8}{q_1^2} = -\frac{P_1^0}{P_2^0}$$

$$-\frac{8}{q_1^2} = -\frac{2}{1}$$

Tomando la raíz positiva: $q_1 = 2$

Pero, como el consumidor se encuentra en la curva de indiferencia

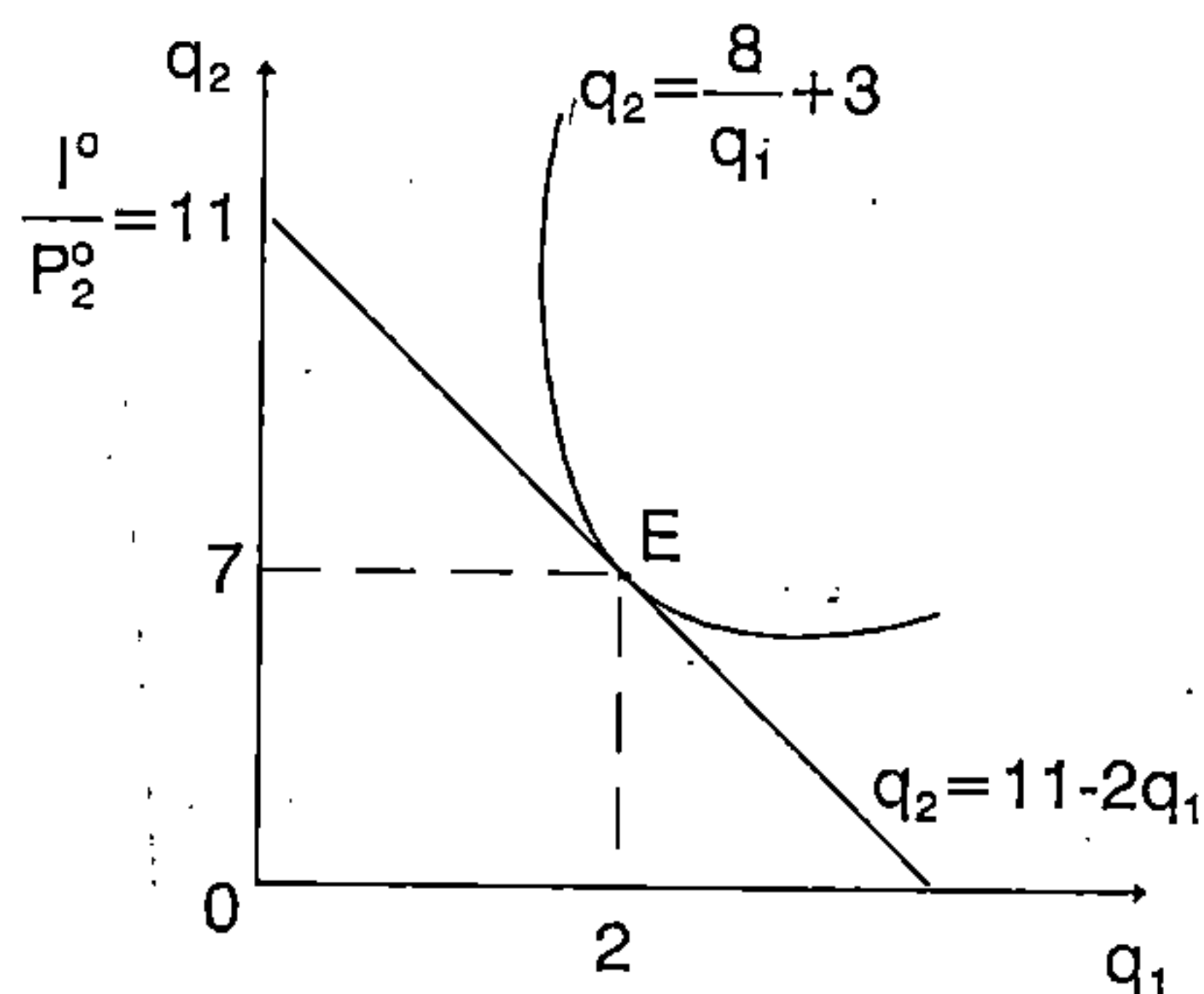
$$q_2 = \frac{8}{q_1} + 3$$

$$q_2 = \frac{8}{2} + 3$$

$$q_2 = 7$$

El equilibrio se observa en el gráfico N° I.1.4.

Gráfico N° I.1.4



5. El mapa de indiferencia de un consumidor está dado por la siguiente ecuación:

$$U = q_2 - \frac{50}{q_1}$$

Si se sabe que $P_1^0 = 400$ y $P_2^0 = 200$, su ingreso inicial es de 5.800 y su utilidad $U^0 = 9$. Se pide:

- Determinar los valores de q_1 y q_2 que maximicen su utilidad ($U^0 = 9$).
- Si su utilidad debe aumentar a $U^1 = 10$; ¿en cuánto debe subir su ingreso, *ceteris paribus*?
- ¿Cuál sería la nueva combinación óptima q_1^1 y q_2^1 ?

d) ¿Qué particularidad se observa en los dos puntos de equilibrio?

Respuesta:

a) **Equilibrio inicial:** Dado que $U^0 = 9$, entonces:

$$9 = q_2 - \frac{50}{q_1}$$

$$q_2 = 9 + \frac{50}{q_1}$$

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{50}{q_1^2} \quad \text{igual a:} \quad \frac{P_1^0}{P_2^0} = -2$$

así:

$$-\frac{50}{q_1^2} = -2$$

$$q_1 = 5$$

luego:

$$q_2 = 9 + \frac{50}{5}$$

$$q_2 = 19$$

b) Para $U' = 10 > U^0 = 9$, *ceteris paribus*, el ingreso debe crecer y la recta presupuestal desplazarse paralelamente.

Para $U^1 = 10$, entonces:

$$10 = q_2 - \frac{50}{q_1}$$

$$q_2 = 10 + \frac{50}{q_1}$$

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{50}{q_1^2} = -2 = \frac{P_1^0}{P_2^0}$$

por lo tanto: $q_1' = 5$ y $q_2' = 20$

La recta presupuestal pasa por dicho punto (5,20) y tiene una pendiente igual a -2.

$$I_1^0 = P_1^0 q_1' + P_2^0 q_2'$$

$$\frac{I_1^0}{P_2^0} = \frac{P_1^0}{P_2^0} q_1' + q_2'$$

reemplazando q_1' y q_2'

$$\frac{I_1^0}{P_2^0} = i = \frac{P_1^0}{P_2^0} (5) + 20$$

$$i = 2(5) + 20 = 30$$

"I" es la intersección con el eje Y. Luego:

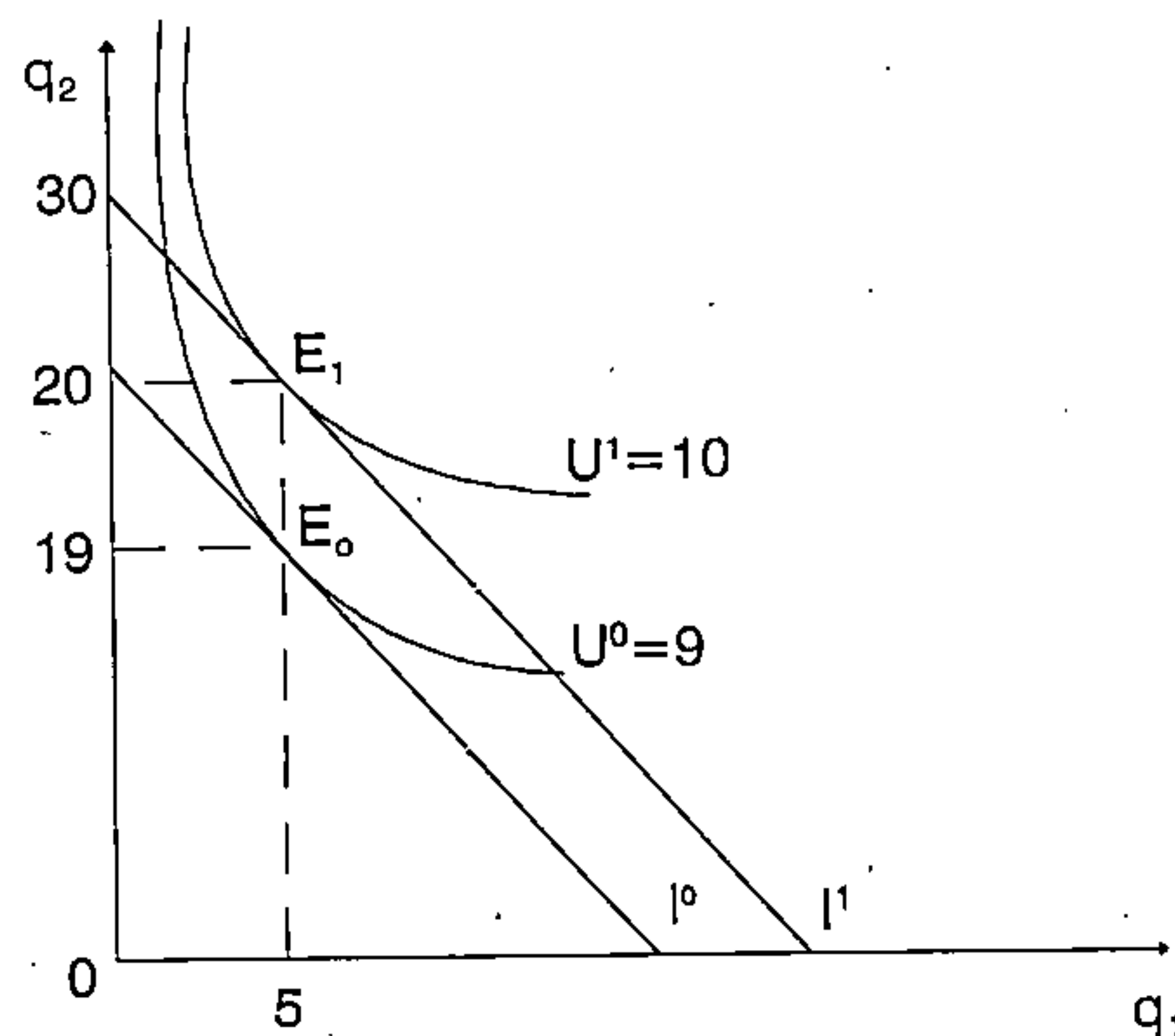
$$I_1^0 = (P_2^0)(i)$$

$$I_1^0 = (200)(30)$$

$$I_1^0 = 6,000$$

- c) Todo el incremento del ingreso se dedica a la adquisición de q_2 . El incremento del ingreso es de 200 y el consumo de q_2 se incrementa en 1 unidad (ver gráfico N° I.1.5).

Gráfico N° I.1.5



6. Determinar si la siguiente función de utilidad tiene curvas de indiferencia convexas al origen:

$$U = aq_1^\alpha + bq_2^\beta$$

donde $a, b > 0$ y $0 < \alpha, \beta < 1$



Respuesta:

Asumir: $U = U^0$

$$dU^0 = a\alpha q_1^{\alpha-1}dq_1 + b\beta q_2^{\beta-1}dq_2 = 0$$

$$-\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{a\alpha q_1^{\alpha-1}}{b\beta q_2^{\beta-1}} < 0$$

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = - \left\{ \frac{b\beta q_2^{\beta-1} [a\alpha(\alpha-1)q_1^{\alpha-2}] - [a\alpha q_1^{\alpha-1}] \left[b\beta(\beta-1)q_2^{\beta-2} \left(\frac{dq_2}{dq_1} \right) \right]}{[b\beta q_2^{\beta-1}]^2} \right\}$$

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = - \left\{ \frac{[(+)(-)] - [(+)(-)(-)]}{(+)} \right\} \quad \text{porque } 0 < \alpha, \beta < 1 \text{ y } \frac{dq_2}{dq_1} < 0$$

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = - \left\{ \frac{[-] - [+]}{(+)} \right\}$$

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = - \left\{ \frac{(-)}{(+)} \right\} > 0$$

Es convexa vista desde el origen.

7. Determinar si la siguiente función de utilidad tiene curvas de indiferencia convexas

$$U = q_1 + q_2 + 2q_1q_2$$

Respuesta:

Derivando la función de utilidad para hallar la $TMgS_{q_2/q_1}$ tomando en consideración la curva de indiferencia U^0 :

$$U = U^0$$

$$dU^0 = 0 = dq_1 + dq_2 + 2q_1 dq_2 + 2q_2 dq_1$$

$$\frac{dq_1}{dq_2} + \frac{dq_2}{dq_1} + 2q_1 \frac{dq_2}{dq_1} + 2q_2 \frac{dq_1}{dq_1} = 0$$

$$1 + \frac{dq_2}{dq_1} (1 + 2q_1) + 2q_2 = 0$$

$$\frac{dq_2}{dq_1} = - \frac{(1 + 2q_2)}{(1 + 2q_1)} < 0$$

Determinando la tasa de crecimiento de la $TMgS_{q_2/q_1}$ (condición suficiente):

$$\frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = - \left[\frac{(1 + 2q_1) \left(2 \frac{dq_2}{dq_1} \right) - (1 + 2q_2)(2)}{(1 + 2q_1)^2} \right]$$

$$\frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = - \left[\frac{(1 + 2q_1) \left(-2 \frac{(1 + 2q_2)}{(1 + 2q_1)} \right) - (1 + 2q_2)(2)}{(1 + 2q_1)^2} \right]$$

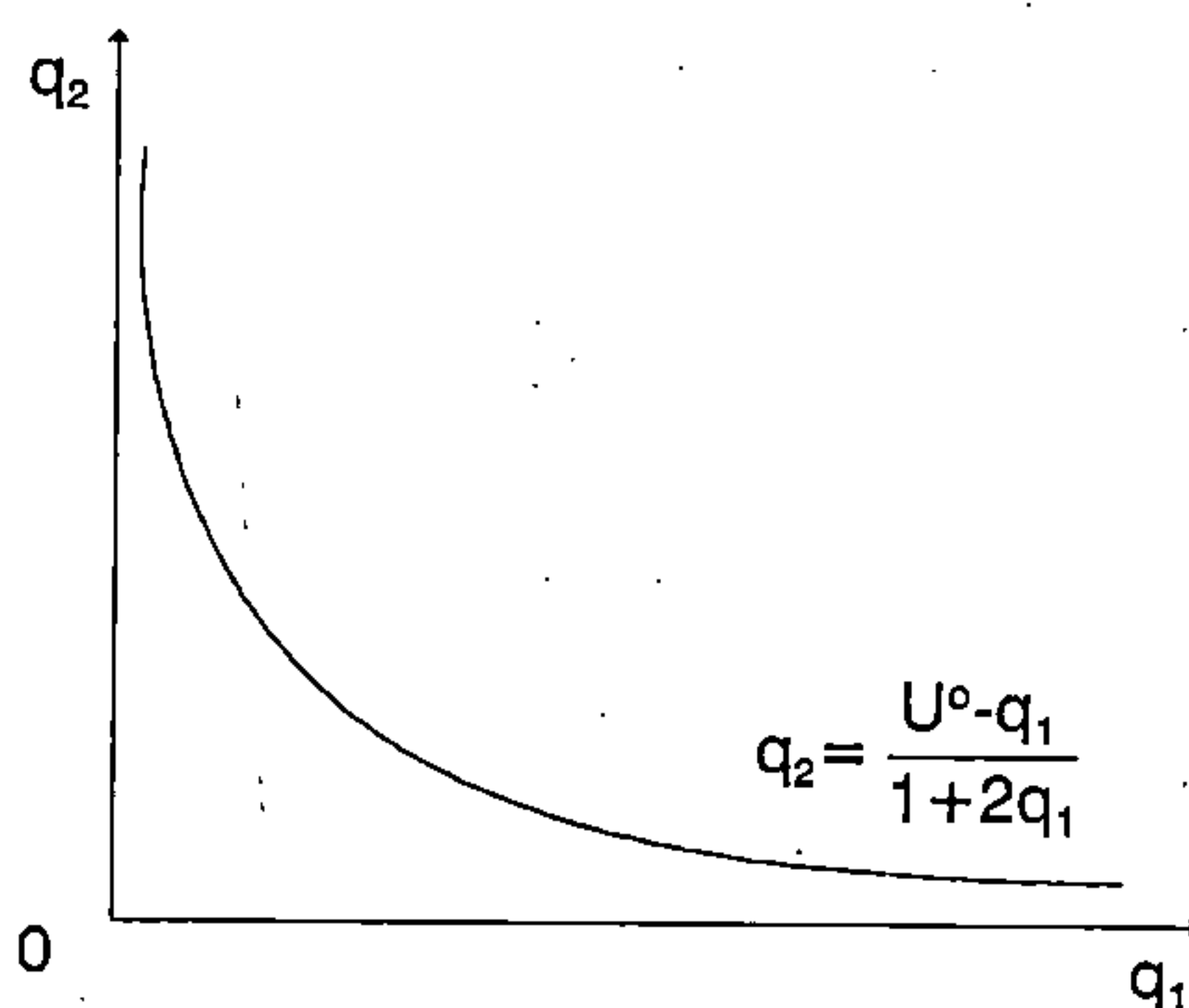
$$\frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = - \left[\frac{-2(1+2q_2) - 2(1+2q_2)}{(1+2q_1)^2} \right]$$

$$\frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = - \left[\frac{-4(1+2q_2)}{(1+2q_1)^2} \right] > 0$$

$$\frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = - \left[\frac{-}{+} \right] > 0$$

Es convexa vista desde el origen. La $TMgS_{q_2/q_1}$ decreciente se observa en el siguiente gráfico.

Gráfico N° I.1.6



8. Dada la siguiente función de utilidad: $U = q_1^{1/2} q_2^{3/2}$

y la recta presupuestal: $60 = 3q_1 + 2q_2$,

Determine las condiciones de primer y segundo orden que maximizan la utilidad del consumidor.

Respuesta:

- a) **Primer método (igualar pendientes):** Se sabe que en equilibrio la tasa marginal de sustitución de q_2 por q_1 debe ser igual a la relación de precios relativos (P_1^0 / P_2^0):

$$TMgS_{q_2/q_1} \equiv \frac{f_1}{f_2} = \frac{P_1^0}{P_2^0}$$

Determinando las derivadas parciales:

$$f_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = q_2^{3/2} \frac{1}{2} q_1^{-1/2}$$

$$f_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = q_1^{1/2} \frac{3}{2} q_2^{1/2}$$

y sustituyéndolas en la condición de equilibrio:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{P_1^0}{P_2^0}$$

$$\frac{2q_2^{3/2}}{2q_1^{1/2} 3q_1^{1/2} q_2^{1/2}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{q_2^{3/2}}{3q_1 q_2^{1/2}} = \frac{3}{2}$$

$$2q_2 = 9q_1$$

$$q_2 = \frac{9}{2} q_1$$

Esta relación se reemplaza en la recta presupuestal:

$$60 = 3q_1 + 2q_2$$

$$60 = 3q_1 + 2\left[\frac{9}{2}q_1\right]$$

$$60 = 3q_1 + 9q_1$$

$$60 = 12q_1$$

$$q_1 = 5$$

El resultado q_1 se reemplaza en la recta presupuestal:

$$60 = 3q_1 + 2q_2$$

$$60 = 15 + 2q_2$$

$$45 = 2q_2$$

$$q_2 = \frac{45}{2}$$

b) Segundo método (método de Lagrange):

$$L = q_1^{1/2} q_2^{3/2} + \lambda[60 - 3q_1 - 2q_2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{1}{2} q_2^{3/2} q_1^{-1/2} - 3\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{3}{2} q_1^{1/2} q_2^{1/2} - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 60 - 3q_1 - 2q_2 = 0$$

De la primera y segunda derivadas:

$$\frac{2q_2^{3/2}q_1^{-1/2}}{2(3)q_1^{1/2}q_2^{1/2}} = \frac{3}{2}$$

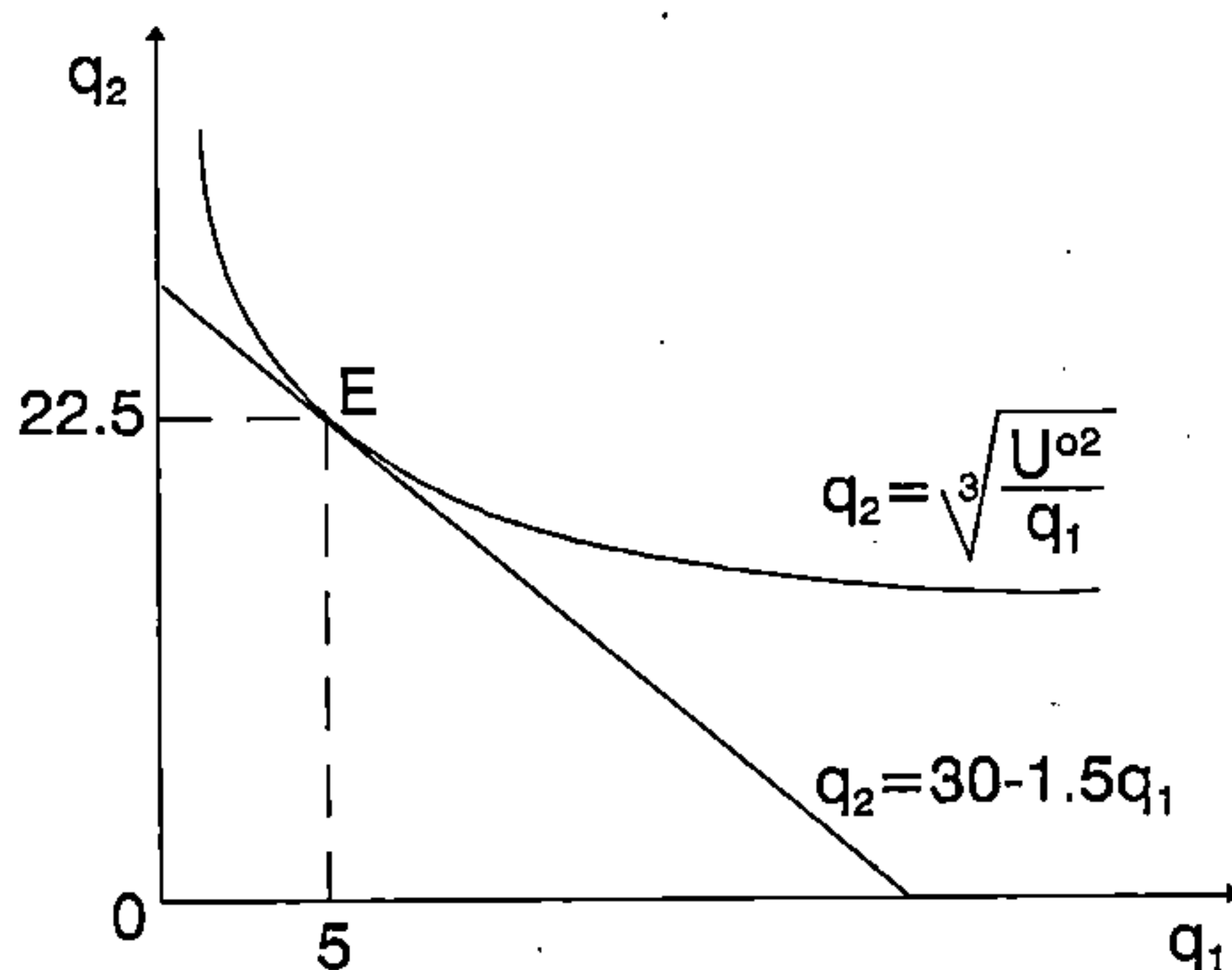
$$\frac{q_2^{3/2}q_1^{-1/2}}{q_1^{1/2}q_2^{1/2}} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{9}{2}$$

$$q_2 = q_1 \frac{9}{2}$$

En adelante se siguen los pasos del primer método. El equilibrio se puede observar en el gráfico N° I.1.7.

Gráfico N° I.1.7



9. Se tienen las siguientes ecuaciones de la función de utilidad ordinal y la recta presupuestal de un individuo:

$$U = q_1^{3/2} q_2^{5/3}$$

$$100 = 3q_1 + 5q_2$$

Determinar:

- Los valores óptimos de consumo.
- La convexidad de la curva de indiferencia vista desde el origen en el punto de equilibrio.

Respuesta:

- a) **Óptimos de consumo:**

$$L = q_1^{3/2} q_2^{5/3} + \lambda [100 - 3q_1 - 5q_2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = q_2^{5/3} \frac{3}{2} q_1^{1/2} - 3\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = q_1^{3/2} \frac{5}{3} q_2^{2/3} - 5\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - 3q_1 - 5q_2 = 0$$

De la primera y segunda derivadas:

$$\lambda = \frac{3q_2^{5/3} q_1^{1/2}}{(2)(3)} = \frac{q_2^{5/3} q_1^{1/2}}{2}$$

$$\lambda = \frac{5q_1^{3/2} q_2^{2/3}}{(3)(5)} = \frac{q_2^{2/3} q_1^{3/2}}{3}$$

Igualando:

$$\frac{q_2^{5/3} q_1^{1/2}}{2} = \frac{q_2^{2/3} q_1^{3/2}}{3}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{q_2^{2/3} q_1^{3/2}}{q_2^{5/3} q_1^{1/2}}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{q_1}{q_2}$$

$$q_1 = \frac{3}{2} q_2$$

Esta relación se reemplaza en la restricción presupuestal.

$$100 = 3q_1 + 5q_2$$

$$100 = 3\left(\frac{3}{2}q_2\right) + 5q_2$$

$$100 = \frac{9}{2}q_2 + 5q_2$$

$$100 = \frac{19}{2}q_2$$

$$q_2 = \frac{200}{19} \cong 10.5$$

$$q_1 = \frac{300}{19} \cong 15.8$$

Condición de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_1^2} = \frac{3}{2} q_2^{5/3} \frac{1}{2} q_1^{-1/2}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{3}{2} q_1^{1/2} \frac{5}{3} q_2^{2/3}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial \lambda} = -3$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{5}{3} q_2^{2/3} \frac{3}{2} q_1^{1/2}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_2^2} = \frac{5}{3} q_1^{3/2} \frac{2}{3} q_2^{-1/3}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_2 \partial \lambda} = -5$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial q_1} = -3$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial q_2} = -5$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 0$$

El hessiano orlado:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4} q_1^{-1/2} q_2^{5/3} & \frac{5}{2} q_1^{1/2} q_2^{2/3} & -3 \\ \frac{5}{2} q_1^{1/2} q_2^{2/3} & \frac{10}{9} q_1^{3/2} q_2^{-1/3} & -5 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

$$-3 \begin{vmatrix} \frac{5}{2} q_1^{1/2} q_2^{2/3} & \frac{10}{9} q_1^{3/2} q_2^{-1/3} \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} \frac{3}{4} q_1^{-1/2} q_2^{5/3} & \frac{5}{2} q_1^{1/2} q_2^{2/3} \\ -3 & -5 \end{vmatrix} > 0$$

$$-3 \left[-\frac{25}{2} q_1^{1/2} q_2^{2/3} + \frac{10}{3} q_1^{3/2} q_2^{-1/3} \right] + 5 \left[-\frac{15}{4} q_1^{-1/2} q_2^{5/3} + \frac{15}{2} q_1^{1/2} q_2^{2/3} \right] > 0$$

$$\frac{75}{2}q_1^{1/2}q_2^{2/3} - 10q_1^{3/2}q_2^{-1/3} - \frac{75}{4}q_1^{-1/2}q_2^{5/3} + \frac{75}{2}q_1^{1/2}q_2^{2/3} > 0$$

$$75q_1^{1/2}q_2^{2/3} - 10q_1^{3/2}q_2^{-1/3} - \frac{75}{4}q_1^{-1/2}q_2^{5/3} > 0$$

$$q_1^{1/2}q_2^{2/3} \left[75 - 10q_1q_2^{-1} - \frac{75}{4}q_1^{-1}q_2 \right] > 0$$

$$q_1^{1/2}q_2^{2/3} \left[75 - 10\left(\frac{q_1}{q_2}\right) - \frac{75}{4}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) \right] > 0$$

Condición de primer orden:

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{2}{3}$$

Reemplazando:

$$q_1^{1/2}q_2^{2/3} \left[75 - 10\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{75}{4}\left(\frac{2}{3}\right) \right] > 0$$

$$q_1^{1/2}q_2^{2/3} [75 - 15 - 12.5] > 0$$

$$47.5q_1^{1/2}q_2^{2/3} > 0$$

Ya que q_1 y $q_2 > 0$ en el punto de solución, y por lo tanto se cumple la condición de segundo orden.



b) Convexidad de la curva de indiferencia:

Para determinar la convexidad de las curvas de indiferencia generadas por la función de utilidad ordinal

$$U = q_1^{3/2} q_2^{5/3}$$

se selecciona una de las curvas de indiferencia $U = U^0$

Determinación de la $TMgS_{q_2/q_1}$:

$$dU^0 = 0 = q_2^{5/3} \frac{3}{2} q_1^{1/2} dq_1 + q_1^{3/2} \frac{5}{3} q_2^{2/3} dq_2 = 0$$

$$TMgS_{q_2/q_1} = -\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{(3)(3)q_2^{5/3}q_1^{1/2}}{(2)(5)q_1^{3/2}q_2^{2/3}} = \frac{9q_2}{10q_1}$$

La $TMgS_{q_2/q_1}$ debe ser creciente:

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2} < 0 \quad \text{ó} \quad \frac{d^2q_2}{dq_1^2} > 0$$

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = -\frac{9}{10} \left[\frac{q_1 \left(\frac{dq_2}{dq_1} \right) - q_2}{q_1^2} \right]$$

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = -\frac{9}{10} \left[\frac{q_1 \left(-\frac{9q_2}{10q_1} \right) - q_2}{q_1^2} \right]$$

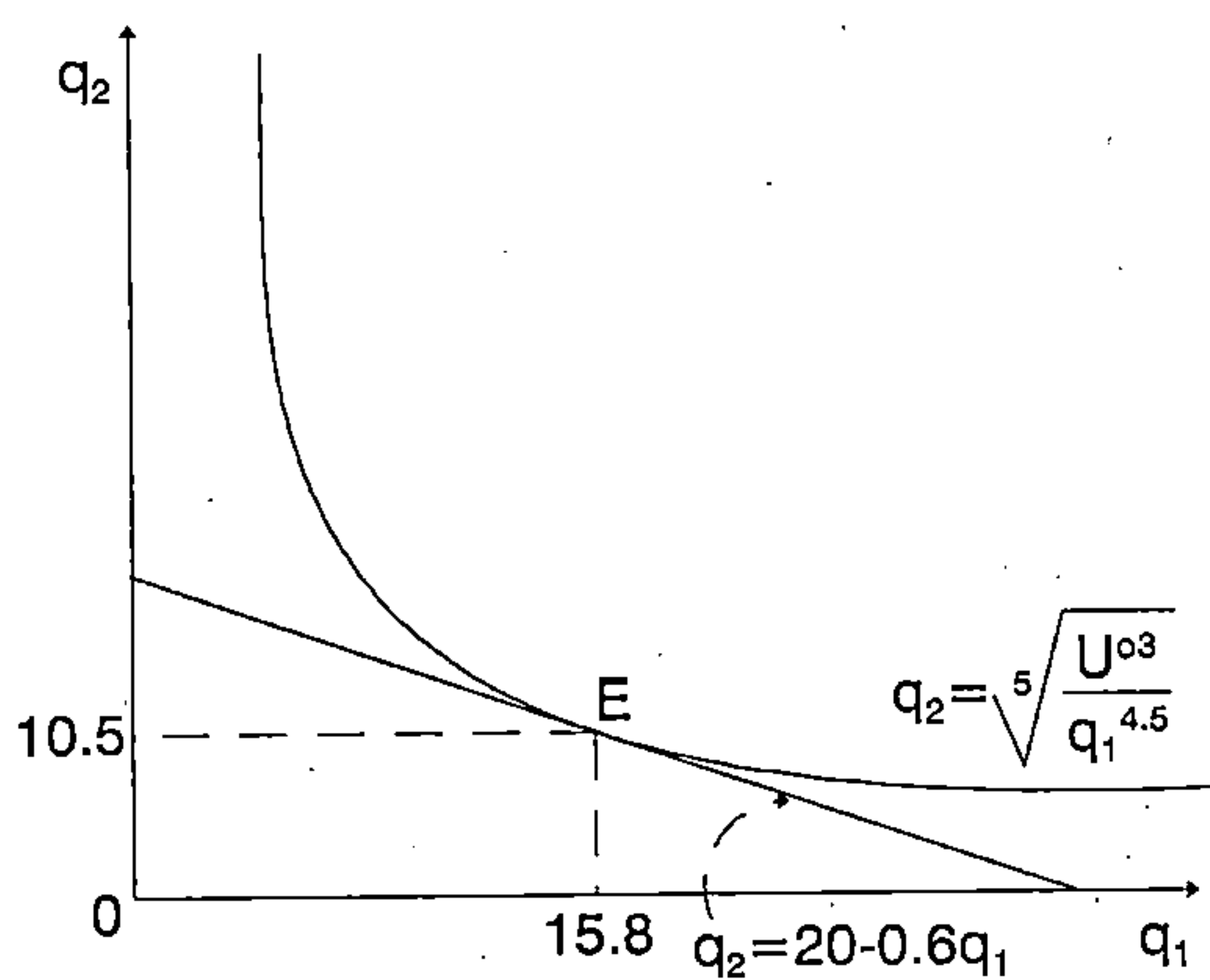
$$\frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = -\frac{9}{10} \left[\frac{-\frac{9}{10} q_2 - q_2}{q_1^2} \right]$$

$$\frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = -\frac{9}{10} \left[\frac{-\frac{19}{10} q_2}{q_1^2} \right] > 0$$

$$\frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = -\frac{9}{10} \left[\frac{-}{+} \right] > 0$$

Son convexas vistas desde el origen

Gráfico N° I.1.8



10. Un consumidor presenta la siguiente función de utilidad ordinal:

$$U = q_1^{2/3} q_2$$

así como la siguiente restricción presupuestal:

$$50 = q_1 + 2q_2$$

- a) ¿Cuáles son los valores de q_1 y q_2 que le permiten alcanzar un máximo de utilidad?
- b) ¿Cuál es la condición de segundo orden para un máximo de utilidad?

Respuesta:

- a) Establézcase la función de Lagrange:

$$L = q_1^{2/3} q_2 + \lambda [50 - q_1 - 2q_2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{2}{3} q_1^{-1/3} q_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = q_1^{2/3} - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 50 - q_1 - 2q_2 = 0$$

De la primera y segunda derivadas parciales se obtiene el valor de λ :

$$\lambda = \frac{2q_2}{3q_1^{1/3}} = \frac{q_1^{2/3}}{2}$$

$$4q_2 = 3q_1$$

$$q_1 = \frac{4}{3}q_2$$

Reemplazando el valor de q_1 en la recta presupuestal:

$$50 = q_1 + 2q_2$$

$$50 = \left(\frac{4q_2}{3}\right) + 2q_2$$

$$50 = \frac{10}{3}q_2$$

$$q_2 = 15$$

Y

$$50 - 2q_2 = q_1$$

$$q_1 = 50 - 30$$

$$q_1 = 20$$

- b) La condición de segundo orden para un máximo de utilidad establece que el siguiente hessiano orlado sea positivo:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_2 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial q_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial q_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} \end{vmatrix} > 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_1^2} = \frac{2}{3} q_2 \left(-\frac{1}{3} \right) q_1^{-4/3} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{2}{3} q_1^{-1/3} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial \lambda} = -1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{2}{3} q_1^{-1/3} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q_2^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q_2 \partial \lambda} = -2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial q_1} = -1 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial q_2} = -2 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 0$$

Reemplazando valores en el hessiano orlado:

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{9} q_1^{-4/3} q_2 & \frac{2}{3} q_1^{-1/3} & -1 \\ \frac{2}{3} q_1^{-1/3} & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

$$-1 \begin{vmatrix} \frac{2}{3} q_1^{-1/3} & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -\frac{2}{9} q_1^{-4/3} q_2 & \frac{2}{3} q_1^{-1/3} \\ -1 & -2 \end{vmatrix} > 0$$

$$\frac{4}{3} q_1^{-1/3} + 2 \left[\frac{4}{9} q_1^{-4/3} q_2 + \frac{2}{3} q_1^{-1/3} \right] > 0$$

$$\frac{4}{3} q_1^{-1/3} + \frac{8}{9} q_1^{-4/3} q_2 + \frac{4}{3} q_1^{-1/3} > 0$$

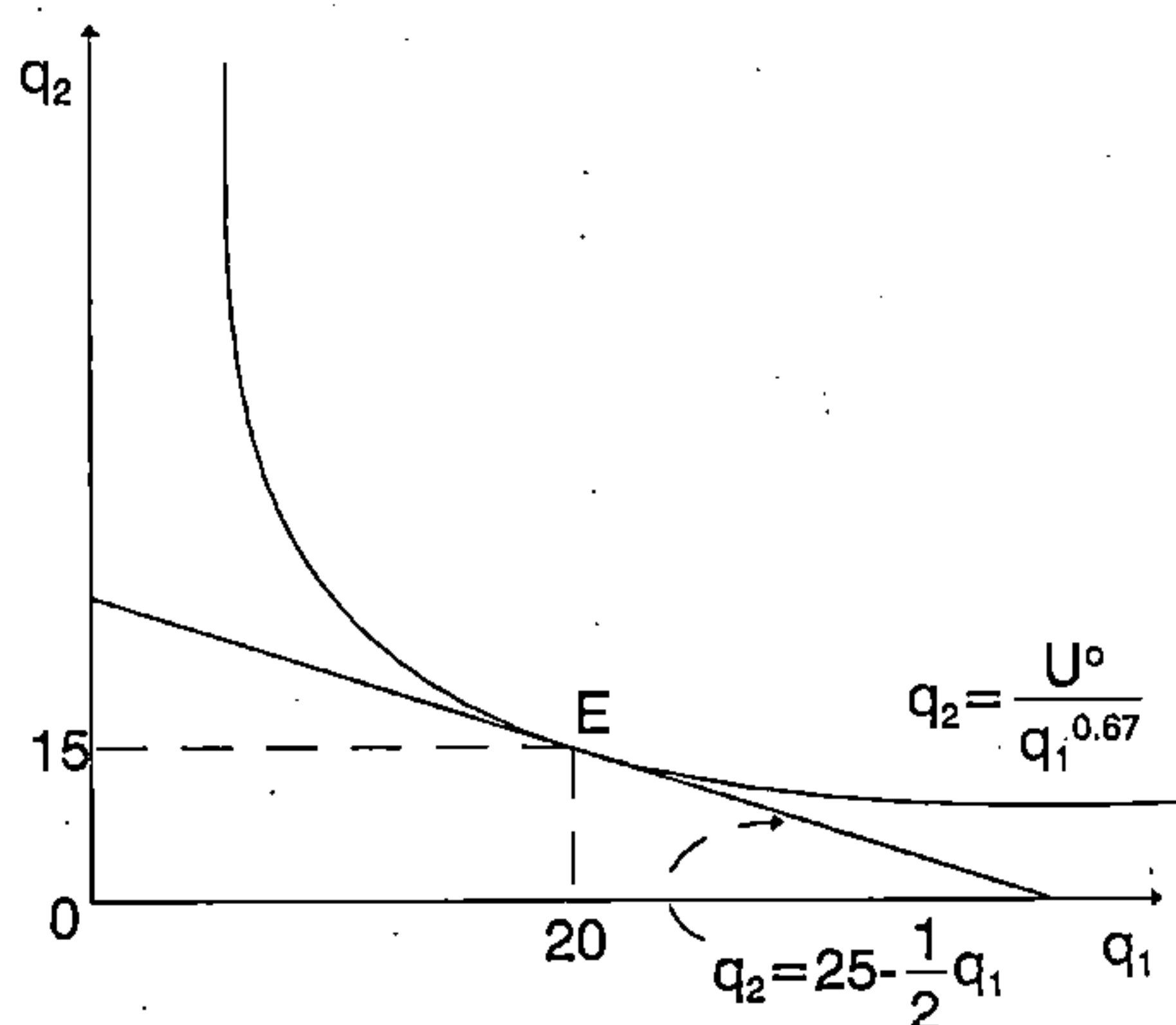
$$\frac{8}{3} q_1^{-1/3} + \frac{8}{9} q_1^{-4/3} q_2 > 0$$

$$\frac{8}{3} q_1^{-1/3} \left[1 + \frac{1}{3} q_1^{-1} q_2 \right] > 0$$

$$\frac{8}{3 q_1^{1/3}} \left[1 + \frac{q_2}{3 q_1} \right] > 0$$

Lo que se cumple ya que q_1 y $q_2 > 0$. La curva de indiferencia donde ocurre la tangencia con la recta de presupuesto es convexa vista desde el origen.

Gráfico N° I.1.9



11. Un consumidor presenta la siguiente función de utilidad ordinal:

$$U = q_1 q_2$$

así como la siguiente restricción presupuestal:

$$100 = q_1 + 3q_2.$$

- a) ¿Cuáles son los valores de q_1 y q_2 que le permiten alcanzar un máximo de utilidad?
- b) ¿Cuál es la tasa marginal de sustitución de q_2 por q_1 ($TMgS_{q_2/q_1}$)?
- c) Compruebe la convexidad de las curvas de indiferencia.

Respuesta:

a) Valores de equilibrio: Despejando q_2 de la recta presupuestal:

$$q_2 = \frac{100 - q_1}{3}$$

y reemplazando en la función de utilidad:

$$U = q_1 \left[\frac{100 - q_1}{3} \right]$$

$$U = \frac{100}{3}q_1 - \frac{q_1^2}{3}$$

y derivando con respecto a q_1 :

$$\frac{dU}{dq_1} = \frac{100}{3} - \frac{2}{3}q_1 = 0$$

$$q_1 = \left(\frac{100}{3} \right) \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$q_1 = 50$$

Reemplazando en la restricción presupuestal:

$$100 = 50 + 3q_2$$

$$q_2 = \frac{50}{3}$$

$$\frac{d^2U}{dq_1^2} = -\frac{2}{3} < 0$$

Para un máximo de la función de utilidad.

b) Tasa marginal de sustitución de q_2 por q_1

$$TMgS_{q_2/q_1} = -\frac{dq_2}{dq_1}$$

$$U^0 = q_1 q_2$$

$$dU^0 = q_1 dq_2 + q_2 dq_1 = 0$$

$$TMgS_{q_2/q_1} \equiv \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{q_2}{q_1}$$

c) Convexidad:

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2} < 0 \quad \text{ó} \quad \frac{d^2q_2}{dq_1^2} > 0$$

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{q_2}{q_1}$$

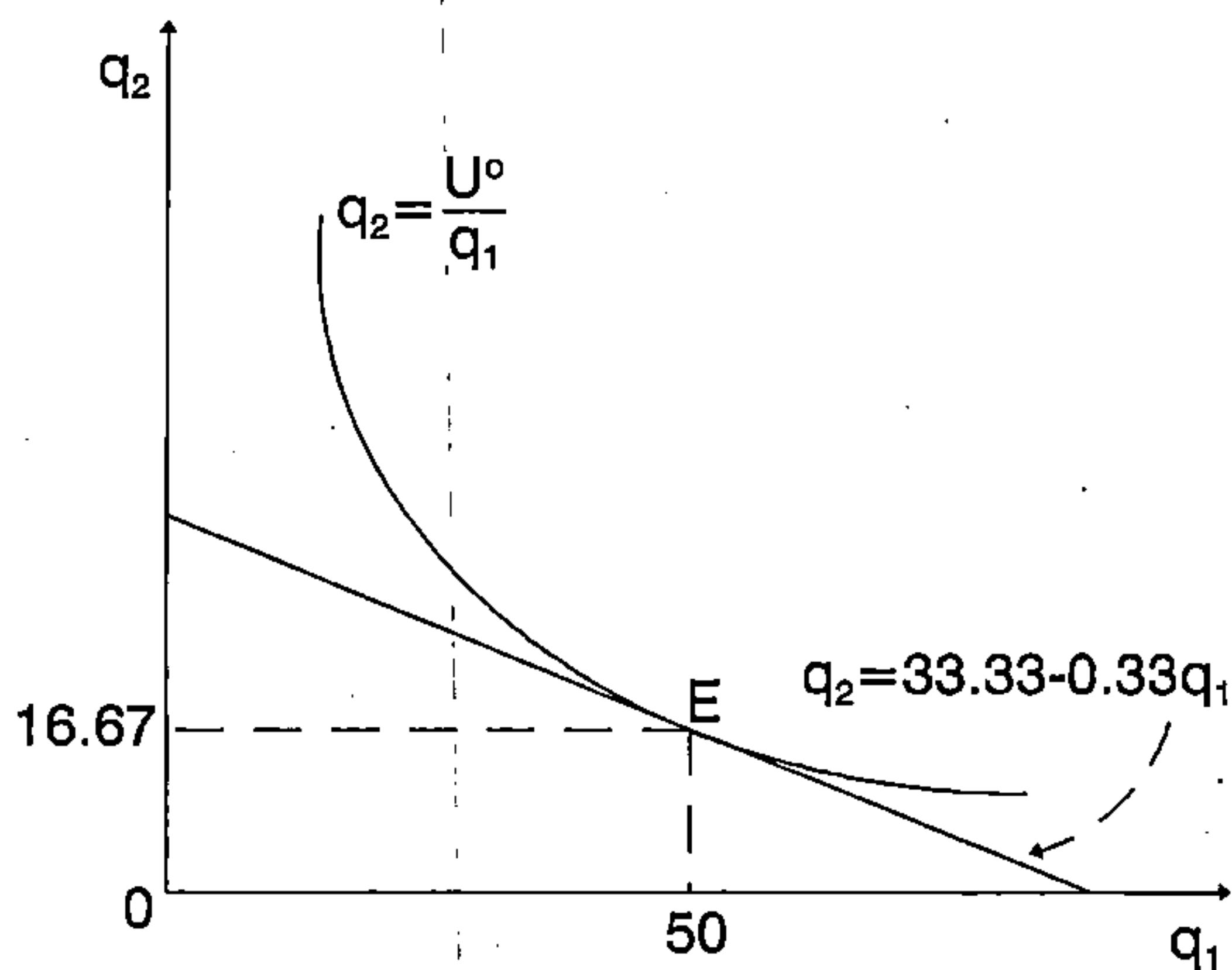
$$\frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = - \left[\frac{q_1 \left(\frac{dq_2}{dq_1} \right) - q_2}{q_1^2} \right]$$

$$\frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = - \left[\frac{q_1 \left(-\frac{q_2}{q_1} \right) - q_2}{q_1^2} \right]$$

$$\frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = - \left[\frac{(-2q_2)}{q_1^2} \right] > 0$$

Son convexas vistas desde el origen como se observa en el gráfico N° I.1.10

Gráfico N° I.1.10



I.2 Curva renta-consumo y curva de Engel

1. Si la función de utilidad es: $U = q_1^a q_2$ donde $a > 0$

y la recta presupuestal es: $I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2$,

demostrar que la curva renta-consumo y la curva de Engel para q_1 y q_2 son rectas.

Respuesta:

a) Curva renta-consumo: La condición de equilibrio del consumidor:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{P_1^0}{P_2^0}$$

$$f_1 = a q_2 q_1^{a-1}$$

$$f_2 = q_1^a$$

$$\frac{a q_2 q_1^{a-1}}{q_1^a} = \frac{P_1^0}{P_2^0}$$

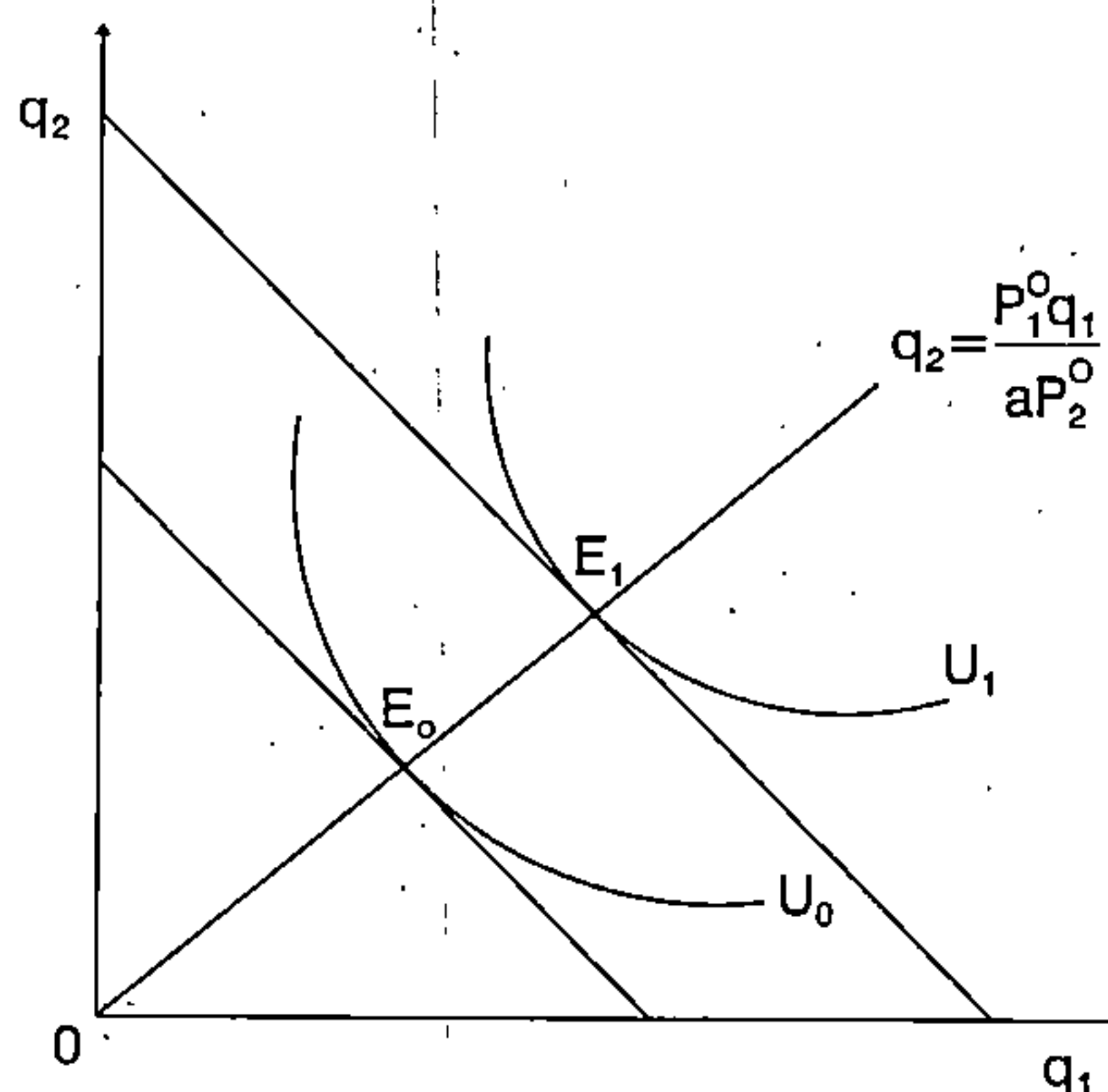
$$P_1^0 q_1^a - a P_2^0 q_2 q_1^{a-1} = 0$$

$$q_2 = \frac{P_1^0 q_1^a}{a P_2^0 q_1^{a-1}}$$

$$q_2 = \frac{P_1^0 q_1}{a P_2^0}$$

que es la ecuación de una recta que relaciona los consumos de q_1 y q_2 de equilibrio, según varíe el ingreso, *ceteris paribus* (curva renta-consumo). Ver gráfico N° I.2.1.

Gráfico N° I.2.1



b) Cálculo de la curva de Engel (q_1):

La ecuación de la curva renta-consumo:

$$q_2 = \frac{P_1^0 q_1}{a P_2^0}$$

Pero: $I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2$

Reemplazando q_2 :

$$I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 \left[\frac{P_1^0 q_1}{a P_2^0} \right]$$

$$I^0 = P_1^0 q_1 + \frac{P_1^0 q_1}{a}$$

$$I^0 = \frac{a P_1^0 q_1 + P_1^0 q_1}{a}$$

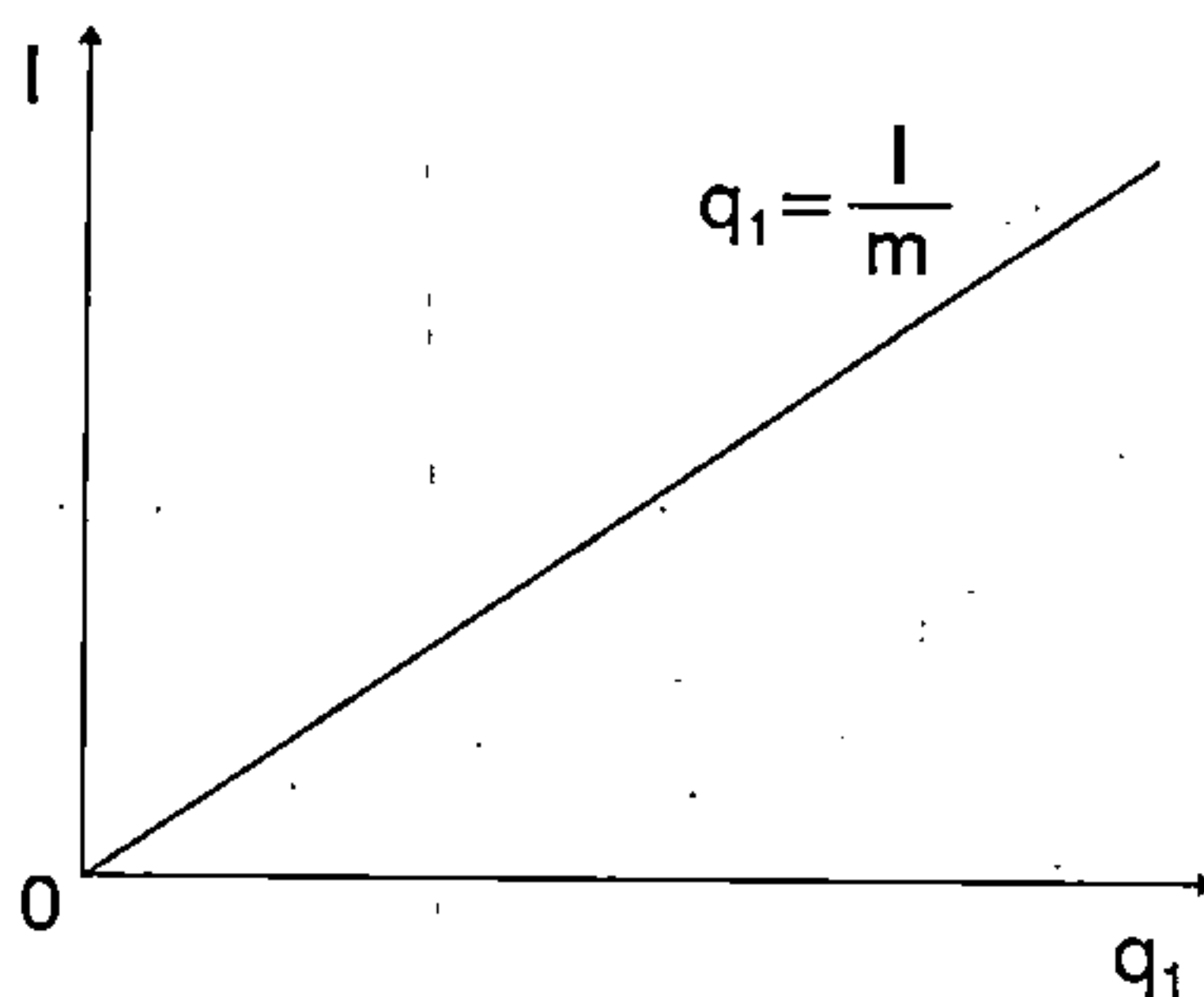
$$I^0 = \left[\frac{a P_1^0 + P_1^0}{a} \right] q_1$$

Ecuación de una recta, que es la curva de Engel para q_1 .

$$I^0 = m q_1$$

q_1 es un bien normal ya que el consumo de q_1 crece siempre, cuando el ingreso se incrementa. Ver gráfico N° I.2.2.

Gráfico N° I.2.2

Curva de Engel para q_1

donde $\frac{dq_1}{dI} = \frac{1}{m} > 0$

- c) **Cálculo de la curva de Engel (q_2):** Partiendo de la ecuación de la curva renta-consumo:

$$P_1^0 q_1^a = P_2^0 q_2^a \frac{q_1^a}{q_1}$$

$$P_1^0 q_1 = a P_2^0 q_2$$

$$q_1 = \frac{a P_2^0 q_2}{P_1^0}$$

Que se lleva a la ecuación de la recta presupuestal

$$I^0 = P_1^0 \left[\frac{aP_2^0 q_2}{P_1^0} \right] + P_2^0 q_2$$

$$I^0 = (aP_2^0 + P_2^0) q_2$$

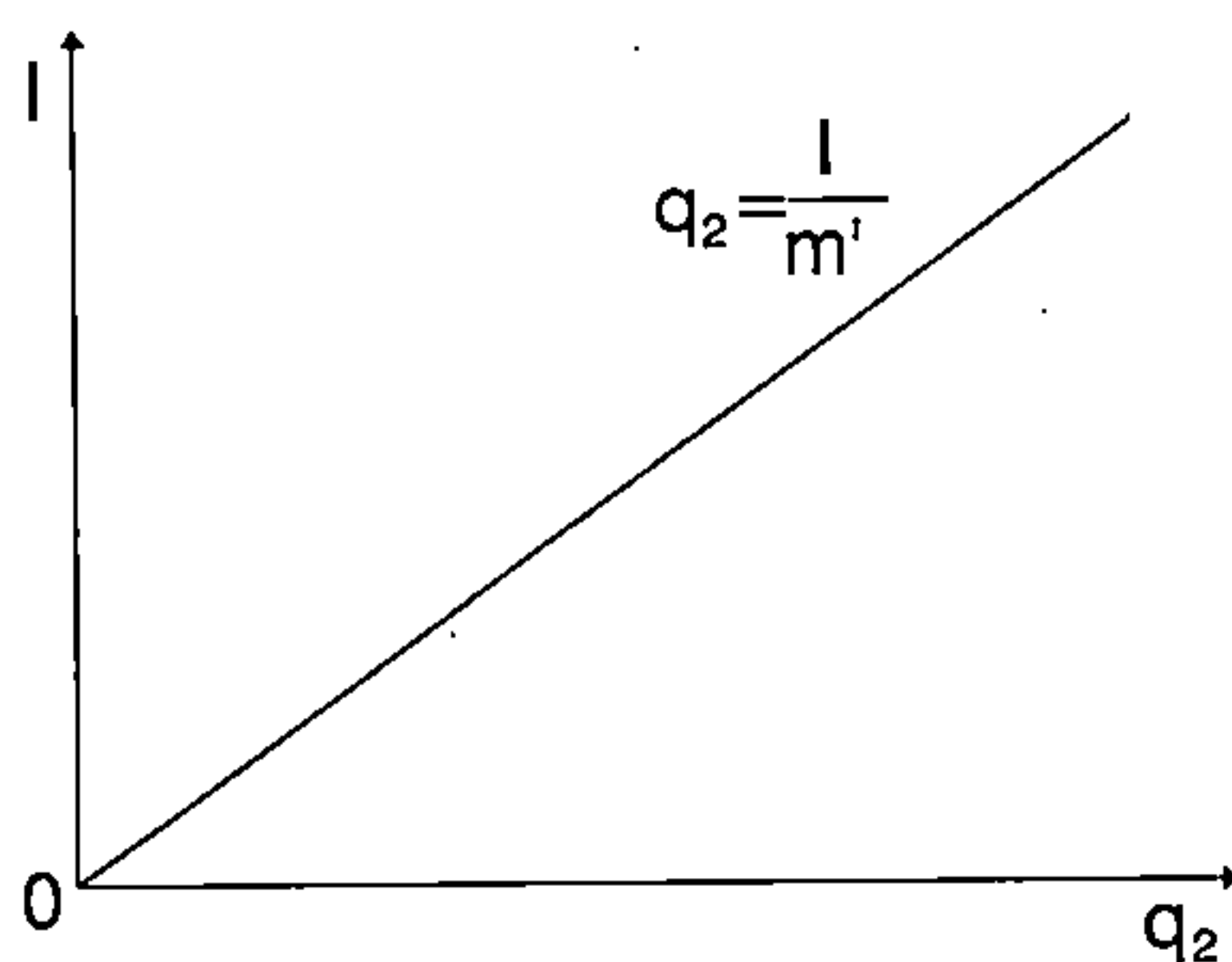
$$I^0 = m' q_2$$

$$q_2 = \frac{I}{m'}$$

$$\frac{dq_2}{dI} = \frac{1}{m'} > 0$$

q_2 también es un bien “normal” (ver gráfico N° I.2.3).

Gráfico N° I.2.3



Curva de Engel para q_2

donde $\frac{dq_2}{dI} = \frac{1}{m'} > 0$

2. Un consumidor se encuentra en equilibrio sobre la curva de indiferencia:

$$q_2 = \frac{81}{q_1}$$

Los precios de los bienes son iguales a 20. Se sabe que cualquiera sea el nivel de ingresos del consumidor, éstos los repartirá en partes iguales entre q_1 y q_2 .

Determine:

- a) q_1 y q_2 de equilibrio.
- b) La expresión formal de la recta presupuestal.

Respuesta:

- a) El consumidor gasta su ingreso en partes iguales y dado que los precios son los mismos:

$$P_1^0 q_1 = P_2^0 q_2$$

$$q_1 = q_2$$

La curva de indiferencia señala el punto óptimo en el consumo en la intersección con la curva renta consumo.

$$q_2 = \frac{81}{q_1}$$

$$q_1^2 = 81$$

$$q_1 = +9$$

$$q_2 = +9$$

Luego, el ingreso necesario será:

$$I = 20(9) + 20(9)$$

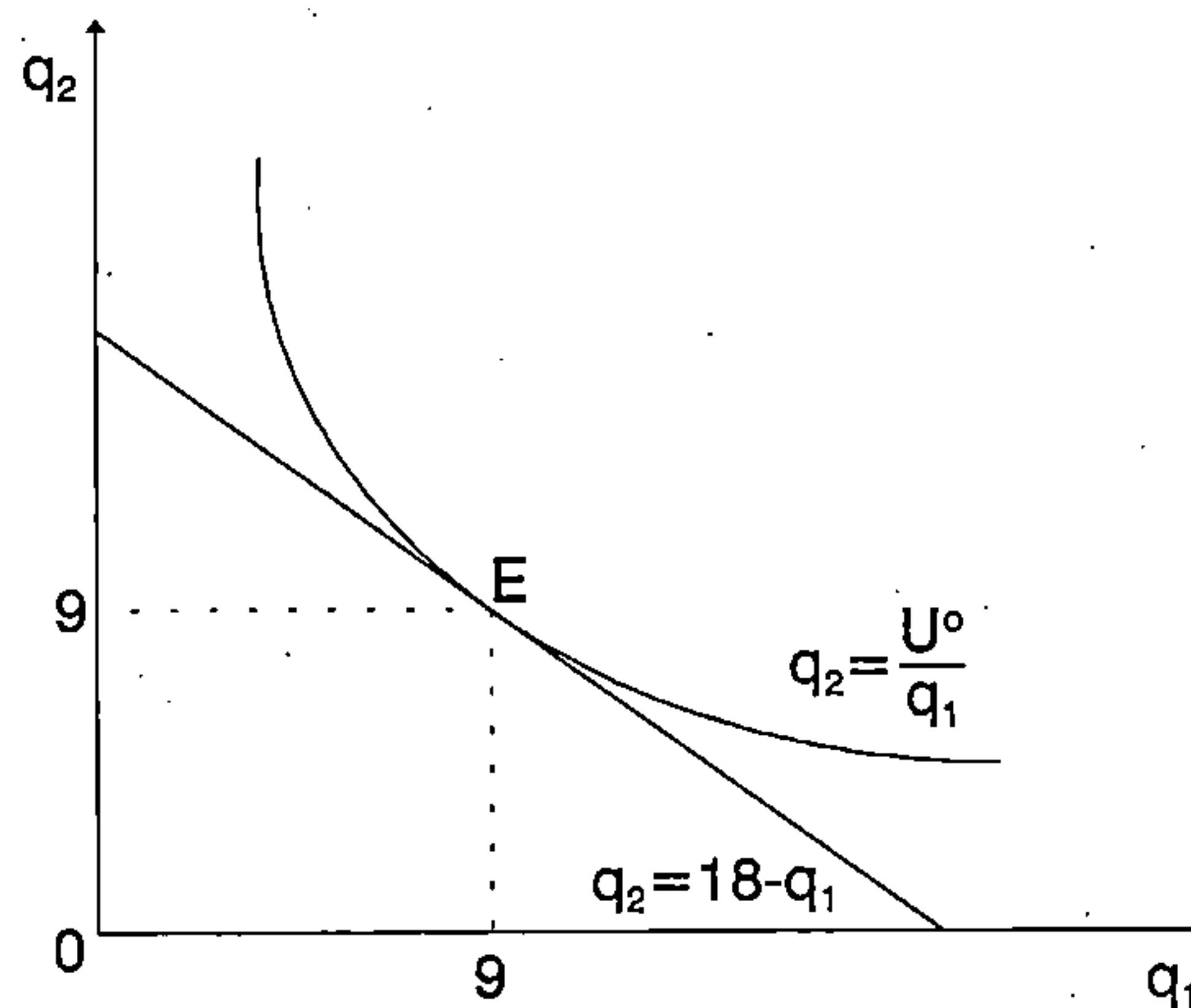
$$I = 180 + 180$$

$$I = 360$$

b) y la expresión formal de la recta de presupuesto:

$$360 = 20q_1 + 20q_2$$

Gráfico N° 1.2.4



3. Un consumidor puede adquirir 148 unidades de q_1 o 592 unidades de q_2 , si gastase su ingreso (I) en sólo uno de los bienes. Su mapa de indiferencia tiene la propiedad de que todas las curvas de indiferencia tienen una pendiente que puede ajustarse a:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = q_2 = -\frac{64}{q_1^2} \quad (\text{pendiente en función al valor de } q_1)$$

- a) ¿Qué combinación (q_1, q_2) maximiza su utilidad?
- b) Si su ingreso crece en 50%, ¿cuánto adquirirá de q_1 y q_2 ?

Respuesta:

- a) La pendiente de las curvas de indiferencia es la $TMgS_{q_2/q_1}$:

$$q_2 = -\frac{dq_2}{dq_1} = TMgS_{q_2/q_1} = -\frac{64}{q_1^2}$$

Los datos del problema $\frac{I^0}{P_2^0} = 592$ y $\frac{I^0}{P_1^0} = 148$ se reemplazan en la relación de precios:

$$-\frac{P_1^0}{P_2^0} = \frac{592}{148} = -4$$

$$TMgS_{q_2/q_1} = -\frac{P_1^0}{P_2^0}$$

Condición de equilibrio del consumidor

$$-\frac{64}{q_1^2} = -4$$

$$q_1^2 = \frac{64}{4} = 16$$

$$q_1 = 4$$

El valor de $q_1 = 4$ se reemplaza en la recta presupuestal para hallar el valor de q_2 :

$$q_2 = 592 - \frac{P_1^0}{P_2^0} q_1$$

$$q_2 = 592 - 4(4)$$

$$q_2 = 576$$

- b) Al crecer el ingreso en 50% (*ceteris paribus*), las intersecciones crecen en la misma proporción. Las nuevas intersecciones son:

$$\left(\frac{I'}{P_2} \right) = (592)(1.5) = 888$$

$$\left(\frac{I'}{P_1} \right) = (148)(1.5) = 222$$

y

$$\frac{P_1^0}{P_2^0} = 4$$

Reemplazando en la condición de primer orden:

$$TMgS_{q_2/q_1} = -\frac{P_1^0}{P_2^0}$$

$$-\frac{64}{q_1^2} = -4$$

$$q_1 = 4$$

Reemplazando en la ecuación de la nueva recta presupuestal:

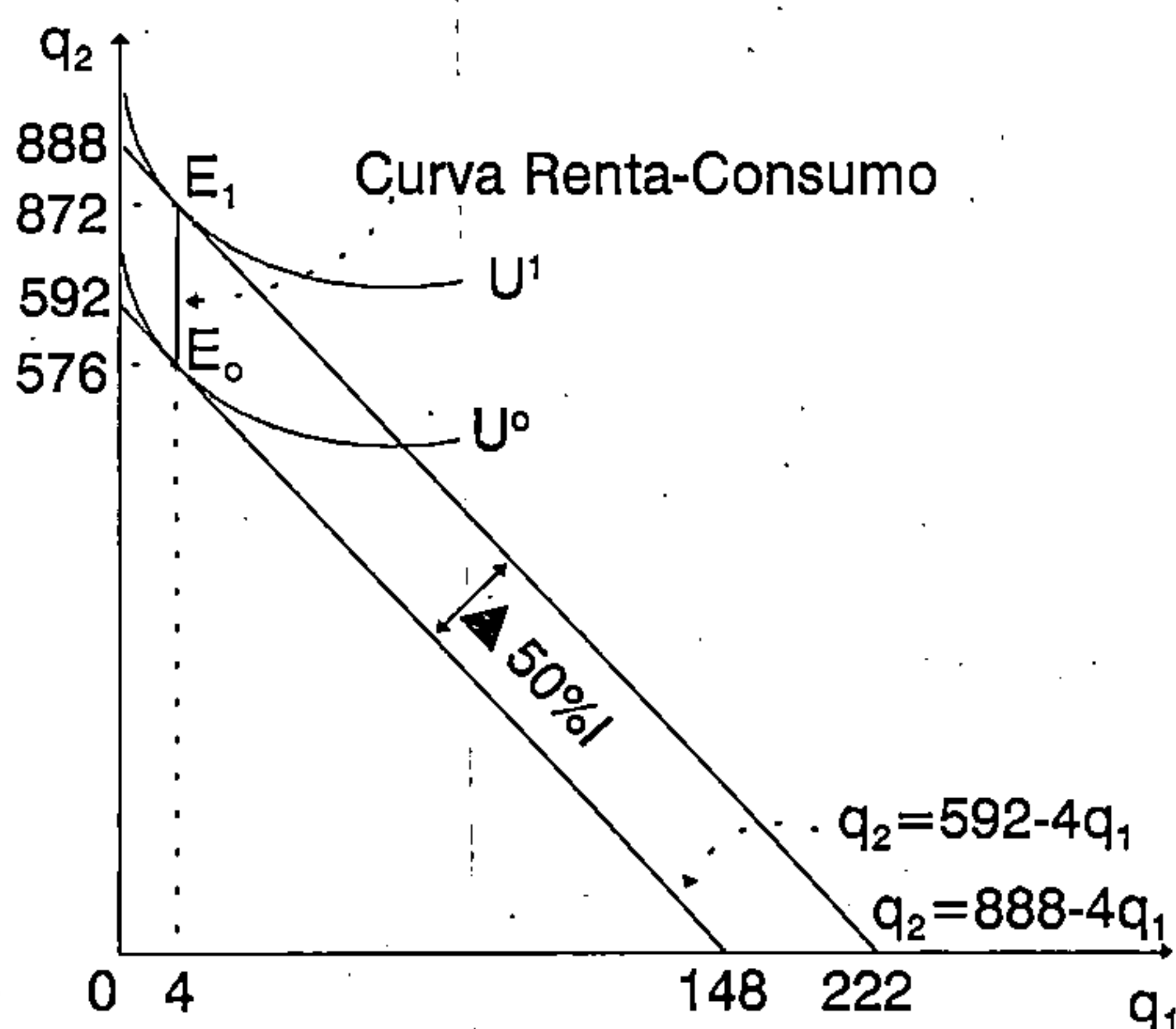
$$q_2 = 888 - 4q_1$$

$$q_2 = 888 - 4(4)$$

$$q_2 = 872$$

En este ejercicio, el incremento en el ingreso se canaliza sólo al bien q_2 razón por la que la curva renta-consumo es una recta perpendicular al eje de $q_1 = 4$. Todas las curvas de indiferencia tienen la misma pendiente en los puntos de igual abcisa como se observa en el siguiente gráfico:

Gráfico Nº 1.2.5



4. Del mapa de indiferencia de un consumidor, se han extraído las siguientes curvas de indiferencia:

a)
$$q_2^0 = \frac{160}{q_1^{02}}$$

b)
$$q_2^1 = \frac{540}{q_1'^2}$$

La primera determina la utilidad máxima obtenible con su ingreso actual representado por la recta de balance:

$$q_2^0 = 120 - 40q_1^0$$

Conociendo que en su mapa de indiferencia, la curva renta-consumo es una recta, ¿cuál es el nuevo punto de óptima combinación (q_1'', q_2'') que corresponde a un ingreso cinco veces mayor que el anterior?

Respuesta:

Primera combinación óptima:

$$q_2^0 = \frac{160}{q_1^{02}}$$

$$TMgS_{q_2/q_1} \equiv \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{320}{q_1^{03}}$$

Recta presupuestal:

$$q_2^0 = 120 - 40q_1^0$$

$$\frac{dq_2^0}{dq_1^0} = -40$$

$$TMgS_{q_2/q_1} = -\frac{P_1^0}{P_2^0} \quad \text{Condición de equilibrio}$$

$$-\frac{320}{q_1^{03}} = -40$$

$$q_1^{03} = 8$$

$$q_1^0 = 2$$

y

$$q_2^0 = \frac{160}{(2)^2}$$

$$q_2^0 = 40$$

Para determinar la ecuación de la curva renta-consumo, se requiere la segunda combinación óptima.

$$q_2' = \frac{540}{q_1'^2}$$

$$TMgS_{q_2/q_1} \equiv \frac{dq_2'}{dq_1'} = -\frac{1,080}{q_1'^3}$$

La pendiente de la recta presupuestal no varía: $\frac{P_1^0}{P_2^0} = -40$. Así:

$$-\frac{1,080}{q_1'^3} = -40$$

$$q_1'3 = \frac{1,080}{40} = 27$$

$$q_1' = 3$$

y

$$q_2' = \frac{540}{q_1'^2}$$

$$q_2' = \frac{540}{(3)^2} = \frac{540}{9}$$

$$q_2' = 60$$

Luego, los dos puntos de combinaciones óptimas A (2,40) y B (3,60) se pueden usar para determinar la ecuación de la curva renta-consumo.

Pendiente:
$$m = \frac{q_2' - q_2^0}{q_1' - q_1^0} = -\frac{60 - 40}{3 - 2} = -\frac{20}{1}$$

Que se reemplaza en la ecuación de la recta usando cualquiera de los puntos de equilibrio:

$$q_2 - q_2' = m(q_1 - q_1')$$

$$q_2 - 60 = 20(q_1 - 3)$$

$$q_2 = 20q_1 \quad \text{Ecuación de la curva renta-consumo}$$

Al ser el ingreso cinco veces mayor, *ceteris paribus*, las intersecciones de la recta presupuestal con los ejes se multiplican por cinco.

$$q_2 = 120(5) - 40q_1$$

$$q_2 = 600 - 40q_1$$

En la intersección de esta nueva recta con la curva renta-consumo se encuentra el consumo de equilibrio para un ingreso cinco veces mayor al inicial. Igualando ambas ecuaciones:

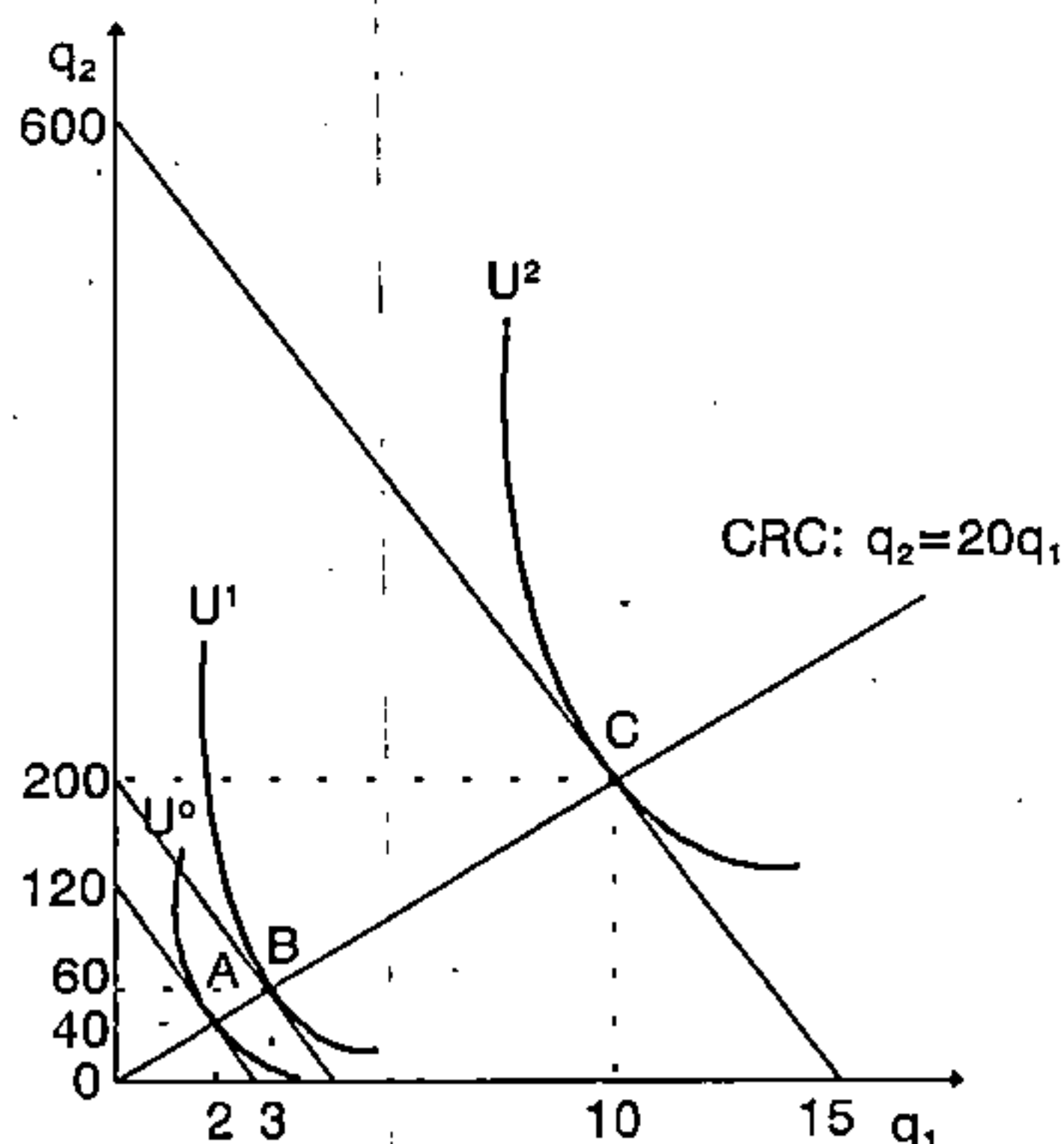
$$20q_1 = 600 - 40q_1$$

$$q_1'' = 10$$

Por lo tanto $q_2'' = 200$

y la nueva combinación óptima C (10,200). Ver gráfico N° I.2.6.

Gráfico N° I.2.6



5. Un consumidor de cigarrillos (q_1) y caramelos (q_2) posee la siguiente ecuación para su curva renta-consumo dentro de su mapa de indiferencia: $q_2 = 4q_1^2 + q_1$

En un primer momento el consumidor compraba 12 cigarrillos/día y 12 caramelos/día. Luego cambió sus compras a 7 cigarrillos/día y 15 caramelos/día.

Basándose en el principio de racionalidad del consumidor, ¿es alguna de las anteriores combinaciones óptima? Si no es así, ¿cuál es ésta?

Respuesta:

La curva renta-consumo muestra todas las combinaciones (q_1, q_2) óptimas, cuando varía el ingreso solamente. Entonces para ver si las dos combinaciones son óptimas bastará verificar si satisfacen la ecuación de la curva renta-consumo.

Combinación A (12,12)

$$q_2 = 4(12)^2 + 12$$

$$q_2 = 588 \neq 12$$

Combinación B (7,15)

$$q_2 = 4(7)^2 + 7$$

$$q_2 = 203 \neq 15$$

Ninguna de las combinaciones anteriores es óptima. Pero nótese que ambas combinaciones –aún cuando no sean óptimas– se encuentran al alcance del consumidor puesto que están sobre su recta presupuestal.

La ecuación de la recta presupuestal:

$$\frac{q_2 - q_2^0}{q_1 - q_1^0} = -\frac{q_2' - q_2^0}{q_1' - q_1^0}$$

Reemplazando valores:

$$\frac{q_2 - 12}{q_1 - 12} = \frac{15 - 12}{7 - 12}$$

$$5q_2 = 96 - 3q_1$$

$$q_2 = 19.2 - 0.6q_1 \quad \text{Recta presupuestal}$$

El punto óptimo "C" está donde la recta presupuestal es cruzada por la curva renta-consumo.

$$19.2 - 0.6q_1 = 4q_1^2 + q_1$$

$$4q_1^2 + 1.6q_1 - 19.2 = 0$$

$$q_1 = \frac{-1.6 \pm \sqrt{(1.6)^2 + 4(4)(19.2)}}{8}$$

$$q_1 = \frac{-1.6 + 17.6}{8}$$

$$q_1 = 2$$

Solución positiva

El consumo del otro bien será:

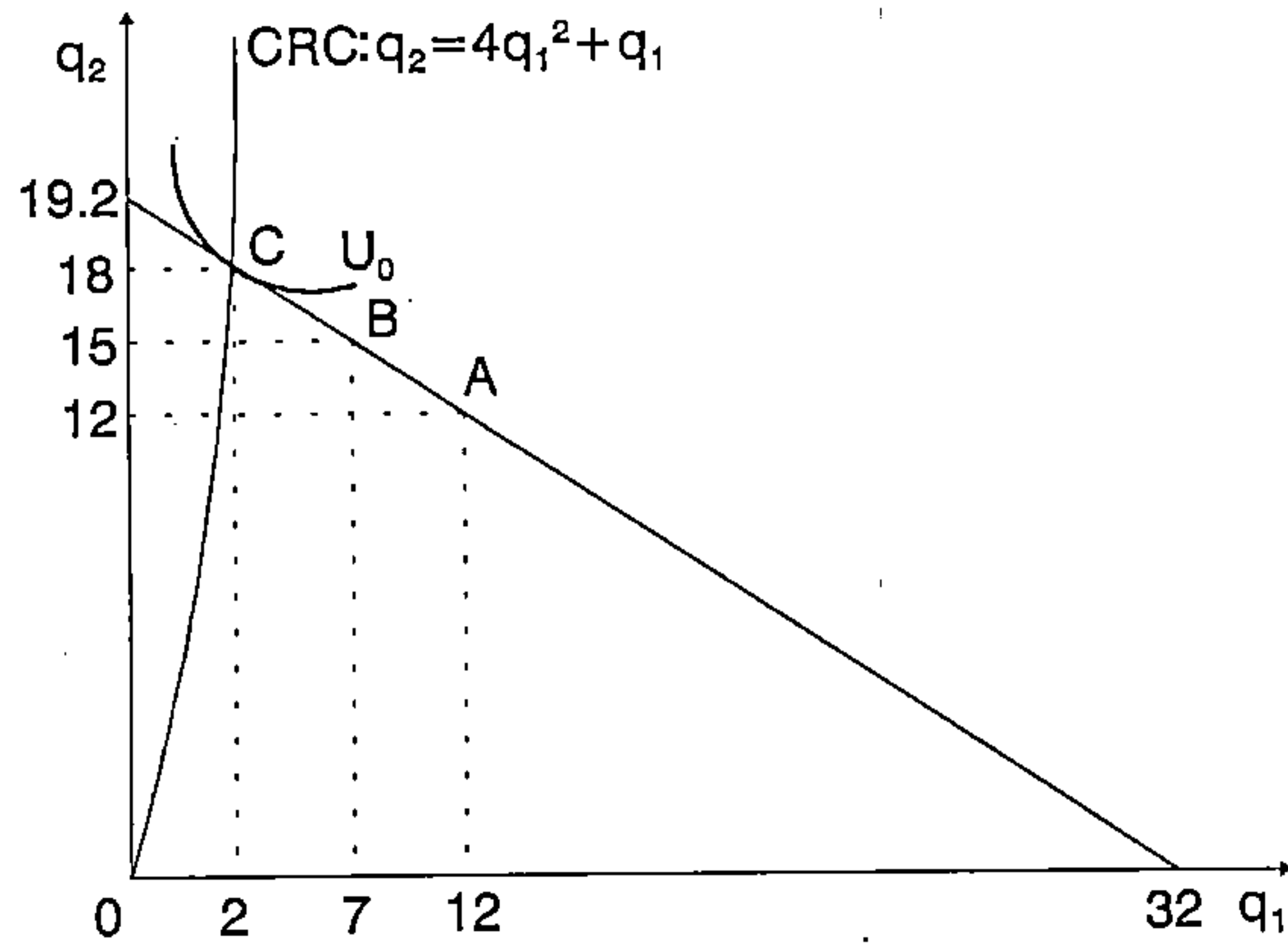
$$q_2 = 19.2 - 0.6q_1 \quad \text{Recta presupuestal}$$

$$q_2 = 19.2 - 0.6(2)$$

$$q_2 = 18$$

La combinación óptima "C" (2,18) es la alcanzable con el ingreso disponible como se observa en el siguiente gráfico:

Gráfico N° I.2.7



84694



I.3 Efectos sustitución y renta

1. Un consumidor se encuentra en equilibrio adquiriendo 8 y 12 unidades de q_1 y q_2 sobre su curva de indiferencia

$$q_2 = \frac{768}{q_1^2}$$

El precio de q_1 sube de 3 a 6 (se duplica). ¿Será necesario duplicar su ingreso nominal para que no caiga su utilidad? ¿Cuál será la nueva combinación de bienes que comprará?

Respuesta:

Los datos del problema:

$$P_1^0 = 3$$

$$q_1^0 = 8$$

$$P_2^0 = x$$

$$q_2^0 = 12$$

se reemplazan en la condición de primer orden:

$$TMgS_{q_2/q_1} = -\frac{P_1^0}{P_2^0}$$

y como la ecuación de la curva de indiferencia es:

$$q_2 = \frac{768}{q_1^2}$$

Entonces:

$$TMgS_{q_2/q_1} = -\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{1,536}{q_1^3}$$

Los precios relativos:

$$-\frac{P_1^0}{P_2^0} = -\frac{3}{P_2^0}$$

Por lo tanto:

$$-\frac{1,536}{q_1^3} = -\frac{3}{P_2^0}$$

$$-\frac{1,536}{(8)^3} = -\frac{3}{P_2^0}$$

$$-\frac{1,536}{512} = -\frac{3}{P_2^0}$$

$$P_2^0 = \frac{(512)(3)}{(1,536)} = 1$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta presupuestal para hallar el ingreso total:

$$I^0 = 3(8) + 1(12)$$

$$I^0 = 36$$

Las intersecciones con los ejes coordenados:

$$\frac{36}{P_2^0 = 1} = q_2^* = 36$$

$$\frac{36}{P_1^0 = 3} = q_1^* = 12$$

Con estos dos puntos se puede obtener la ecuación de la recta presupuestal:

(12,0) y (0,36)

$$m = \frac{36 - 0}{0 - 12} = -3$$

$$q_2 = 36 - 3q_1$$

Recta presupuestal

Pero ahora se duplica el precio de q_1 (P_1 sube a 6). Por ello la pendiente de la nueva

recta presupuestal: $m' = -\frac{P_1'}{P_2^0} = -\frac{6}{1} = -6$

Como no ha variado la intersección en el eje Y, la nueva recta presupuestal:

(0, 36) y $m' = -6$

$$q_2 - 36 = -6(q_1 - 0)$$

$$q_2 = 36 - 6q_1$$

A partir de esta ecuación se puede encontrar la nueva intersección con el eje q_1

$$q_2 = 0 \quad \text{así} \quad q_1 = \frac{36}{6} = 6$$

La nueva recta presupuestal no es tangente a la curva de indiferencia inicial. Deberá crecer el ingreso nominal –dada la nueva relación de precios– para que el consumidor pueda alcanzar la curva original. Por lo tanto, en la nueva tangencia, pero sobre la misma curva de indiferencia:

$$TMgS_{q_2/q_1} = -\frac{P_1'}{P_2^0}$$

$$TMgS_{q_2/q_1} = -\frac{1,536}{q_1^3}$$

$$-\frac{P_1'}{P_2^0} = -6$$

Entonces, en equilibrio:

$$-\frac{1,536}{q_1^3} = -6$$

$$q_1 = 6.35$$

Para q_2 , recurrimos a la curva de indiferencia

$$q_2 = \frac{768}{(6.35)^2} = \frac{768}{40.32} = 19.05$$

El nuevo ingreso:

$$I' = 6(6.35) + 1(19.05)$$

$$I' = 57.15$$

Se deberá elevar el ingreso nominal en 21.15 (58.75%). Los puntos de intersección de la nueva recta presupuestal:

$$q_1^* = \frac{57.15}{P_1' = 6} = 9.525$$

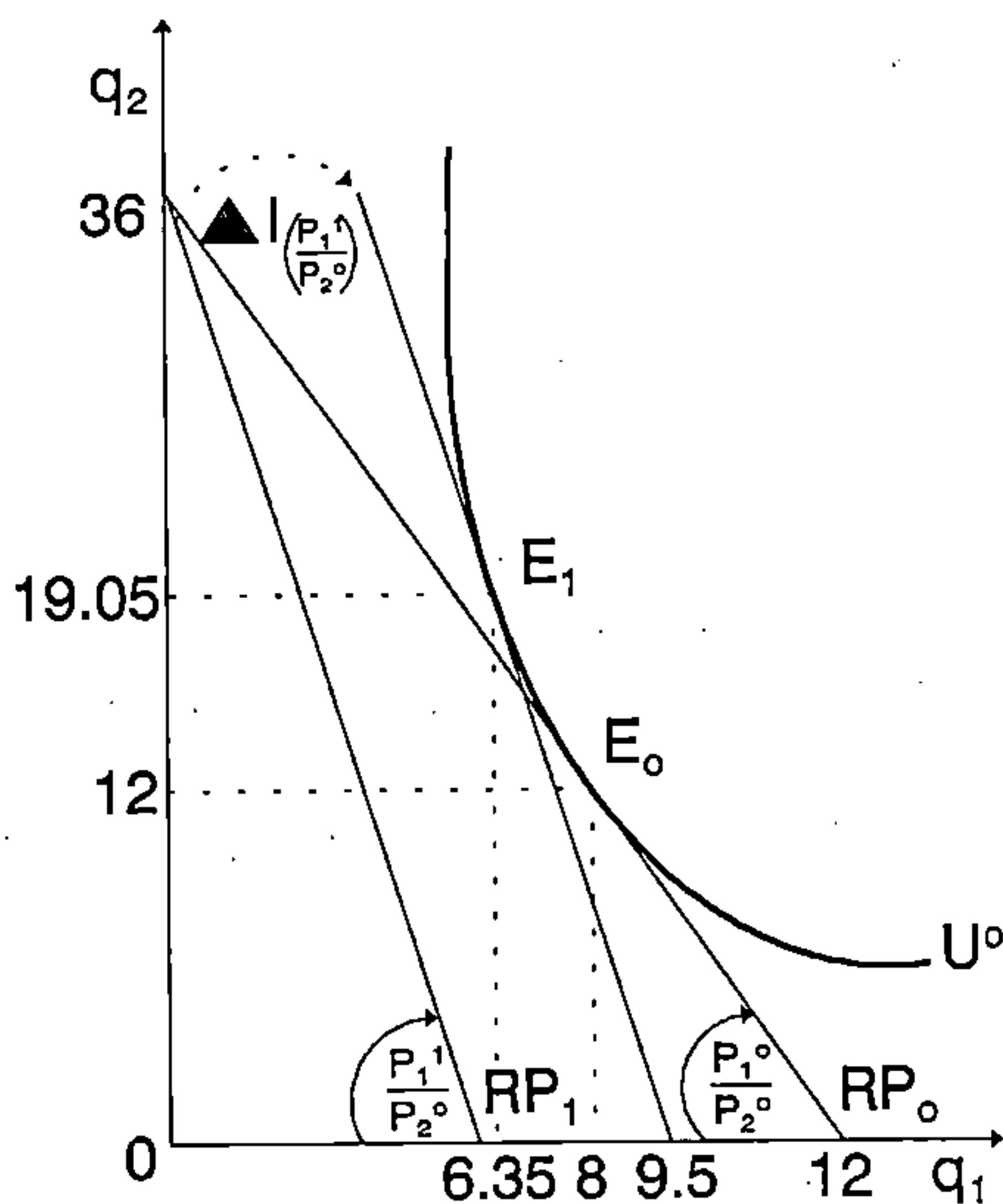
$$q_2^* = \frac{57.15}{P_2^0 = 1} = 57.15$$

Por lo tanto, la ecuación del nuevo ingreso necesario para regresar al consumidor a su nivel de utilidad inicial será: $q_2 = 57.15 - 6q_1$

A pesar de que el precio P_1 se duplicó, causando obviamente una reducción en la satisfacción del consumidor, será necesario que el nuevo ingreso sólo se incremente un poco menos del 59% para que se le restituya el nivel de utilidad original ya que se produce una sustitución entre el bien barato y el bien caro (escoge E_1 y no E_0) como se observa en el gráfico N° I.3.1.

El incremento necesario para regresar al consumidor a su curva de indiferencia inicial (21.15), tomando en cuenta la relación nueva de precios, corresponde al concepto variación compensatoria del ingreso según J.R. Hicks.

Gráfico N° I.3.1



2. Un consumidor se encuentra en equilibrio cuando los precios son de $P_1^0 = 800$ y $P_2^0 = 3,200$ y se encuentra en una curva de indiferencia, cuya ecuación es:

$$q_2 = \frac{1}{q_1}$$

¿Cuántas veces deberá aumentarse el precio de q_1 , para que ante un aumento de 900% de su ingreso nominal inicial de 3,200, no se modifique su nivel de utilidad original?

Respuesta:

$$P_1^0 = 800$$

$$P_2^0 = 3,200$$

$$I^0 = 3,200$$

$$q_2 = \frac{1}{q_1}$$

La ecuación de la curva de indiferencia corresponde a una hipérbola equilátera.

Se determina el equilibrio inicial de acuerdo a la condición de primer orden:

$$TMgS_{q_2/q_1} = -\frac{P_1^0}{P_2^0}$$

$$TMgS_{q_2/q_1} = \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{1}{q_1^2}$$

$$-\frac{P_1^0}{P_2^0} = -\frac{800}{3,200}$$

Igualando:

$$-\frac{1}{q_1^2} = -\frac{800}{3,200}$$

$$q_1^2 = 4$$

$$q_1 = 2$$

De la ecuación de la curva de indiferencia:

$$q_2 = \frac{1}{2}$$

La curva de presupuesto: $q_2 = a - bq_1$

Ya que:

$$a = \frac{I^0}{P_2^0} = \frac{3,200}{3,200} = 1$$

$$b = \frac{1 - q_2}{q_1} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Por lo tanto: $q_2 = 1 - 0.25q_1$

Intersección en el eje "Y": $\frac{I^0}{P_2^0} = \frac{3,200}{3,200} = 1$

Intersección en el eje "X": $\frac{I^0}{P_1^0} = \frac{3,200}{800} = 4$

Como el ingreso ha quedado multiplicado por 10, permaneciendo $dP_2 = 0$ entonces la nueva intersección en "Y" es:

$$\frac{32,000}{3,200} = 10$$

Al mismo tiempo, el precio de q_1 debe subir lo suficiente para mantener al consumidor con el mismo nivel de utilidad, lo que implica que la pendiente de la nueva recta presupuestal varía.

Nueva ecuación de la recta presupuestal para mantener el nivel utilidad inicial:

$$q_2' = a' - b'q_1'$$

$$q_2' = 10 - b'q_1'$$

En el nuevo punto de equilibrio E_1 , tienen que igualarse las pendientes de la nueva recta presupuestal y de la curva de indiferencia original.

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{1}{q_1^2} = b' \quad \text{pendiente de la nueva recta presupuestal}$$

Por lo tanto se reemplaza en la nueva ecuación:

$$q_2' = 10 - \left(\frac{1}{q_1^2} \right) (q_1)$$

$$q_2' = 10 - \frac{1}{q_1}$$

En la tangencia nueva E_1 , los valores q_2 de la curva de indiferencia y la recta presupuestal deben coincidir.

$$q_2 = \frac{1}{q_1} \quad \text{y} \quad q_2' = 10 - \frac{1}{q_1}$$

Igualando:

$$\frac{1}{q_1} = 10 - \frac{1}{q_1}$$

$$q_1 = \frac{1}{5}$$

$$q_2 = 5$$

Comprobando los puntos de equilibrio inicial y final en la función de utilidad:

$$q_2 q_1 = 1$$

$$E_0 = \left(\frac{1}{2}\right)(2) = 1$$

$$E_1 = \left(\frac{1}{5}\right)(5) = 1$$

La pendiente de la nueva recta presupuestal:

$$\frac{dq_2'}{dq_1'} = -\frac{1}{q_1'^2}$$

o de la curva de indiferencia:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{1}{q_1^2}$$

será:

$$m' = -\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = -25$$

Por lo tanto, ecuación de la nueva recta presupuestal.

$$q_2' = 10 - 25q_1'$$

Gastado en q_2 : $q_2 = P_2^0 q_2' = (3,200)(5) = 16,000$

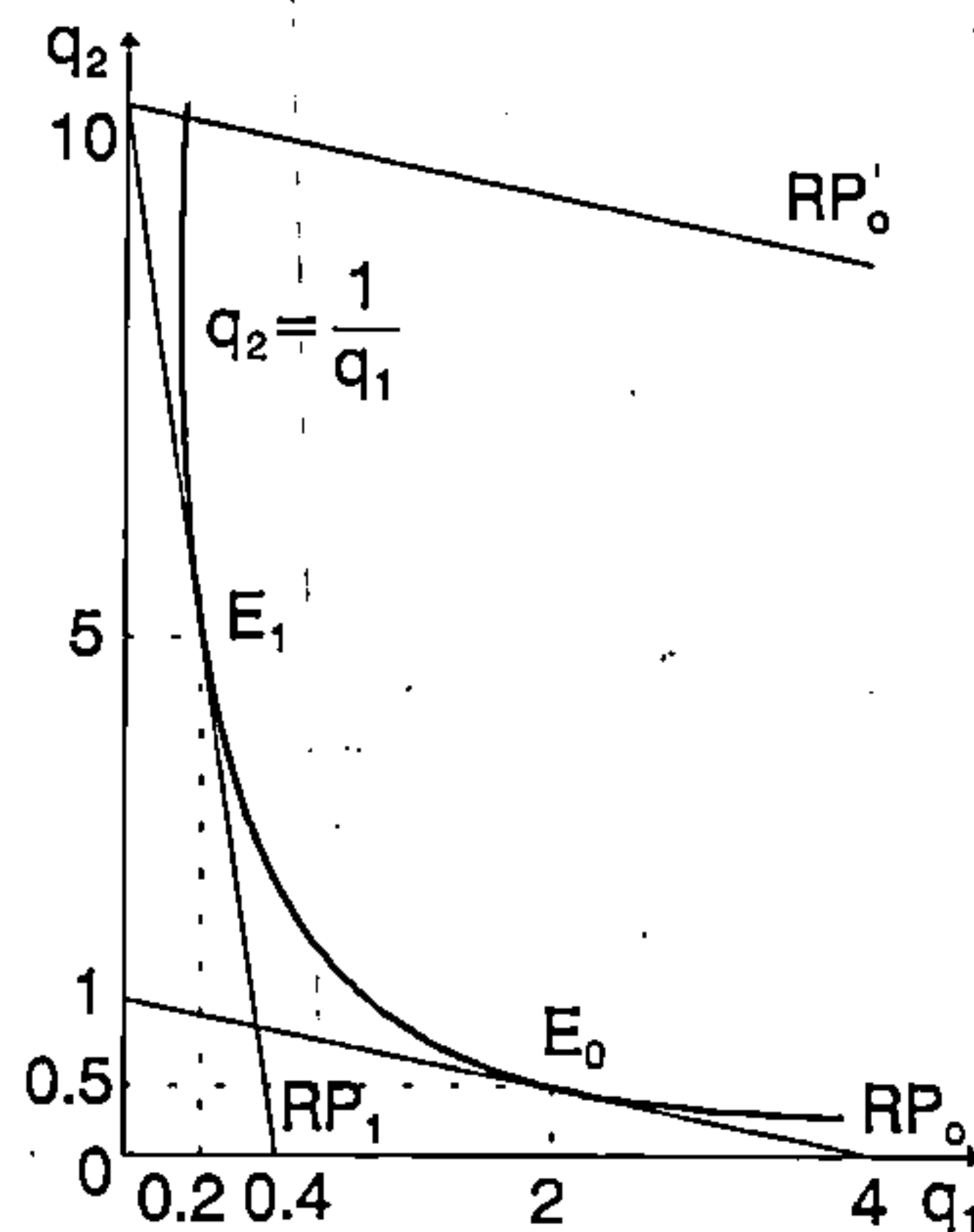
El saldo del nuevo ingreso gastado en $q_1 = P_1' q_1' = (P_1') \left(\frac{1}{5} \right) = 32,000 - 16,000$

$$\frac{P_1'}{5} = 16,000$$

$$P_1' = 80,000$$

En este caso, a pesar de que el ingreso nominal se ha multiplicado por el factor 10, el precio de q_1 debe multiplicarse por el factor 100 para que el consumidor no experimente una variación en su nivel de satisfacción inicial. El siguiente gráfico muestra los puntos inicial (E_0) y final (E_1) de equilibrio.

Gráfico N° I.3.2



I.4 Optimización del descanso

1. Determine la oferta laboral de un consumidor cuya función de utilidad es la siguiente:

$$U = 48D + DY - D^2$$

que relaciona la utilidad diaria de una persona con el descanso (D) y el ingreso (Y) a que tenga derecho en el mismo período.

Donde

$$T^0 = L + D$$

$$T^0 = 24 \text{ horas}$$

$$P_L = P_L^0 \text{ (salario/hora)}$$

$$Y = P_L^0 L$$

Respuesta:

Reemplazar $T^0 = L + D$ y $Y = P_L^0 L$ en la función de utilidad:

$$U = 48(T^0 - L) + (T^0 - L)(P_L^0 L) - (T^0 - L)^2$$

$$U = 48T^0 - 48L + P_L^0 L T^0 - P_L^0 L^2 - T^{02} + 2T^0 L - L^2$$

$$\frac{dU}{dL} = -48 + P_L^0 T^0 - 2P_L^0 L + 2T^0 - 2L = 0$$

$$-48 + P_L^0 T^0 - \cancel{P_L^0 L} - \cancel{P_L^0 L} + 2T^0 - 2L = 0$$

$$-48 + P_L^0 T^0 - 2P_L^0 L + 2T^0 - 2L = 0$$

$$\frac{dU}{dL} = -48 + T^0(P_L^0 + 2) - 2L(P_L^0 + 1) = 0$$

Despejando L:

$$L = \frac{T^0(P_L^0 + 2) - 48}{2(P_L^0 + 1)} \quad \text{Curva de oferta laboral (condición de primer orden)}$$

De donde:

$$Y = P_L^0 \left[\frac{T^0(P_L^0 + 2) - 48}{2(P_L^0 + 1)} \right]$$

La condición de segundo orden:

$$\frac{d^2U}{dL^2} = -P_L^0 - P_L^0 - 2 < 0$$

$$-2P_L^0 - 2 < 0$$

$$2(P_L^0 + 1) > 0$$

Se cumple la condición de segundo orden ya que:

$$P_L^0 > 0$$

La función de oferta laboral tiene algunas propiedades:

$$L = \frac{T^0(P_L^0 + 2) - 48}{2(P_L^0 + 1)}$$

Cuando $P_L^0 = 0$

$$L = \frac{24^h(0 + 2) - 48}{2(0 + 1)}$$

$$L = 0$$

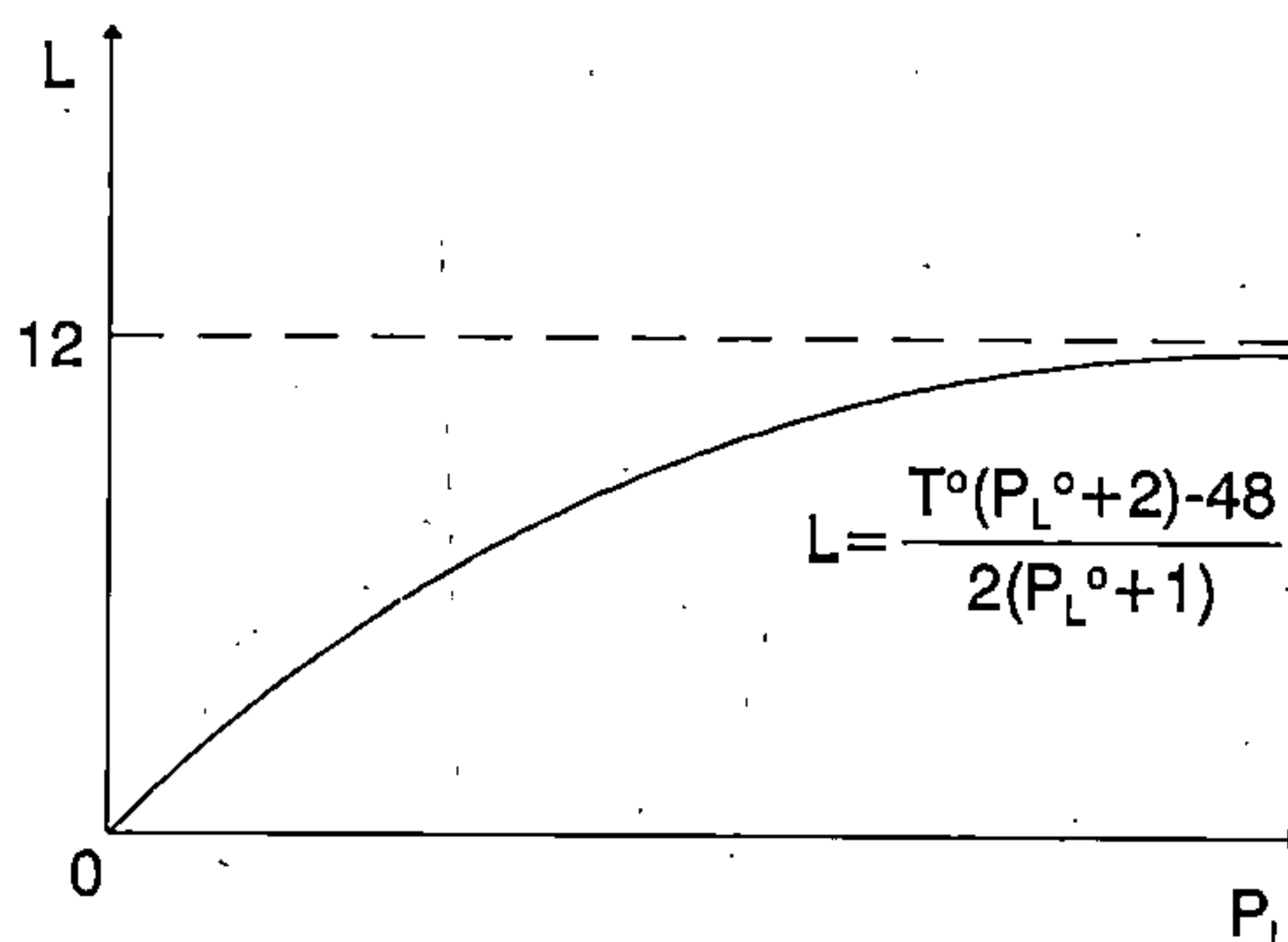
El máximo de horas trabajadas: $P_L^0 = \infty$

$$L = \frac{24(\infty + 2) - 48}{2(\infty + 1)}$$

$$L = 12 - \frac{48}{\infty}$$

$$L = 12 \text{ horas}$$

Gráfico N° 1.4.1



donde $\frac{dL}{dP_L} > 0$ y $\frac{d^2L}{dP_L^2} < 0$

Esta función de oferta laboral no tiene un valor máximo:

Primera derivada (cuando P_L es una variable):

$$L = \frac{T^0(P_L + 2) - 48}{2(P_L + 1)}$$

$$\frac{dL}{dP_L} = \frac{2(P_L + 1)(T^0) - [T^0(P_L + 2) - 48]}{[2(P_L + 1)]^2}$$

$$\frac{dL}{dP_L} = \frac{2P_L T^0 + 2T^0 - 2P_L T^0 - 4T^0 + 96}{4(P_L + 1)^2}$$

$$\frac{dL}{dP_L} = \frac{2T^0 - 4T^0 + 96}{4(P_L + 1)^2}$$

$$\frac{dL}{dP_L} = \frac{96 - 2T^0}{4(P_L + 1)^2}$$

$$\frac{dL}{dP_L} = \frac{96 - 2(24)}{4(P_L + 1)^2} = \frac{+}{+} > 0$$

La función no tiene un máximo. Se acerca asintóticamente a $L = 12$ cuando $P_L \rightarrow \infty$

$$\frac{d^2L}{dP_L^2} = \frac{[4(P_L + 1)^2(0)] - [96 - 2T^0][(4)(2)(P_L + 1)]}{16(P_L + 1)^4}$$

$$\frac{d^2L}{dP_L^2} = \frac{-(48)(8)(P_L + 1)}{16(P_L + 1)^4}$$

$$\frac{d^2L}{dP_L^2} = \frac{-24}{(P_L + 1)^3} < 0$$

Pendiente positiva decreciente

Este mismo ejercicio se puede resolver aplicando los principios de la teoría del consumidor o de la elección. En este caso, el trabajador (consumidor) tratará de distribuir óptimamente su tiempo ($T^0 = 24$) horas entre el trabajo (L) y el descanso (D) a fin de maximizar su bienestar o utilidad (U). Para ello, como en los casos vistos anteriormente, tratará de igualar la tasa marginal de sustitución entre los bienes ingreso (Y) y descanso (D) con el *ratio* de intercambio (precio) entre el descanso y el ingreso; es decir el salario por hora.

$$U = 48D + DY - D^2$$

$$U = U^0$$

$$dU^0 = 48dD + DdY + YdD - 2DdD = 0$$

$$DdY = -48dD - YdD + 2DdD$$

$$DdY = dD[-48 - Y + 2D]$$

$$-\frac{dY}{dD} \equiv TMgS_{Y/D} = \frac{48 + Y - 2D}{D}$$

Para un máximo de utilidad, la $TMgS_{Y/D}$ debe igualar a la pendiente de la recta de combinaciones alcanzables de ingreso y descanso (recta presupuestal).

$$Y = P_L^0 L$$

$$Y = P_L^0 (T^0 - D)$$

$$Y = P_L^0 T^0 - P_L^0 D$$

$$\frac{dY}{dD} = -P_L^0$$

El salario/hora es el "precio" de una hora de descanso.

Entonces:

$$TMgS_{Y/D} = P_L^0$$

$$\frac{48 + Y - 2D}{D} = P_L^0$$

$$DP_L^0 = 48 + Y - 2D$$

$$(T^0 - L)P_L^0 = 48 + P_L^0 L - 2(T^0 - L)$$

$$T^0 P_L^0 - L P_L^0 = 48 + P_L^0 L - 2T^0 + 2L$$

$$-L P_L^0 - P_L^0 L - 2L = 48 - 2T^0 - T^0 P_L^0$$

$$2L(P_L^0 + 1) = T^0(P_L^0 + 2) - 48$$

$$L = \frac{T^0(P_L^0 + 2) - 48}{(P_L^0 + 1)}$$

Que corresponde a la función de oferta
laboral.

I.5 Utilidad esperada

1. Una persona posee la siguiente función de utilidad que depende del nivel de su riqueza (W):

$$U = \frac{W^2}{100} + W$$

Si a esta persona que inicialmente posee una riqueza de 100 se le ofrece participar en un juego donde al tirarse una moneda al aire recibe un premio de 20 si acierta el resultado (cara o sello) y debe pagar a la persona que le propone el juego la misma cantidad si pierde. Se pide:

- a) Mostrar que el juego propuesto es actuarialmente equitativo en términos de riqueza,
- b) Mostrar que el juego propuesto no es actuarialmente equitativo en términos de utilidades, y
- c) ¿Qué decisión sobre jugar o no este juego tomará la persona y por qué razón?

Respuesta:

- a) **Cálculo de la riqueza esperada:**

$$E(W) = pW_1 + (1-p)W_2$$

donde:

p : probabilidad de ganar el juego.

$(1 - p)$: probabilidad de perder el juego.

W_1 : premio recibido si se gana.

W_2 : pago (pérdida) si se pierde.

Entonces:

$$E(W) = \frac{1}{2}(20) + \frac{1}{2}(-20)$$

$$E(W) = 0$$

Y dado que no se debe pagar por participar en este juego, el valor (esperado) futuro de la riqueza de esta persona no debe variar. Entonces el juego es actuarialmente equitativo en términos de riqueza.

b) Cálculo de la utilidad esperada:

La utilidad esperada que representa este juego para la persona del problema se estima según la siguiente fórmula:

$$E[U(W)] = pU(W') + (1 - p)U(W'')$$

donde:

p : probabilidad de ganar el juego.

$U(W')$: utilidad de la persona si gana el juego.

$(1 - p)$: probabilidad de perder el juego.

$U(W'')$: utilidad de la persona si pierde el juego.

Por lo tanto:

$$E[U(W)] = \frac{1}{2} \left[\frac{(80)^2}{100} + 80 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{(120)^2}{100} + 120 \right]$$

$$E[U(W)] = \frac{1}{2} [144] + \frac{1}{2} [264]$$

$$E[U(W)] = 204$$

Por otra parte, si la persona no hubiera participado en el juego, hubiera tenido una utilidad cierta de:

$$U = \frac{(100)^2}{100} + 100$$

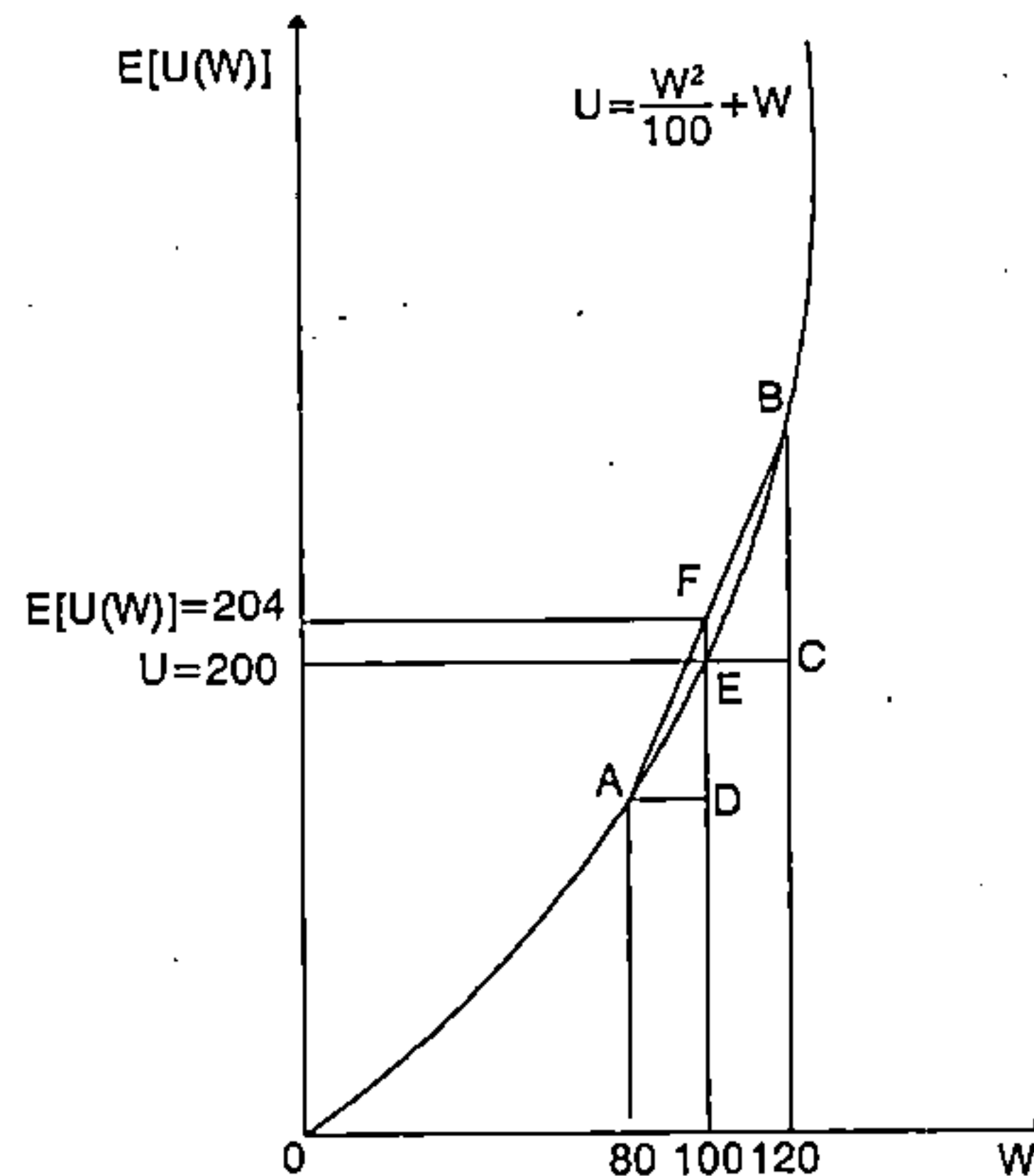
$$U = 200$$

Por consiguiente, la persona tendrá una utilidad (esperada) mayor que la que experimentaría si no participa en el juego (utilidad cierta). Por lo tanto, para esta persona, el juego propuesto no es actuarialmente equitativo en términos de utilidades, ya que $E(U) > U$

c) Decisión sobre el juego:

Dado que la utilidad esperada excede la utilidad cierta aún cuando el juego es actuarialmente equitativo en términos de riqueza, se trata de una persona cuya función de utilidad revela que es "amante del riesgo". Es decir, los incrementos en su riqueza elevan su utilidad en una magnitud mayor que similares reducciones en su riqueza, reducen su utilidad, según se aprecia en el gráfico siguiente:

Gráfico N° I.5.1



2. La función de utilidad de una persona que confronta el riesgo de un incendio es:

$$U = W^{1/2}$$

El valor de su propiedad es de 100,000, pero si ocurre un incendio sería de 16,000.

La probabilidad de que el siniestro ocurra es de $\frac{1}{100}$.

Se pide determinar:

- La riqueza esperada de la persona en caso de no tener un seguro contra incendios,
- La utilidad esperada que le corresponde a dicha riqueza.

- c) La riqueza cierta que le proporcionaría el mismo nivel de utilidad del punto anterior.
- d) La prima actuarial equitativa
- e) El valor máximo de la prima de seguros que estará dispuesto a pagar y
- f) Su utilidad en caso de que la compañía de seguros le cobre 1,000 de prima.

Respuesta:**a) Cálculo de la riqueza esperada:**

$$E(W) = pW_1 + (1 - p)W_2$$

Donde:

p : probabilidad de que ocurra un incendio.

W_1 : valor de la propiedad si ello sucede.

$(1 - p)$: probabilidad de que no ocurra un incendio.

W_2 : valor de la propiedad si no hay incendio.

Entonces:

$$E(W) = \left(\frac{1}{100}\right)(16,000) + \left(1 - \frac{1}{100}\right)(100,000)$$

$$E(W) = 160 + 99,000$$

$$E(W) = 99,160$$

b) Cálculo de la utilidad esperada:

$$E[U(W)] = pU(W_1) + (1 - p)U(W_2)$$

Donde:

$U(W_1)$: utilidad en caso ocurra el incendio

$U(W_2)$: utilidad en caso no ocurra el incendio

$$E[U(W)] = \frac{1}{100} [\sqrt{16,000}] + \frac{99}{100} [\sqrt{100,000}]$$

$$E[U(W)] = \frac{1}{100} [126.49] + \frac{99}{100} [316.23]$$

$$E[U(W)] = 314.33$$

c) Cálculo de la riqueza cierta:

$$U = \sqrt{W}$$

$$314.33 = \sqrt{W}$$

$$W = 98,804.98$$

d) Prima actuarialmente equitativa:

Será la diferencia entre el valor cierto de la propiedad y el valor esperado de la misma. Es decir:

$$100,000 - 99,160 = 840$$

Corresponde a las pérdidas actuarialmente previstas por la compañía de seguros.



e) Valor máximo de la prima:

El monto máximo que la persona estará dispuesta a pagar correspondería a aquel monto que le dejaría una riqueza cierta que le genere por lo menos la utilidad esperada correspondiente a la opción de no asegurarse:

$$100,000 - 98,804.98 = 1,195.02$$

f) Utilidad si la compañía le cobra 1,000 por prima de seguros

$$U = \sqrt{W}$$

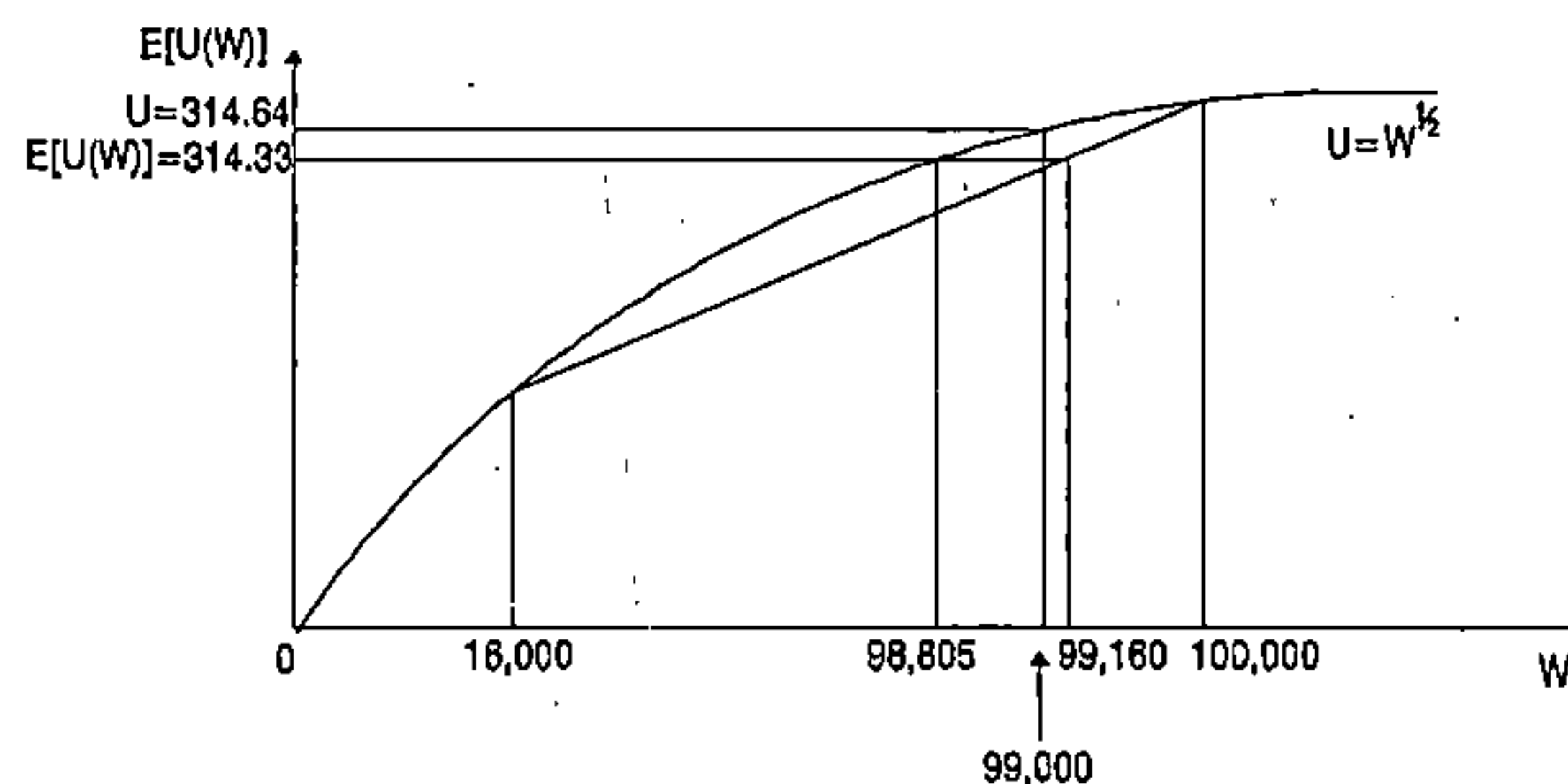
$$U = \sqrt{99,000}$$

$$U = 314.64$$

Esta utilidad excede a la que obtendría en el caso de que no asegurase su propiedad. Por lo tanto, le conviene pagar los 1,000 de prima. Es decir, la persona "adversa al riesgo" está dispuesta a pagar por no enfrentar el resultado incierto del valor de su propiedad. La compañía de seguros cobrará una prima (1,000) mayor que las pérdidas actuariales (840) porque debe cubrir sus costos de operación y de oportunidad.

El siguiente gráfico muestra el desarrollo del ejercicio.

Gráfico N° I.5.2



I.6 Consumo intertemporal

1. Un consumidor posee la siguiente función de utilidad:

$$U = c_1 c_2^{2/3}$$

donde " c_i " son los montos de consumo que realiza en cada uno de los dos períodos considerados. Si el consumidor dispone de un ingreso en el primer período de 1,000 y de 1,200 en el segundo período, y si se conoce que la tasa de interés aplicable en el primer período es de 10%, se pide determinar la distribución temporal óptima de sus gastos en bienes de consumo entre los dos períodos.

Respuesta:

Para determinar la estructura óptima de consumo en los dos períodos, el consumidor debe proceder a igualar su tasa marginal de sustitución entre los montos de consumo en cada período –su preferencia subjetiva en relación al consumo presente versus futuro– con la tasa efectiva a la cual se puede sustituir consumo presente por consumo futuro, determinada por la tasa de interés.

$$U = c_1 c_2^{2/3}$$

$$U = U^0$$

$$U^0 = c_1 c_2^{2/3}$$

$$dU^0 = c_1 \frac{2}{3} c_2^{-1/3} dc_2 + c_2^{2/3} dc_1 = 0$$

De donde:

$$-\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{3c_2^{2/3}}{2c_1 c_2^{-1/3}} = \frac{3c_2}{2c_1}$$

que es la tasa marginal de sustitución entre consumo futuro (c_2) y consumo en el período actual (c_1).

Por otro lado, la tasa actual a la que se puede sustituir consumo futuro por consumo en el presente, estará dada por la pendiente de la recta de posibilidades de consumos actual y futuro que es el lugar geométrico que señala todas las combinaciones posibles de consumo presente y futuro que enfrenta el consumidor, dada la tasa de interés corriente. La ecuación de dicha recta estará dada por la expresión:

$$c_2 = [Y_1(1 + i_1) + Y_2] - (1 + i_1)c_1$$

Donde:

$Y_1(1 + i_1) + Y_2$ corresponde a la intersección de la recta con el eje de ordenadas (c_2), cuando $c_1 = 0$; esto es cuando dispone de su ingreso del período dos más el del primer período con sus respectivos intereses para dedicarlos exclusivamente al consumo en el período dos, y $(1 + i_1)$ es la pendiente de tal recta de opciones de consumo, pues la intersección de ésta con la abscisa (c_1), cuando $c_2 = 0$, es igual a

$Y_1 + \frac{Y_2}{(1 + i_1)}$ esto es, el ingreso total máximo que dispondría para consumir en el período uno, si no consumiera nada en el período dos.

Por lo tanto, la pendiente "m":

$$m = -\frac{Y_1(1+i_1) + Y_2}{Y_1 + \frac{Y_2}{(1+i_1)}}$$

$$m = -\frac{Y_1(1+i_1) + Y_2}{\frac{Y_1(1+i_1) + Y_2}{(1+i_1)}}$$

$m = -(1+i_1)$ pendiente negativa porque mayor consumo en el período 1, implica menor consumo en el período 2.

Entonces, igualando las pendientes:

$$-\frac{2c_2}{3c_1} = -(1+i_1)$$

Reemplazando $i_1 = 10\%$

$$-1.5 \frac{c_2}{c_1} = -1.10$$

$$c_1 = \frac{1.5}{1.1} c_2$$

Esta relación de equilibrio se lleva a la ecuación de la recta de posibilidades de consumo:

$$c_2 = [Y_1(1+i_1) + Y_2] - (1+i_1)c_1$$

Reemplazando valores:

$$c_2 = [1,000(1.10) + 1,200] - (1.10)c_1$$

$$c_2 = 2,300 - 1.1 \left[\frac{1.5}{1.1} c_2 \right]$$

$$c_2 = 2,300 - 1.5c_2$$

$$c_2 = 920$$

Por lo tanto, este consumidor prefiere dedicar parte de sus ingresos del segundo período al consumo de bienes en el primer período.

$$c_1 = \frac{1.5}{1.1} (920)$$

$$c_1 = 1,254.55$$

El consumidor “desahorra” un monto de:

$$Y_1 - c_1$$

$$1,000 - 1,254.55 = 254.55$$

que es el exceso de sus gastos de consumo en el período 1 sobre sus ingresos en dicho período. Pero en el segundo período gasta: $c_2 = 920$, por lo que en dicho período ahorra:

$$Y_2 - c_2$$

$$1,200 - 920 = 280$$

Como se observa, parte de sus ahorros en el segundo período es dedicado a cubrir el exceso de gastos de consumo del primer período, y el saldo

$$(280 - 254.55 = 25.45)$$

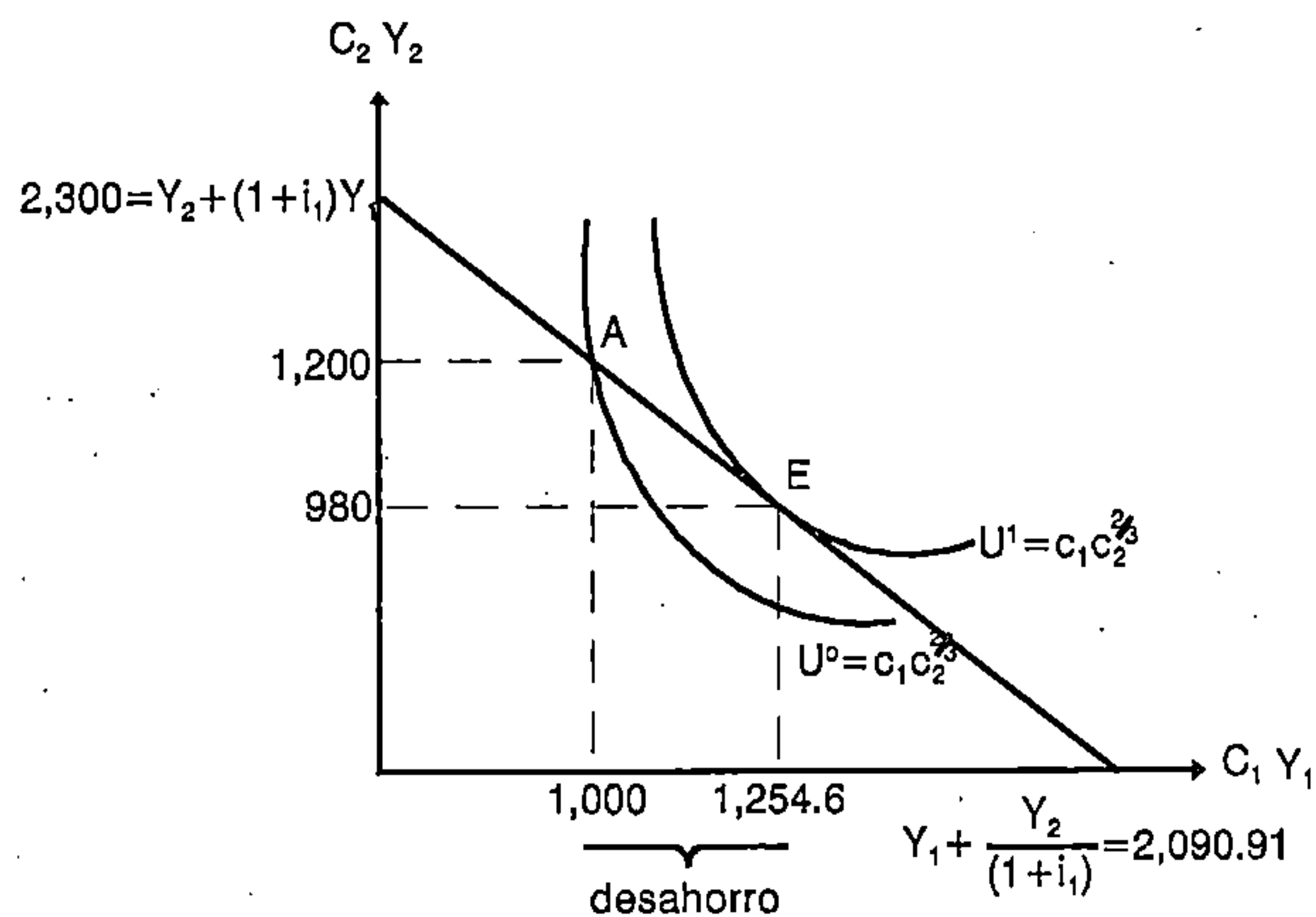
es el costo que debe pagar en la forma de intereses para poder consumir en el primer período un monto mayor que su ingreso corriente:

$$\frac{25.45}{254.55} = 0.10 \quad \text{ó} \quad 10\%$$

Luego: $25.45 + 254.55 = 280$

o el ahorro que debe realizar en el segundo período para devolver el principal (254.55) y cancelar el interés (25.45) a quien le financia su mayor gasto de consumo en el primer período.

Gráfico N° I.6.1





Teoría de la demanda del consumidor

II.1 Funciones de demandas ordinarias

1. Dado

$$U = q_1^{2/3} q_2$$

$$100 = 2q_1 + 4q_2$$

Hallar las ecuaciones de demanda ordinarias q_1^d y q_2^d .

Respuesta:

Primeramente se determinará la combinación q_1 y q_2 que maximiza la utilidad del consumidor. En equilibrio:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{P_1^0}{P_2^0}$$

$$f_1 = \frac{2}{3} q_1^{-1/3} q_2$$

$$f_2 = q_1^{2/3}$$

$$\frac{2q_2}{3q_1^{1/3}q_1^{2/3}} = \frac{2}{4}$$

$$4q_2 = 3q_1$$

$$q_2 = \frac{3}{4}q_1$$

Reemplazando esta relación en la recta presupuestal:

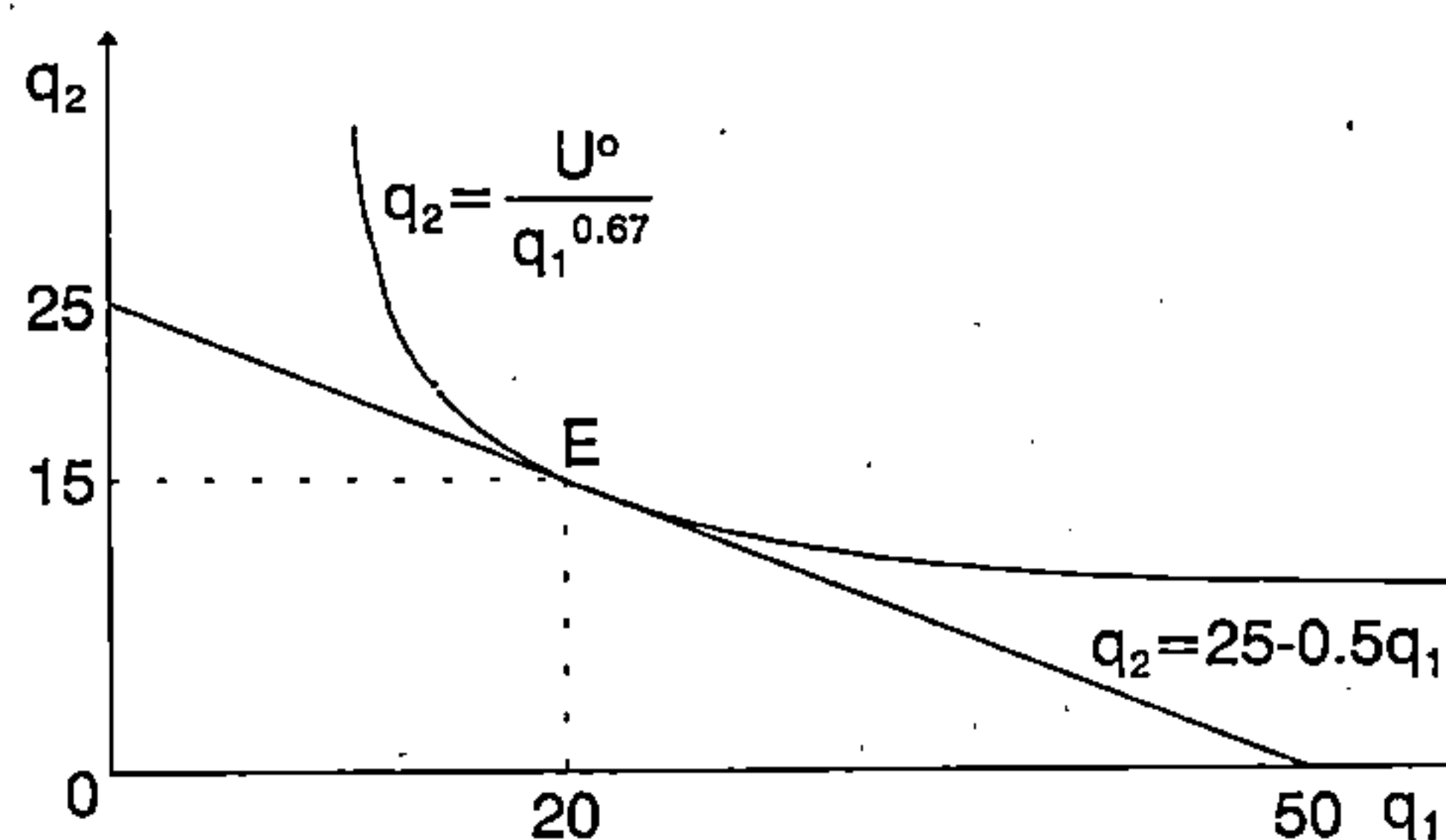
$$100 = 2q_1 + 4\left(\frac{3}{4}q_1\right)$$

$$100 = 5q_1$$

$$q_1 = 20 \quad y \quad q_2 = 15$$

Solución de equilibrio del consumidor, asumiendo que la condición de segundo orden se cumple (ver gráfico N° II.1.1).

Gráfico N° II.1.1



Para hallar las ecuaciones de demanda ordinarias de q_1 y q_2 , se parte de la condición de primer orden para un máximo de utilidad:

$$f_1 - P_1^0 \lambda = 0$$

$$f_2 - P_2^0 \lambda = 0$$

Reemplazando los valores de f_1 y f_2 .

$$\frac{2}{3} q_1^{-1/3} q_2 - P_1^0 \lambda = 0$$

$$q_1^{2/3} - P_2^0 \lambda = 0$$

De la primera ecuación:

$$q_2 = \frac{3P_1^0 \lambda q_1^{1/3}}{2}$$

y de la segunda se obtiene:

$$\lambda = \frac{q_1^{2/3}}{P_2^0}$$

Entonces:

$$q_2 = \frac{3P_1^0 \left[\frac{q_1^{2/3}}{P_2^0} \right] q_1^{1/3}}{2}$$

$$q_2 = \frac{3P_1^0 q_1}{2P_2^0}$$

Esta relación se reemplaza en la recta presupuestal:

$$I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2$$

$$I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 \left[\frac{3P_1^0 q_1}{2P_2^0} \right]$$

$$I^0 = P_1^0 q_1 + 1.5P_1^0 q_1$$

$$I^0 = 2.5P_1^0 q_1$$

$$q_1^d = \frac{I}{2.5P_1} \quad \text{ó} \quad P_1^d = \frac{I}{2.5q_1} \quad \text{Curva de demanda ordinaria de } q_1$$

Comprobación utilizando el resultado inicial:

$$q_1^d = \frac{I}{2.5P_1} = \frac{100}{2.5(2)} = 20$$

Para hallar la curva de demanda ordinaria de q_2 , se reemplaza la fórmula de la curva de demanda de q_1 en la recta presupuestal.

$$I^0 = P_1^0 \left[\frac{I}{2.5P_1^0} \right] + P_2^0 q_2$$

$$I^0 = \frac{I}{2.5} + P_2^0 q_2$$

$$I^0 - \frac{I}{2.5} = P_2^0 q_2$$

$$\frac{1.5I^0}{2.5} = P_2^0 q_2$$

$$q_2 = \left(\frac{1.5}{2.5} \right) \left(\frac{I}{P_2^0} \right)$$

$$q_2^d = 0.6 \frac{I}{P_2^o} \quad \text{ó} \quad P_2^d = 0.6 \frac{I}{q_2} \quad \text{curva de demanda ordinaria de } q_2.$$

Comprobación:

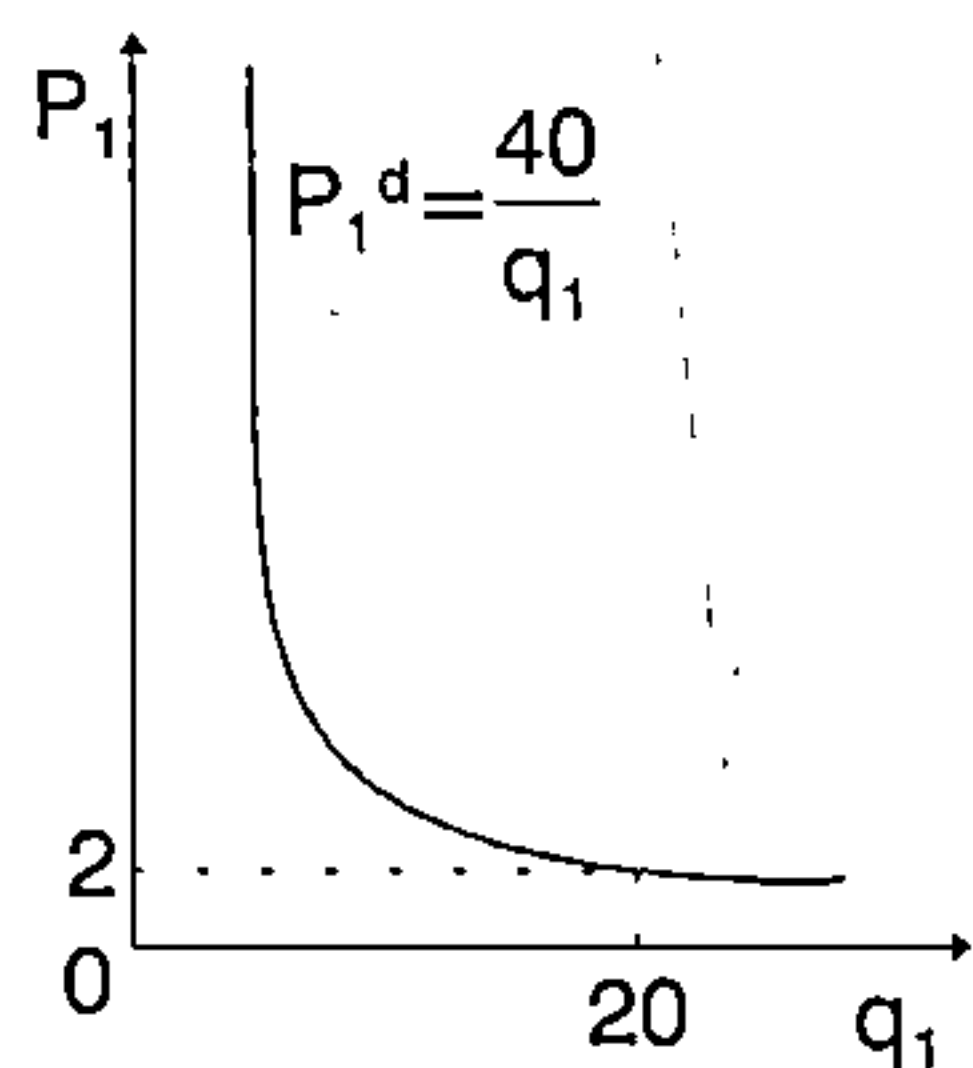
$$q_2^d = 0.6 \frac{I}{P_2^o}$$

$$q_2^d = 0.6 \left(\frac{100}{4} \right)$$

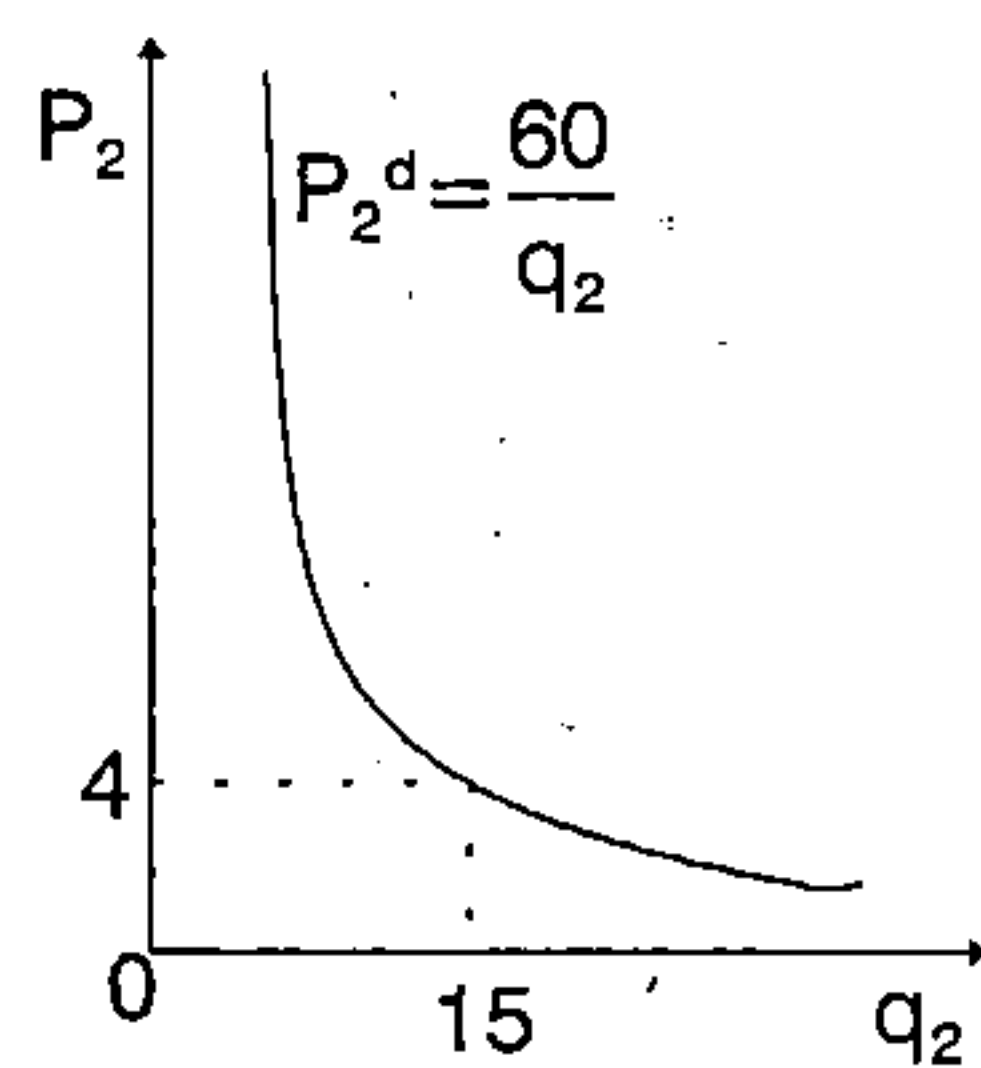
$$q_2^d = 15$$

En ambas funciones, la cantidad demandada depende directamente del ingreso e inversamente del propio precio exclusivamente. Ver el gráfico N° II.1.2.

Gráfico N° II.1.2



Curva de Demanda Ordinaria de q_1



Curva de Demanda Ordinaria de q_2

2. Dado : $U = \ln(q_1 + 2) + \ln(q_2)$,

a) Derivar las funciones de demandas ordinarias de q_1 y q_2 .

b) Encontrar los valores de equilibrio si $I^0 = 100$, $P_1^0 = 1$ y $P_2^0 = 2$.

Respuesta:

a) Utilizando el método de Lagrange, de las dos primeras derivadas parciales:

$$f_1 - P_1^0 \lambda = 0$$

$$f_2 - P_2^0 \lambda = 0$$

$$f_1 = \frac{1}{q_1 + 2}$$

$$f_2 = \frac{1}{q_2}$$

Entonces, reemplazando en la primera derivada parcial el valor de f_1 :

$$\frac{1}{q_1 + 2} - P_1^0 \lambda = 0$$

$$\frac{1}{q_1 + 2} = P_1^0 \lambda$$

$$1 = P_1^0 q_1 \lambda + P_1^0 2 \lambda$$

$$1 - 2P_1^0 \lambda = P_1^0 q_1 \lambda$$

$$q_1 = \frac{1}{P_1^0 \lambda} - \frac{2P_1^0 \lambda}{P_1^0 \lambda}$$

$$q_1 = \frac{1}{P_1^0 \lambda} - 2$$

Pero de la segunda derivada parcial $\frac{1}{q_2} - P_2^0 \lambda = 0$.

Sustituyendo: $\lambda = \frac{1}{P_2^0 q_2}$ en la recta presupuestal:

$$I^0 = P_1^0 \left(\frac{1}{P_1^0 \lambda} - 2 \right) + P_2^0 q_2$$

$$I^0 = \frac{1}{\lambda} - 2P_1^0 + P_2^0 q_2$$

$$I^0 = P_2^0 q_2 + P_2^0 q_2 - 2P_1^0$$

$$I^0 + 2P_1^0 = 2P_2^0 q_2 \quad \text{de donde:}$$

$$q_2^d = \frac{I}{2P_2} + \frac{P_1}{P_2}$$

Curva de demanda ordinaria de q_2 que además del ingreso y el propio precio, depende de los precios relativos de ambos bienes.

Reemplazando en la recta presupuestal el valor de q_2 , se obtiene q_1^d :

$$I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 \left[\frac{I^0}{2P_2^0} + \frac{P_1^0}{P_2^0} \right]$$

$$I^0 = P_1^0 q_1 + \frac{I^0}{2} + P_1^0$$

$$I^0 - \frac{I^0}{2} - P_1^0 = P_1^0 q_1$$

$$\frac{I^0}{2} - P_1^0 = q_1$$

$$\frac{I^0}{2P_1^0} - 1 = q_1$$

$$q_1^d = \frac{I}{2P_1} - 1$$

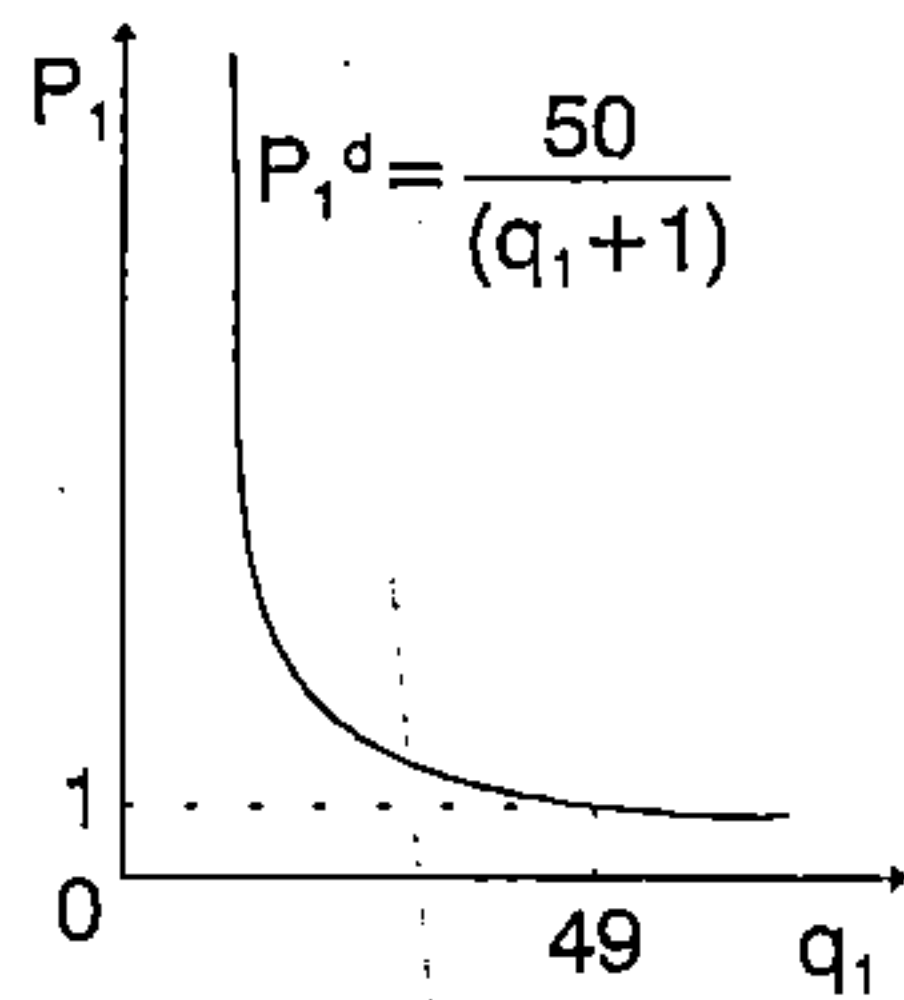
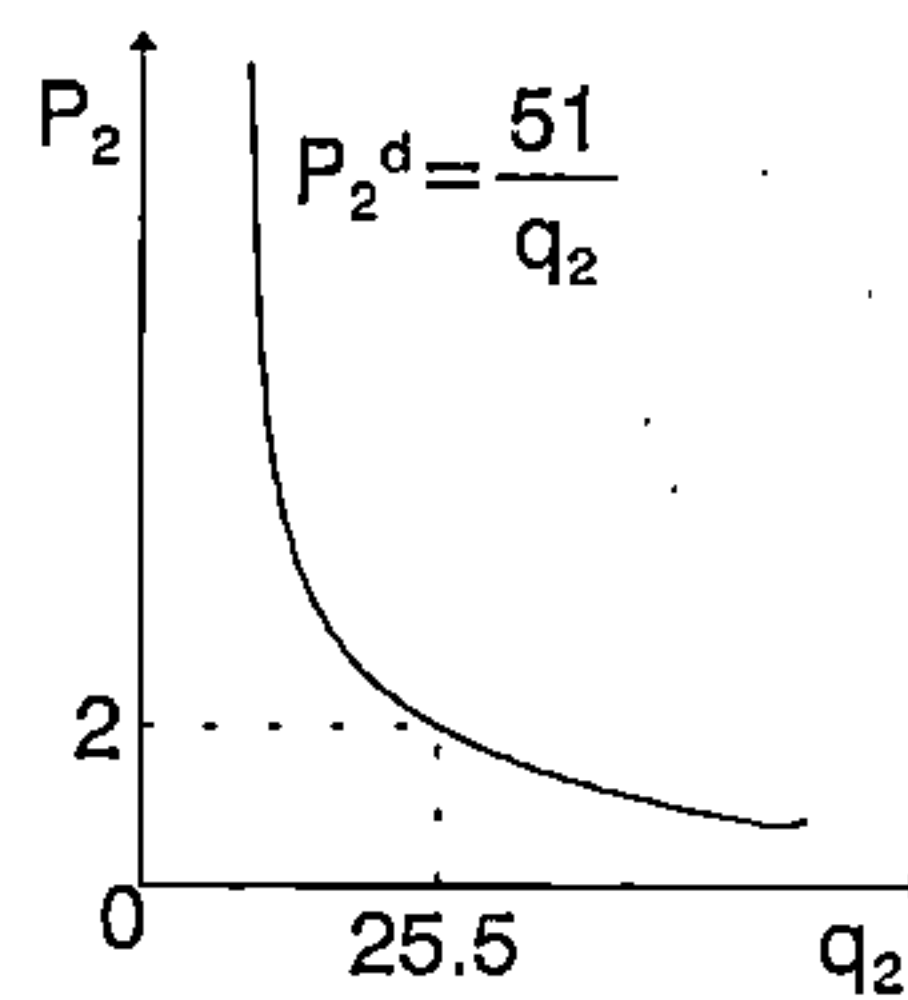
Curva de demanda ordinaria de q_1 que no depende de los precios relativos. Ambas funciones se pueden observar en el gráfico N° II.1.3 asumiendo las condiciones de la segunda parte del problema ($I^0 = 100$, $P_1^0 = 1$ y $P_2^0 = 2$).

Reemplazando el precio del otro bien en las funciones de demanda:

Demanda ordinaria de q_1 : $q_1^d = \frac{100}{2P_1} - 1$ ó $P_1^d = \frac{100}{2(q_1 + 1)}$

Demanda ordinaria de q_2 : $q_2^d = \frac{100}{2P_2} + \frac{1}{P_2}$ ó $P_2^d = \frac{51}{q_2}$

Gráfico N° II.1.3

Curva de Demanda Ordinaria de q_1 Curva de Demanda Ordinaria de q_2

b) Si por ejemplo:

$$I^0 = 100$$

$$P_1^0 = 1$$

$$P_2^0 = 2$$

Reemplazando en las funciones de demanda se obtienen:

$$q_1^d = \frac{100}{2(1)} - 1 = 49 \quad \text{y} \quad q_2^d = \frac{I}{2P_2} + \frac{P_1}{P_2} = \frac{100}{2(2)} + \frac{1}{2} = \frac{51}{2}$$

Comprobación:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{P_1^0}{P_2^0}$$

de la condición de primer orden:

$$\frac{q_2}{q_1 + 2} = \frac{P_1^0}{P_2^0}$$

$$P_2^0 q_2 = P_1^0 q_1 + 2P_1^0$$

Reemplazando esta relación en la recta presupuestal:

$$I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2$$

$$I^0 = P_1^0 q_1 + [P_1^0 q_1 + 2P_1^0]$$

$$100 = 2(1)q_1 + 2(1)$$

$$100 = 2q_1 + 2$$

$$98 = 2q_1$$

$$q_1 = 49$$

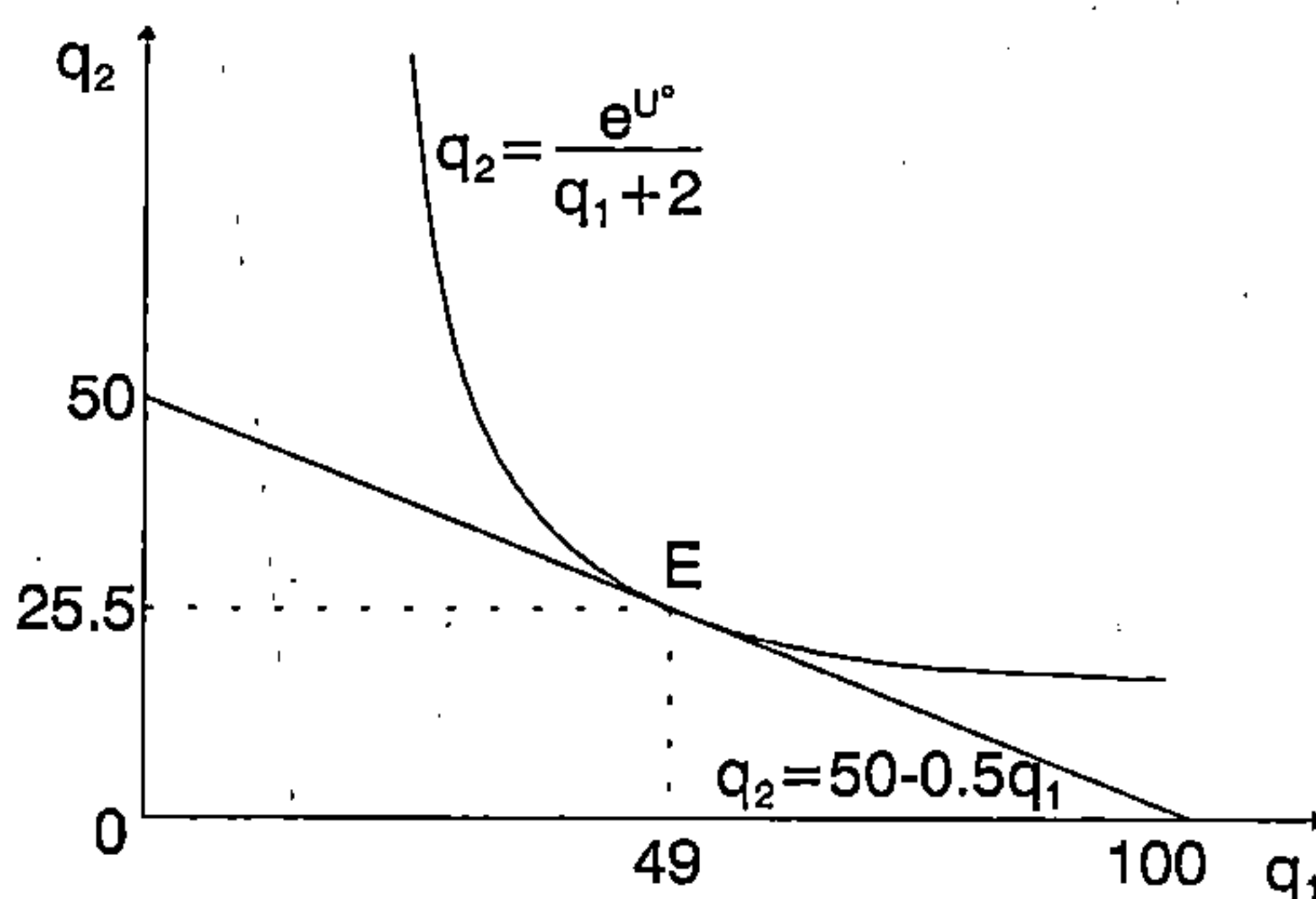
$$P_2^0 q_2 = P_1^0 q_1 + 2P_1^0$$

$$2q_2 = (1)(49) + 2(1)$$

$$2q_2 = 51$$

$$q_2 = \frac{51}{2}$$

Gráfico N° II.1.4



3. Dadas las ecuaciones de utilidad y presupuestal de un consumidor:

$$U = q_1^{3/2} q_2$$

$$100 = 3q_1 + 4q_2$$

Determine:

- Los valores de q_1 y q_2 que maximizan la utilidad del consumidor.
- La $TMgS_{q_2/q_1}$ en el punto de equilibrio.
- Verificar que la condición de segundo orden se cumple en el punto de equilibrio.
- Verificar que las curvas de indiferencia generadas por la función de utilidad son convexas al origen.
- Derivar las funciones de demanda ordinaria para q_1 y q_2 . Verificar que son homogéneas de grado cero en precios e ingreso.

Respuesta:

- a) **Valores de equilibrio:** Se plantea la función de Lagrange que se deriva parcialmente respecto de q_1 , q_2 y λ .

$$L = q_1^{3/2}q_2 + \lambda[100 - 3q_1 - 4q_2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{3}{2}q_2q_1^{1/2} - 3\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = q_1^{3/2} - 4\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - 3q_1 - 4q_2 = 0$$

De las dos primeras derivadas:

$$\frac{3q_2q_1^{1/2}}{2q_1^{3/2}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{1}{2}$$

$$q_2 = \frac{1}{2}q_1$$

Esta relación se reemplaza en la recta presupuestal:

$$100 = 3q_1 + 4q_2$$

$$100 - 3q_1 - 4\left[\frac{1}{2}q_1\right] = 0$$

$$100 - 3q_1 - 2q_1 = 0$$

$$100 = 5q_1$$

$$q_1 = 20$$

Reemplazando el resultado en la condición de primer orden:

$$q_2 = \frac{1}{2}(20)$$

$$q_2 = 10$$

b) Valor de la pendiente de la curva de indiferencia en el punto de equilibrio:

$$-\frac{dq_2}{dq_1} \equiv TMgS_{q_2/q_1} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{3q_2}{2q_1} = \frac{3(10)}{2(20)} = \frac{3}{4}$$

c) Condición de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_1^2} = \frac{3}{2}q_2 \frac{1}{2}q_1^{-1/2} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{3}{2}q_1^{1/2} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial \lambda} = -3$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{3}{2}q_1^{1/2} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q_2^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q_2 \partial \lambda} = -4$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial q_1} = -3$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial q_2} = -4$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 0$$

Hessiano orlado:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4}q_1^{-1/2}q_2 & \frac{3}{2}q_1^{1/2} & -3 \\ \frac{3}{2}q_1^{1/2} & 0 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Expandiendo por cofactores:

$$-3 \begin{vmatrix} \frac{3}{2}q_1^{1/2} & 0 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} \frac{3}{4}q_1^{-1/2}q_2 & \frac{3}{2}q_1^{1/2} \\ -3 & -4 \end{vmatrix} > 0$$

$$-3[-6q_1^{1/2}] + 4\left[-3q_1^{-1/2}q_2 + \frac{9}{2}q_1^{1/2}\right] > 0$$

$$18q_1^{1/2} - 12q_1^{-1/2}q_2 + 18q_1^{1/2} > 0$$

$$36q_1^{1/2} - 12q_1^{-1/2}q_2 > 0$$

$$36q_1^{1/2} - \frac{12q_2}{q_1^{1/2}} > 0$$

$$36\sqrt{20} > \frac{12(10)}{\sqrt{20}}$$

con lo cual se cumple la condición de segundo orden en el punto de solución o tangencia entre la curva de indiferencia y la recta presupuestal.

d) Convexidad de las curvas de indiferencia hacia el origen: Exige

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2} < 0 \quad \text{ó} \quad \frac{d^2q_2}{dq_1^2} > 0$$

$$U = q_1^{3/2} q_2$$

$$U = U^0$$

$$dU^0 = q_2 \frac{3}{2} q_1^{1/2} dq_1 + q_1^{3/2} dq_2 = 0$$

De donde:

$$-\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{3q_2}{2q_1}$$

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = 1.5 \left[\frac{q_1 \left(\frac{dq_2}{dq_1} \right) - q_2}{q_1^2} \right]$$

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = 1.5 \left[\frac{q_1 \left(\frac{-3q_2}{2q_1} \right) - q_2}{q_1^2} \right]$$

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = \frac{1.5(-1.5q_2 - q_2)}{q_1^2}$$

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = \frac{1.5(-2.5q_2)}{q_1^2}$$

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = -3.75 \frac{q_2}{q_1^2} = 3.75 \frac{10}{(20)^2} = -\frac{3.75}{40}$$

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2} < 0$$

e) **Determinación de la curva de demanda ordinaria para q_1 :** De la primera derivada parcial de la función de Lagrange:

$$\frac{3}{2}q_2q_1^{1/2} - P_1^0\lambda = 0$$

$$q_2 = \frac{P_1^0\lambda}{1.5q_1^{1/2}}$$

De la segunda derivada parcial:

$$q_1^{3/2} - P_2^0\lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{q_1^{3/2}}{P_2^0}$$

Entonces, en la restricción presupuestal $I^0 - P_1^0q_1 - P_2^0q_2 = 0$

Se reemplaza $q_2 = \frac{P_1^0 \lambda}{1.5q_1^{1/2}}$

Así: $I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 \left[\frac{P_1^0 \lambda}{1.5q_1^{1/2}} \right]$

$$I^0 = P_1^0 q_1 + \frac{P_2^0 P_1^0 \lambda}{1.5q_1^{1/2}}$$

Como: $\lambda = \frac{q_1^{3/2}}{P_2^0}$

Se reemplaza:

$$I^0 = P_1^0 q_1 + \frac{P_2^0 P_1^0}{1.5q_1^{1/2}} \left[\frac{q_1^{3/2}}{P_2^0} \right]$$

$$I^0 = P_1^0 q_1 + \frac{P_1^0 q_1}{1.5}$$

$$1.5I^0 = 1.5P_1^0 q_1 + P_1^0 q_1$$

$$1.5I^0 = 2.5P_1^0 q_1$$

$$q_1 = \frac{1.5I^0}{2.5P_1^0}$$

Que para cualquier I y P_1 se expresa como:

$$q_1^d = 0.6 \frac{I}{P_1}$$

que es la función de demanda ordinaria para q_1 ; muestra que la cantidad demandada está en función directa del ingreso del consumidor, y en función inversa del precio del bien exclusivamente.

Para: $I^0 = 100$ y $P_1^0 = 3$, los valores de I y P_1 en el problema inicial, se tiene:

$$q_1^d = 0.6 \left(\frac{100}{3} \right)$$

$$q_1^d = 20 \text{ maximiza la utilidad del consumidor.}$$

Determinación de la curva de demanda ordinaria para q_2 : De la primera derivada parcial de la función de Lagrange:

$$\frac{3}{2} q_2 q_1^{1/2} - P_1^0 = 0$$

$$q_1^{1/2} = \frac{P_1^0 \lambda}{1.5 q_2}$$

$$q_1 = \frac{P_1^{02} \lambda^2}{(1.5)^2 q_2^2}$$

Pero:

$$\lambda = \frac{q_1^{3/2}}{P_2^0}$$

Entonces:

$$q_1 = \left(\frac{P_1^{02}}{(1.5)^2 q_2^2} \right) \left(\frac{q_1^{3/2}}{P_2^0} \right)^2$$

$$q_1 = \left(\frac{P_1^{02}}{(1.5)^2 q_2^2} \right) \left(\frac{q_1^3}{P_2^{02}} \right)$$

$$P_1^{02} q_1^2 = (1.5)^2 P_2^{02} q_2^2$$

$$P_1^0 q_1 = 1.5 P_2^0 q_2$$

Reemplazando en: $I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2$

Se obtiene: $I^0 = 1.5 P_2^0 q_2 + P_2^0 q_2$

$$I^0 = 2.5 P_2^0 q_2$$

De donde: $q_2^d = 0.4 \frac{I}{P_2}$,

que es la función de demanda ordinaria para q_2 .

En este ejercicio:

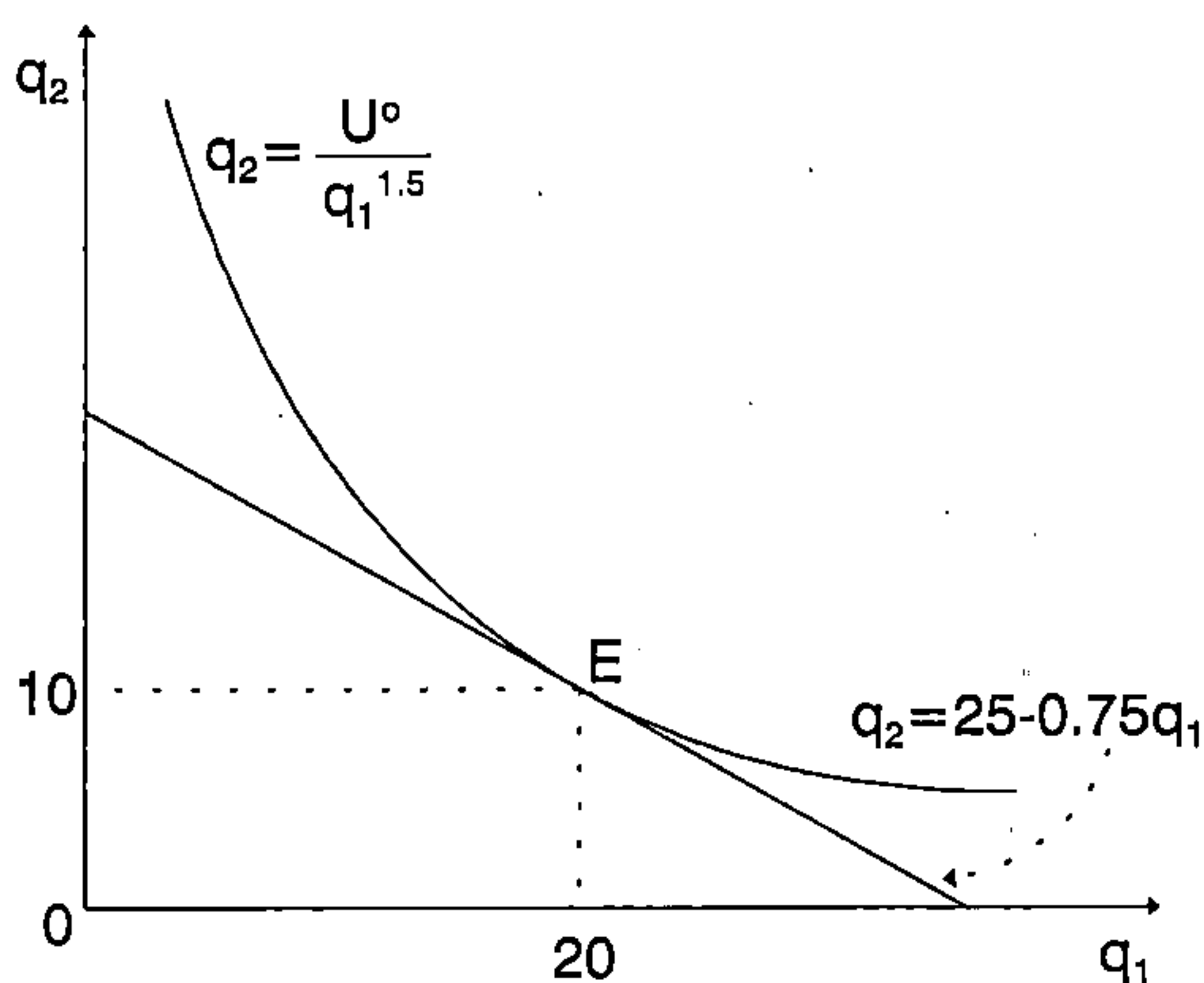
$$I^0 = 100 \quad y \quad P_2^0 = 4$$

$$q_2^d = 0.4 \left(\frac{100}{4} \right)$$

$$q_2^d = 10 \quad \text{maximiza la utilidad del consumidor.}$$

Como se habrá podido apreciar, ambas funciones de demanda son homogéneas de grado cero, pues al multiplicarse el ingreso y el precio por una misma constante positiva, la cantidad demandada no se altera.

Gráfico N° II.1.5



II.2 Ecuación de Slutsky. Demandas compensadas

1. Desarrolle la ecuación de Slutsky a partir de los siguientes datos.

$$U = q_1 q_2$$

$$I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2$$

Respuesta:

Estableciendo la función de Lagrange:

$$L = q_1 q_2 + \lambda [I^0 - P_1^0 q_1 - P_2^0 q_2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = q_2 - \lambda P_1^0 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = q_1 - \lambda P_2^0 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I^0 - P_1^0 q_1 - P_2^0 q_2 = 0$$

Diferenciando totalmente las tres condiciones de primer orden, considerando el ingreso y los precios como variables:

$$0 \quad dq_2 \quad -\lambda dP_1 - P_1 d\lambda = 0$$

$$dq_1 \quad 0 \quad -\lambda dP_2 - P_2 d\lambda = 0$$

$$dI - P_1 dq_1 - q_1 dP_1 - P_2 dq_2 - q_2 dP_2 = 0$$

$$0 \quad dq_2 \quad -P_1 d\lambda = \lambda dP_1$$

$$dq_1 \quad 0 \quad -P_2 d\lambda = -\lambda dP_2$$

$$-P_1 dq_1 - P_2 dq_2 \quad 0 = q_1 dP_1 + q_2 dP_2$$

$$dq_1 = \frac{D'}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -P_1 \\ 1 & 0 & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D' = \begin{vmatrix} \lambda dP_1 & 1 & -P_1 \\ -P_1 & 0 & -P_2 \\ -dI + q_1 dP_1 + q_2 dP_2 & -P_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$dq_1 = \frac{\lambda dP_1 D_{11} - \lambda dP_2 D_{21} + (-dI + q_1 dP_1 + q_2 dP_2) D_{31}}{D}$$

Asumiendo:

$$dI = 0$$

$$dP_2 = 0$$

$$dq_1 = \frac{\lambda dP_1 D_{11} + q_1 dP_1 D_{31}}{D}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial P_1} = \frac{\lambda D_{11}}{D} + q_1 \frac{D_{31}}{D}$$

$$D = 0(-P_2^2) - 1(-P_2 P_1) - P_1(-P_2)$$

$$D = P_2 P_1 + P_2 P_1$$

$$D = 2P_2 P_1 > 0$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -P_2 \\ -P_2 & 0 \end{vmatrix} = -P_2^2$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -P_1 \\ 0 & -P_2 \end{vmatrix} = -P_2$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial q_1}{\partial P_1} = \frac{\lambda P_2^2}{2P_1 P_2} - q_1 \frac{P_2}{2P_1 P_2}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial P_1} = -\frac{\lambda P_2}{2P_1} - q_1 \frac{1}{2P_1}$$

Cálculo de λ (de las dos primeras ecuaciones de las condiciones de primer orden):

$$q_2 = \lambda P_1$$



$$q_1 = \lambda P_2$$

Sustituyéndolas en la recta presupuestal:

$$I - P_1 q_1 - P_2 q_2 = 0$$

$$I - P_1(\lambda P_2) - P_2(\lambda P_1) = 0$$

$$\lambda = \frac{I}{2P_1 P_2}$$

Entonces:

$$\frac{\partial q_1}{\partial P_1} = -\frac{I}{2P_1 P_2} \left(\frac{P_2}{2P_1} \right) - \frac{q_1}{2P_1}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial P_1} = -\frac{I}{4P_1^2} - \frac{q_1}{2P_1}$$

que es la ecuación de Slutsky, donde el primer término del lado derecho es el efecto sustitución y el segundo el efecto renta.

2. Determine los efectos total, sustitución y renta mediante la aplicación de la ecuación de Slutsky en el punto de máximo bienestar para un consumidor cuya ecuación de utilidad y restricción presupuestal es :

$$U = q_1 q_2$$

$$100 = 2q_1 + 5q_2$$

Respuesta:

Aplicando Lagrange:

$$L = q_1 q_2 + \lambda [100 - 2q_1 - 5q_2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = q_2 - \lambda 2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = q_1 - \lambda 5 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - 2q_1 - 5q_2 = 0$$

De las dos primeras derivadas:

$$\lambda = \frac{q_2}{q_1} = \frac{2}{5}$$

$$q_2 = \frac{2}{5} q_1$$

Sustituyendo en la tercera derivada parcial:

$$100 = 2q_1 + 5q_2$$

$$100 = 2q_1 + 5 \left[\frac{2}{5} q_1 \right]$$

$$100 = 2q_1 + 2q_1$$

$$q_1 = \frac{100}{4}$$

$$q_1 = 25$$

Reemplazando los valores anteriores de equilibrio en la ecuación de Slutsky:

$$\frac{\partial q_1}{\partial P_1} = -\frac{I}{4P_1^2} - \frac{q_1}{2P_1}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial P_1} = -\frac{100}{4(2)^2} - \frac{25}{2(2)}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial P_1} = -\frac{100}{16} - \frac{25}{4}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial P_1} = -\frac{25}{4} - \frac{25}{4}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial P_1} = -\frac{50}{4} = -12.50$$

El efecto sustitución y el efecto renta son iguales. El efecto total muestra una relación inversa entre el precio y la cantidad (la curva de demanda ordinaria tiene pendiente negativa).

3. La función de utilidad de un consumidor es:

$$U = q_1 q_2$$

La recta de presupuesto está dada por la ecuación:

$$I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2$$

Se pide:

- Derivar para los bienes q_1 y q_2 las curvas de demanda marshallianas.
- Derivar para el bien q_1 la curva de demanda compensada de Hicks para una variación compensatoria del ingreso cuando $P_1^0 = 2$, $P_2^0 = 2$ e $I^0 = 100$.
- Derivar para el bien q_1 la curva de demanda compensada de Slutsky para una variación compensatoria del ingreso cuando $P_1^0 = 2$, $P_2^0 = 2$ e $I^0 = 100$.

Respuesta:

a) Demanda marshalliana u ordinaria:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{P_1^0}{P_2^0}$$

$$f_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = q_2$$

$$f_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = q_1$$

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{P_1^0}{P_2^0}$$

$$q_2 = \frac{P_1^0 q_1}{P_2^0}$$

Luego:

$$I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 \left[\frac{P_1^0 q_1}{P_2^0} \right]$$

$$I^0 = P_1^0 q_1 + P_1^0 q_1$$

$$I^0 = 2P_1^0 q_1$$

$$q_1^d = \frac{I}{2P_1} \quad \text{curva de demanda ordinaria de } q_1$$

Reemplazando en la recta presupuestal, se tiene:

$$I^0 = P_1^0 \left(\frac{I^0}{2P_1^0} \right) + P_2^0 q_2$$

$$I^0 = \frac{I^0}{2} + P_2^0 q_2$$

$$q_2^d = \frac{I}{2P_2} \quad \text{Curva de demanda ordinaria de } q_2$$

- b) **Demanda compensada a la Hicks:** Mantener al consumidor en su nivel de utilidad inicial teniendo en cuenta los nuevos precios relativos. Para determinar un punto de equilibrio inicial (E_0), se calculan los valores de q_1 y q_2 de equilibrio, cuando $P_1^0 = 2$, $P_2^0 = 2$ e $I^0 = 100$. Por ejemplo:

$$q_1^d = \frac{100}{2P_1^0} = \frac{100}{2(2)} = 25$$

$$q_2^d = \frac{100}{2P_2^0} = \frac{100}{2(2)} = 25$$

Entonces el nivel de utilidad alcanzado por el consumidor inicialmente en E_0 :

$$U = q_1 q_2$$

$$U^0 = (25)(25)$$

$$U^0 = 625$$

$$625 = q_1 q_2$$

Pero si se reemplaza $q_2 = \frac{P_1^0 q_1}{P_2^0} = \frac{P_1^0 q_1}{2}$ en la función:

$$625 = q_1 \left[\frac{P_1^0 q_1}{2} \right]$$

$$625 = \frac{P_1^0 q_1^2}{2}$$

$$1,250 = P_1^0 q_1^2$$

$$q_1^2 = \frac{1,250}{P_1^0}$$

$$q_1^{CH} = \sqrt{\frac{U^0 P_2}{P_1}} \quad \text{ó} \quad q_1^{CH} = \sqrt{\frac{1,250}{P_1}}$$

Curva de demanda compensada según Hicks de q_1 que depende de los precios relativos exclusivamente.

c) Demanda compensada a la Slutsky: Compensar el ingreso del consumidor para mantener el nivel de consumo de la canasta de bienes original con la nueva relación de precios.

Canasta original a nuevos precios relativos: $P_1' q_1^0 + P_2^0 q_2^0 \rightarrow P_1'(25) + 2(25)$

Canasta nueva a nuevos precios relativos: $P_1'q_1' + P_2^0q_2' \rightarrow P_1'q_1' + 2q_2'$

En este caso P_2 no ha variado. Igualando las relaciones, porque se refieren al mismo gasto (nueva recta presupuestal con nuevos precios relativos que intersecta a la antigua canasta y es tangente a la nueva canasta):

$$25P_1' + 50 = P_1'q_1' + 2q_2'$$

Pero:
$$q_2' = \frac{P_1q_1}{P_2} = \frac{P_1'q_1'}{2}$$

De la condición de primer orden para un máximo de utilidad. Reemplazando:

$$25P_1' + 50 = P_1'q_1' + 2 \left[\frac{P_1'q_1'}{2} \right]$$

$$25P_1' + 50 = P_1'q_1' + P_1'q_1'$$

$$25P_1' + 50 = 2P_1'q_1'$$

$$q_1^{CS} = \frac{25(P_1' + 2)}{2P_1'}$$

Curva de demanda compensada de q_1 según Slutsky

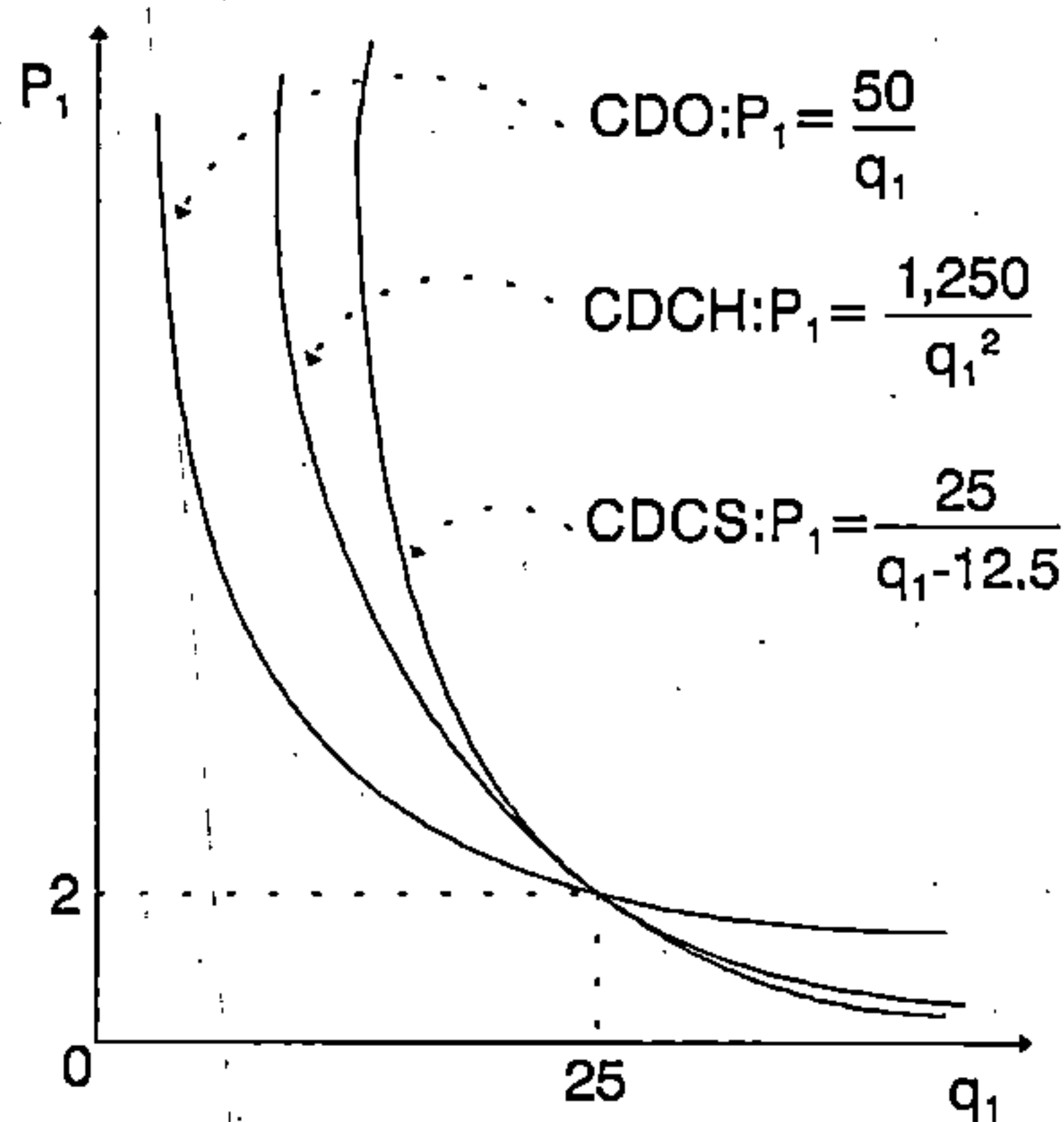
El gráfico N° II.1.6 muestra que el punto de intersección de las tres funciones corresponde al equilibrio cuando $P_1^0 = 2$, $P_2^0 = 2$ e $I^0 = 100$. La diferencia radica en el valor de la pendiente de cada ecuación en este punto. Así:

Demanda marshalliana:
$$m^{CDO} = \frac{dP_1}{dq_1} = -\frac{50}{q_1^2} = -\frac{50}{(25)^2} = -0.08$$

Demanda Hicks: $m^{CDCH} = \frac{dP_1}{dq_1} = -\frac{(1,250)(2)}{q_1^3} = -\frac{2,500}{(25)^3} = -0.16$

Demanda Slutsky: $m^{CDCS} = \frac{dP_1}{dq_1} = -\frac{25}{(q_1 - 12.5)^2} = -\frac{25}{(25 - 12.5)^2} = -0.16$

Gráfico N° II.2.1



II.3 Elasticidad-ingreso o renta

1. Un consumidor adquiere dos bienes q_1 y q_2 cuyos precios unitarios son $P_1^0 = 4$ y $P_2^0 = 6$ y dispone de un ingreso de 84. Su ecuación de utilidad es:

$$U = q_1 q_2$$

$$84 = P_1 q_1 + P_2 q_2$$

Suponiendo que el consumidor se encontraba en equilibrio y que su ingreso crece en 25%, ¿qué clase de bienes son q_1 y q_2 respecto de la variación de su renta (cuál es la $\eta_{1,2}$ para la variación de la renta?).

Respuesta:

Determinación del equilibrio inicial:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{P_1^0}{P_2^0}$$

Condición de equilibrio

$$U = q_1 q_2$$

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{P_1}{P_2}$$

$$f_1 = q_2$$

$$f_2 = q_1$$

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{4}{6}$$

q_2

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{4}{6}$$

$$q_2 = \frac{2}{3}q_1$$

Sustituyendo esta relación en la recta presupuestal:

$$84 = 4q_1 + 6q_2$$

$$84 = 4q_1 + 6\left(\frac{2}{3}q_1\right)$$

$$84 = 8q_1$$

$$q_1 = 10.5$$

$$q_2 = 7$$

Nuevo ingreso:

$$84 (1.25) = 105$$

$$\Delta I = 105 - 84 = +21$$

Nuevos consumos:

$$\alpha I = 21$$

$$105 = 4q_1 + 6q_2$$

$$105 = 4q_1 + 6\left(\frac{2}{3}q_1\right)$$

$$105 = \frac{24}{3}q_1$$

$$q_1 = \frac{315}{24} = 13.125$$

$$q_2 = 8.75$$

$$\Delta q_1 = 13.125 - 10.5 = 2.625$$

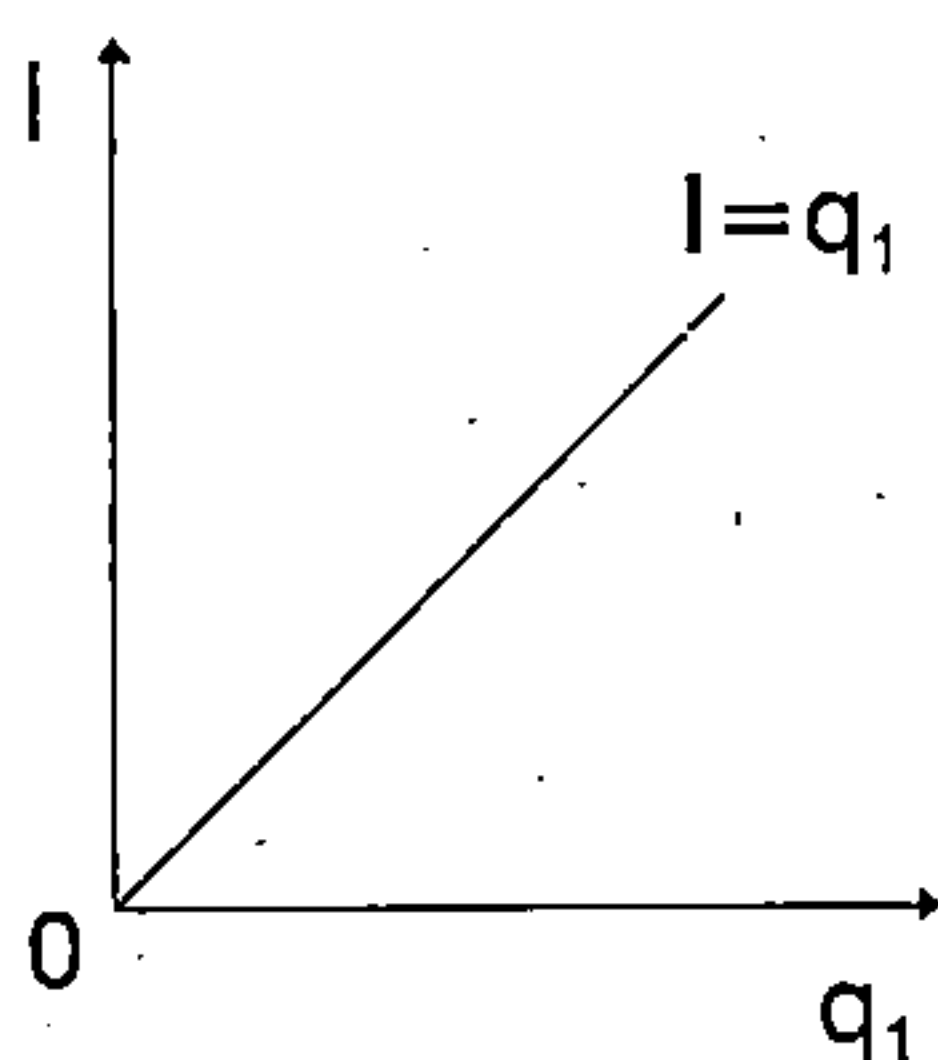
$$\Delta q_2 = 8.75 - 7.0 = 1.75$$

$$\eta_1 = \frac{\left(\frac{\Delta q_1}{q_1^0} \right)}{\left(\frac{\Delta I}{I^0} \right)} = \left(\frac{\Delta q_1}{\Delta I} \right) \left(\frac{I^0}{q_1^0} \right) = \left(\frac{2.625}{21} \right) \left(\frac{84}{10.5} \right) = +1.00$$

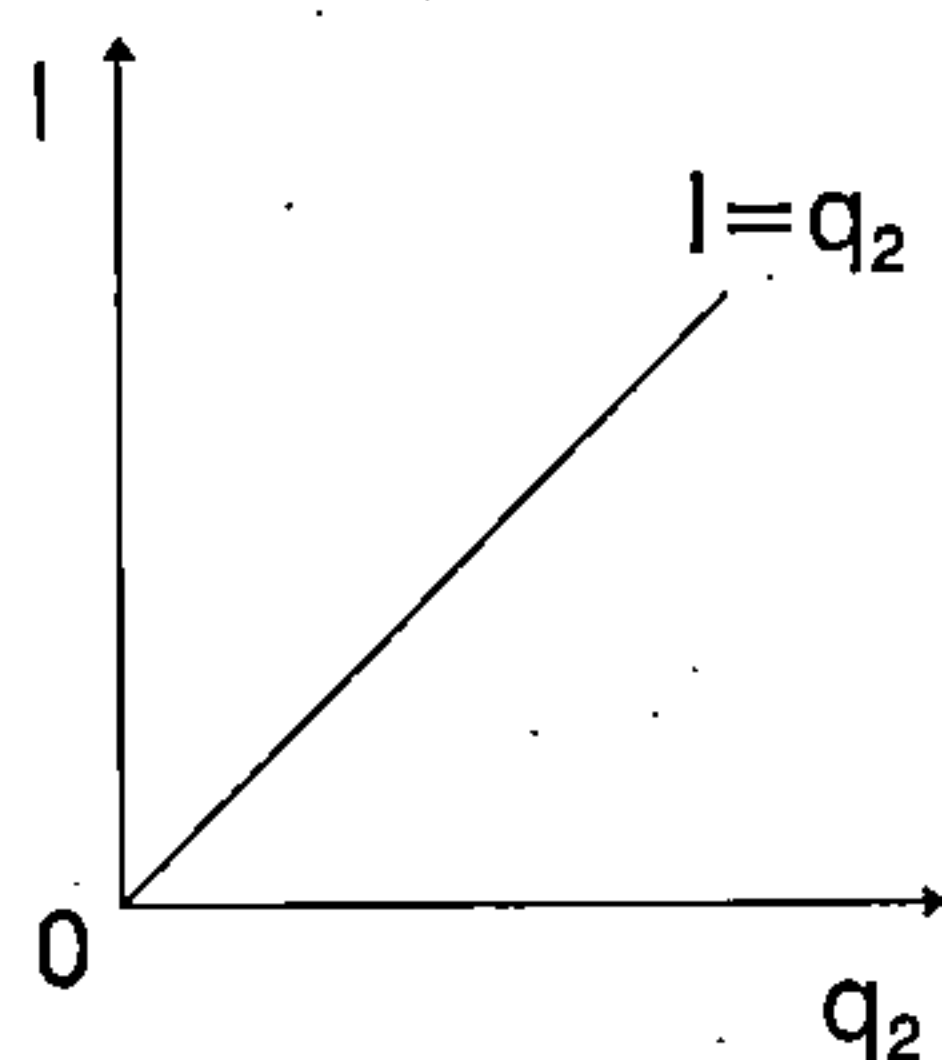
$$\eta_2 = \frac{\left(\frac{\Delta q_2}{q_2^0} \right)}{\left(\frac{\Delta I}{I^0} \right)} = \left(\frac{\Delta q_2}{\Delta I} \right) \left(\frac{I^0}{q_2^0} \right) = \left(\frac{1.75}{21} \right) \left(\frac{84}{7} \right) = +1.00$$

q_1 y q_2 son bienes normales. El porcentaje en que crece el consumo de ambos bienes es igual al porcentaje en que se incrementa el ingreso. Ver gráfico N° II.3.1.

Gráfico N° II.3.1



Curva de Engel para q_1



Curva de Engel para q_2

2. Dada la siguiente información:

$$U = q_1^{2/3} q_2$$

$$50 = q_1 + 2q_2$$

- Determine las ecuaciones de las curvas de Engel para ambos bienes.
- Grafique dichas curvas.
- Determine las elasticidades-ingreso (η_1 y η_2) de ambos bienes en el punto de equilibrio.
- Señale qué clase de bienes son.

Respuesta:

- Curvas de Engel para q_1 y q_2 :** Para determinar el equilibrio inicial se requiere la condición de primer orden:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{P_1^0}{P_2^0}$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$f_1 = \frac{2}{3} q_1^{-1/3} q_2$$

$$f_2 = q_1^{2/3}$$

$$\frac{2q_2}{3q_1^{1/3} q_1^{2/3}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2q_2}{3q_1} = \frac{1}{2}$$

$$q_2 = \frac{3}{4} q_1 \quad y \quad q_1 = \frac{4}{3} q_2$$

Reemplazando en la recta presupuestal:

$$50 = \frac{4}{3}q_2 + 2q_2$$

$$50 = \frac{10}{3}q_2$$

$$q_2 = 15 \quad y \quad q_1 = 20$$

Curva de Engel para q_1 :

$$I^0 = 1q_1 + 2\left(\frac{3}{4}q_1\right)$$

$$I^0 = \frac{2}{2}q_1 + \frac{3}{2}q_1$$

$$I^0 = \frac{5}{2}q_1$$

$$q_1 = \frac{2}{5}I$$

Curva de Engel para q_2 :

$$I^0 = 1\left(\frac{4}{3}q_2\right) + 2q_2$$

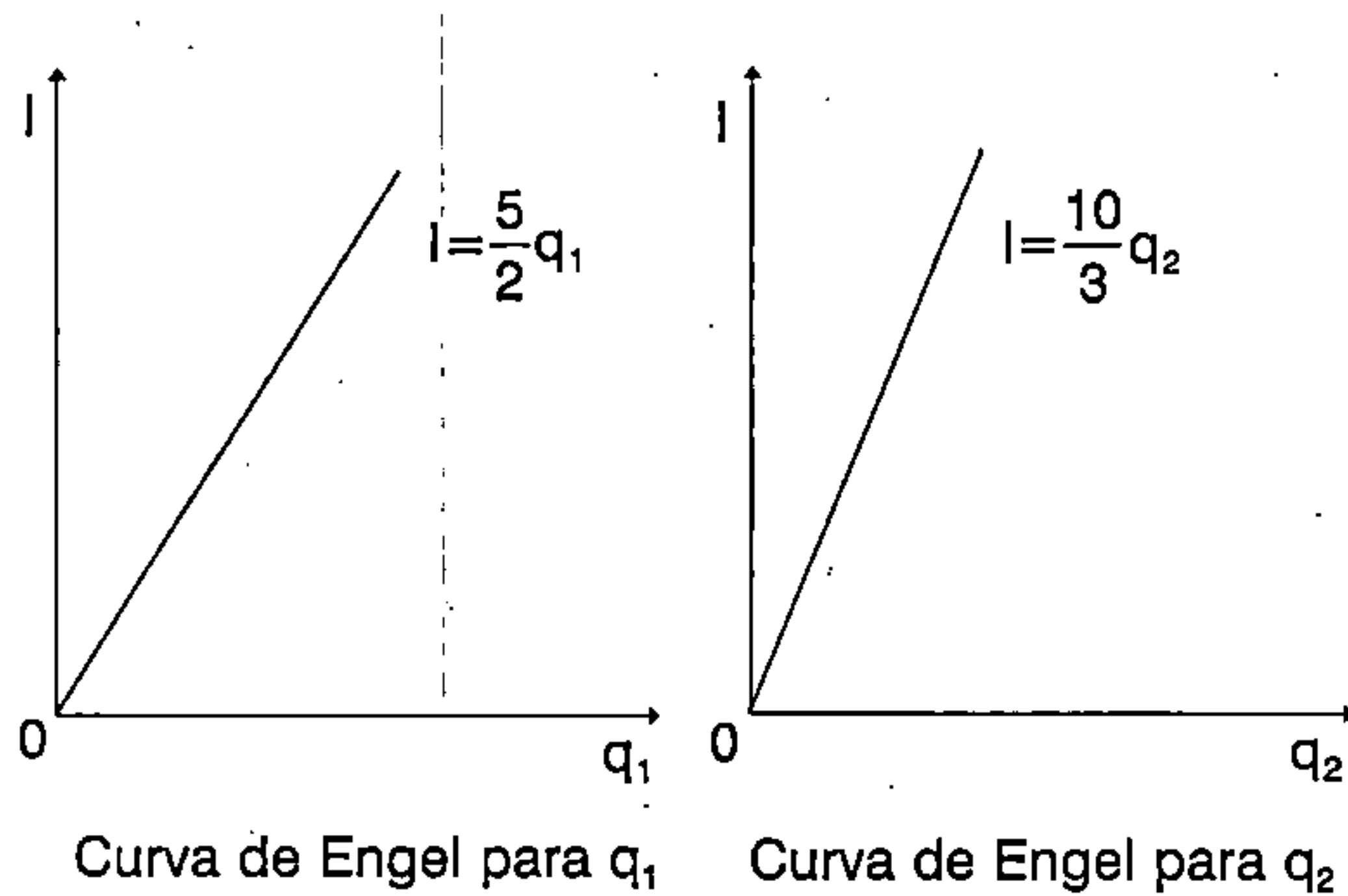
$$I^0 = \frac{4}{3}q_2 + \frac{6}{3}q_2$$

$$I^0 = \frac{10}{3}q_2$$

$$q_2 = \frac{3}{10}I$$

b)

Gráfico N° II.3.2



c) Elasticidades:

Elasticidad-ingreso para q_1 :

$$\eta_1 = \left(\frac{dq_1}{dI} \right) \left(\frac{I^0}{q_1^0} \right)$$

$$\frac{1}{\eta_1} = \left(\frac{dI}{dq_1} \right) \left(\frac{q_1^0}{I^0} \right)$$

Dado

$$I^0 = \frac{5}{2} q_1^0$$

$$\frac{1}{\eta_1} = \left(\frac{5}{2} \right) \left(\frac{20}{50} \right)$$

$$\frac{1}{\eta_1} = +1$$

$$\eta_1 = +1$$

Elasticidad-ingreso para q_2

$$\eta_2 = \left(\frac{dq_2}{dl} \right) \left(\frac{l^0}{q_2^0} \right)$$

$$\frac{1}{\eta_2} = \left(\frac{dl}{dq_2} \right) \left(\frac{q_2^0}{l^0} \right)$$

Dado

$$l^0 = \frac{10}{3} q_2^0$$

$$\frac{1}{\eta_2} = \left(\frac{10}{3} \right) \left(\frac{15}{50} \right)$$

$$\frac{1}{\eta_2} = +1$$

$$\eta_2 = +1$$

d) Son bienes normales, con elasticidades-renta unitarias.

3. Un individuo gasta todo su ingreso en dos bienes q_1 y q_2 . Si gasta el 20% de su ingreso en q_1 cuya elasticidad ingreso es 0.5, ¿qué clase de bien es q_2 ?

Respuesta:

$$\alpha\eta_1 + \beta\eta_2 = 1$$

$$\alpha = 0.20$$

$$\alpha\eta_1 = + 0.5$$

Por lo tanto: $\beta = + 0.80$

Reemplazando valores: $20(0.5) + 0.80\eta_2 = 1$

$$\eta_2 = + 1.125$$

q_2 es un bien de lujo porque $\eta_2 > +1$

4. Cuando el ingreso de un consumidor se incrementa en 1%, la fracción del mismo gastada en alimentos crece en 0.5%. Determine la elasticidad-ingreso de alimentos.

Respuesta:

alimentos	$\alpha = \frac{P_1 q_1}{I}$	Fracción del ingreso gastada en

$$\frac{dI}{I} = 0.01$$

Variación porcentual del ingreso

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = 0.005$$

Variación porcentual de α

$$d\alpha = P_1 \left[\frac{I dq_1 - q_1 dI}{I^2} \right]$$

Considerando a P_1 constante

$$d\alpha = \frac{P_1 dq_1}{I} - \left(\frac{P_1 q_1}{I} \right) \left(\frac{dI}{I} \right)$$

$$d\alpha = \frac{P_1 dq_1}{I} - \alpha \frac{dI}{I}$$

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{P_1 dq_1}{\left[\frac{P_1 q_1}{I} \right]} - \frac{\alpha dl}{\alpha I}$$

Dividiendo ambos lados entre α

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{dq_1}{q_1} - \frac{dl}{I}$$

$$0.005 = \frac{dq_1}{q_1} - 0.01$$

Reemplazando valores

$$\frac{dq_1}{q_1} = 0.015$$

$$\eta_1 = \left(\frac{dq_1}{dl} \right) \left(\frac{I}{q_1} \right)$$

$$\eta_1 = \left(\frac{dq_1}{q_1} \right) \left(\frac{I}{dl} \right)$$

$$h_1 = (0.015)(100)$$

$$\text{Dado: } \frac{dl}{I} = 0.01$$

$$\eta_1 = +1.5$$

La elasticidad-ingreso o renta de q_1 es de +1.5. Se trata de un bien de "lujo".

5. En un estudio sobre la canasta de consumo semanal de las familias se encontraron los siguientes datos:

Estrato social	Nivel ingreso medio	Carne	Lentejas
A	1,491	0.32	0.42
	2,510	0.41	0.48
B	4,496	0.74	0.22
	5,448	1.01	0.20

Determine la elasticidad-ingreso de carne y de lentejas para los dos estratos sociales.

Respuesta:

a) Carne:

Estrato social A:

$$\Delta I = +1,019$$

$$\Delta q = +0.09$$

$$\eta_c^a = \left(\frac{0.09}{1,019} \right) \left(\frac{1,491}{0.32} \right) = +0.4115$$

Estrato social B:

$$\Delta I = +952$$

$$\Delta q = +0.27$$

$$\eta_c^b = \left(\frac{0.27}{952} \right) \left(\frac{4,496}{0.74} \right) = +1.723$$

b) Lentejas:**Estrato social A:**

$$\Delta I = +1,019$$

$$\Delta q = +0.06$$

$$\eta_I^a = \left(\frac{0.06}{1,019} \right) \left(\frac{1,491}{0.42} \right) = +0.209$$

Estrato social B:

$$\Delta I = +952$$

$$\Delta q = -0.02$$

$$\eta_I^b = \left(\frac{0.02}{952} \right) \left(\frac{4,496}{-0.22} \right) = -0.4293$$

Los bienes pueden ser normales o inferiores dependiendo del tramo del ingreso considerado.

La carne resultó ser un bien normal y aún de lujo para el estrato social B. En cambio, para dicho estrato, las lentejas son un bien inferior.



II.4 Elasticidad-precio de la demanda: directa y cruzada

1. Determine la fórmula de la ϵ_{11} (elasticidad directa) para un bien cuya ecuación de demanda está dada por: $q = 9 - 2P^2$. Calcule además el valor de ϵ_{11} cuando $P^0 = 1$.

Respuesta:

$$\epsilon_{11} = \left(\frac{dq}{dP} \right) \left(\frac{P}{q} \right)$$

Como:

$$\frac{dq}{dP} = -4P$$

$$\epsilon_{11} = (-4P) \left(\frac{P}{q} \right)$$

$$\epsilon_{11} = -4 \frac{P^2}{q}$$

Para:

$$P^0 = 1$$

$$q = 9 - 2(1)^2$$

$$q = 9 - 2$$

$$q = 7$$

$$\frac{dq}{dP} = -4P \cdot \frac{P}{q}$$

$$\epsilon_{11} = -4P \cdot \frac{P}{q}$$

$$\epsilon_{11} = -4 \frac{P^2}{q}$$

$$\epsilon_{11} = -\frac{4}{7}$$

$$q = 7$$

$$\varepsilon_{11} = -4 \frac{(1)^2}{7}$$

$$\varepsilon_{11} = -\frac{4}{7}$$

$$\varepsilon_{11} = -0.571$$

E 4

| < 1

Cuando $P^0 = 1$, el bien es inelástico (elasticidad menor que 1 en valor absoluto).

2. Una persona gasta todo su ingreso en dos bienes: q_1 y q_2 . Si un incremento de P_1 en 2, *ceteris paribus*, no cambia sus adquisiciones de q_2 , ¿cuál es la elasticidad directa del bien q_1 ?

Respuesta:

$$I = P_1 q_1 + P_2 q_2$$

Ecuación de la recta presupuestal

$$dI = P_1 dq_1 + q_1 dP_1 + P_2 dq_2 + q_2 dP_2 \quad \text{Diferenciación total}$$

Condiciones del problema:

$$dI = 0$$

$$dP_2 = 0$$

$$dq_2 = 0$$

$$dP_1 = 2$$

Reemplazando valores:

$$P_1 dq_1 + q_1 dP_1 = 0$$

$$P_1 dq_1 + q_1 2 = 0$$

$$2q_1 = -P_1 dq_1$$

$$1 = -\frac{P_1 dq_1}{2q_1}$$

$$\varepsilon_{11} = \left(\frac{dq_1}{dP_1} \right) \left(\frac{P_1}{q_1} \right)$$

$$\varepsilon_{11} = -\frac{2}{dp_1}$$

$$\varepsilon_{11} = -\frac{2}{2} = -1$$

La elasticidad directa es unitaria.

3. En un estudio del consumo de las familias se encontraron los siguientes datos:

Período	A	B	Compras semanales carne vaca	Compras semanales carne cerdo
	Precio carne vaca	Precio carne cerdo		
1	0.89	0.60	2.72	2.25
2	0.68	0.60	3.23	1.96
3	0.62	0.71	3.32	1.57

- a) Calcular la elasticidad cruzada de la demanda entre la carne de vaca y la de cerdo con referencia a un cambio en el precio de la carne de vaca que pasa de 0.89 a 0.68.
- b) Calcular la elasticidad cruzada de la demanda entre la carne de vaca y de cerdo con referencia a un cambio en el precio de la carne de cerdo de 0.60 a 0.71.

Respuesta:**a) Elasticidad cruzada de la demanda de carne de cerdo:**

Sea: q_1 : vaca
 q_2 : cerdo

$$\varepsilon_{21} = \left(\frac{dq_2}{dP_1} \right) \left(\frac{P_1^0}{q_2^0} \right)$$

Los valores de cada variable:

$$dq_2 = 1.96 - 2.25$$

$$dq_2 = -0.29$$

$$dP_1 = 0.68 - 0.89$$

$$dP_1 = -0.21$$

$$P_1^0 = 0.89$$

$$q_2^0 = 2.25$$

Por lo tanto:

$$\varepsilon_{21} = \left(\frac{-0.29}{-0.21} \right) \left(\frac{0.89}{2.25} \right)$$

$$\varepsilon_{21} = + 0.5462$$

La carne de cerdo es un bien sustituto de la carne de vaca en el rango de precios considerados.

b) Elasticidad cruzada de la demanda de carne de vaca:

$$\varepsilon_{12} = \left(\frac{dq_1}{dP_2} \right) \left(\frac{P_2^0}{q_1^0} \right)$$

Los valores de cada variable:

$$dq_1 = 3.32 - 3.23$$

$$dq_1 = + 0.09$$

$$dP_2 = 0.71 - 0.60$$

$$dP_2 = + 0.11$$

$$P_2^0 = 0.60$$

$$q_1^0 = 3.23$$

Por lo tanto:

$$\varepsilon_{12} = \left(\frac{0.09}{0.11} \right) \left(\frac{0.60}{3.23} \right)$$

$$\varepsilon_{12} = +0.15198$$

La carne de vaca es un débil sustituto de la de cerdo en el rango de precios considerados.

4. Dada la función de utilidad de un consumidor: $U = \ln(q_1 + 2) + \ln(q_2)$, si el ingreso es 100, y los precios de mercado $P_1^0 = 2$ y $P_2^0 = 1$:

- a) ¿Cuál será la elasticidad cruzada de demanda del bien q_2 respecto del precio de q_1 (ϵ_{21})? ¿Qué clase de bienes son?
- b) ¿Cuál es la elasticidad cruzada de la demanda del bien q_1 respecto del precio del bien q_2 (ϵ_{12})? ¿Qué clase de bienes son?

Respuesta:

a) Elasticidad cruzada de demanda del bien q_2 respecto del precio de q_1 :

Se requiere establecer la relación de equilibrio entre el consumo de ambos bienes.

En equilibrio:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{P_1^0}{P_2^0}$$

$$f_1 = \frac{1}{q_1 + 2}$$

$$f_2 = \frac{1}{q_2}$$

Reemplazando en la condición de equilibrio:

$$\frac{q_2}{q_1 + 2} = \frac{P_1^0}{P_2^0}$$

$$P_2^0 q_2 = P_1^0 q_1 + 2P_1^0$$

$$\frac{P_2^0 q_2 - 2P_1^0}{P_1^0} = q_1$$

Reemplazando esta relación en la recta de presupuesto:

$$I^0 = P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2$$

$$100 = P_1^0 \left[\frac{P_2^0 q_2 - 2P_1^0}{P_1^0} \right] + P_2^0 q_2$$

$$100 = 2P_2^0 q_2 - 2P_1^0$$

$$q_2 = \frac{100 + 2P_1^0}{2P_2^0}$$

$$q_2 = \frac{100 + 2(2)}{2(1)}$$

$$q_2 = 52$$

Reemplazando valores

Adquisición inicial de q_2

Derivando q_2 con respecto a P_1 :

$$\frac{dq_2}{dP_1} = \frac{1}{P_2}$$

P_2 Es constante

Reemplazando el resultado en la ecuación de elasticidad (ϵ_{21})

$$\epsilon_{21} = \left(\frac{1}{P_2} \right) \left(\frac{P_1^0}{q_2^0} \right)$$

$$\epsilon_{21} = \left(\frac{1}{1} \right) \left(\frac{2}{52} \right)$$

$$\epsilon_{21} = + \frac{2}{52} = + 0.03846$$

$$\frac{\Delta q_2}{q_2} = \frac{\Delta P_1}{P_1}$$

$$\frac{\frac{\Delta q_2}{q_2}}{\frac{\Delta P_1}{P_1}} = \frac{P_1}{q_2}$$

$$\left(\frac{1}{P_2} \right) \frac{P_1}{q_2} = \frac{2}{52}$$

El bien 2 es un débil sustituto del bien 1.

b) Elasticidad cruzada de la demanda del bien q_1 respecto del precio del bien q_2 :

Dado $q_2 = \frac{100 + 2P_1^0}{2P_2^0}$

En equilibrio $100 = P_1^0 q_1 + P_2^0 \left[\frac{100 + 2P_1^0}{2P_2^0} \right]$

Reemplazando en la recta presupuestal

$$100 = P_1^0 q_1 + 50 + P_1^0$$

$$\frac{50 - P_1^0}{P_1^0} = q_1$$

$$q_1 = \frac{50 - 2}{2}$$

$$q_1 = 24 \quad \text{Consumo inicial de } q_1$$

Derivando con respecto al precio del otro bien:

$$\frac{dq_1}{dP_2} = 0$$

y reemplazándolo en la fórmula de la elasticidad cruzada ϵ_{12} :

$$\epsilon_{12} = \left(\frac{dq_1}{dP_2} \right) \left(\frac{P_2^0}{q_1^0} \right)$$

$$\varepsilon_{12} = (0) \left(\frac{1}{24} \right)$$

$$\varepsilon_{12} = 0$$

El bien q_1 es independiente del bien q_2 .

III

Teoría de la producción

III.1 Funciones de producción

1. ¿Qué particularidades muestra la siguiente función de producción?:

$$q = AL^{1.3}; \quad A > 0$$

Respuesta:

a) La primera observación es que la ecuación no tiene un valor máximo. Conforme L crece, q crece indefinidamente. Cuando $L = \alpha$, $q = \alpha$.

b) **Primera derivada o producto marginal de L :**

$$PMgL = \frac{dq}{dL} = 1.3AL^{0.3} > 0$$

Siempre es positiva conforme L crece.

c) **Segunda derivada:**

$$\frac{d(PMgL)}{dL} = 1.3(0.3)AL^{-0.7}$$

$$\frac{d(PMgL)}{dL} = \frac{0.39A}{L^{0.7}}$$

Siempre es positiva pero decreciente.

d) El producto medio:

$$PMeL = \frac{q}{L} = \frac{AL^{1.3}}{L}$$

$$PMeL = AL^{0.3}$$

siempre es positivo

Además:

$$\frac{d(PMeL)}{dL} = A(0.3)L^{-0.7}$$

$$\frac{d(PMeL)}{dL} = \frac{0.3A}{L^{0.7}}$$

no tiene máximo y también crece a una tasa decreciente

Obsérvese además que en esta función el PMeL se encuentra siempre por debajo del PMgL.

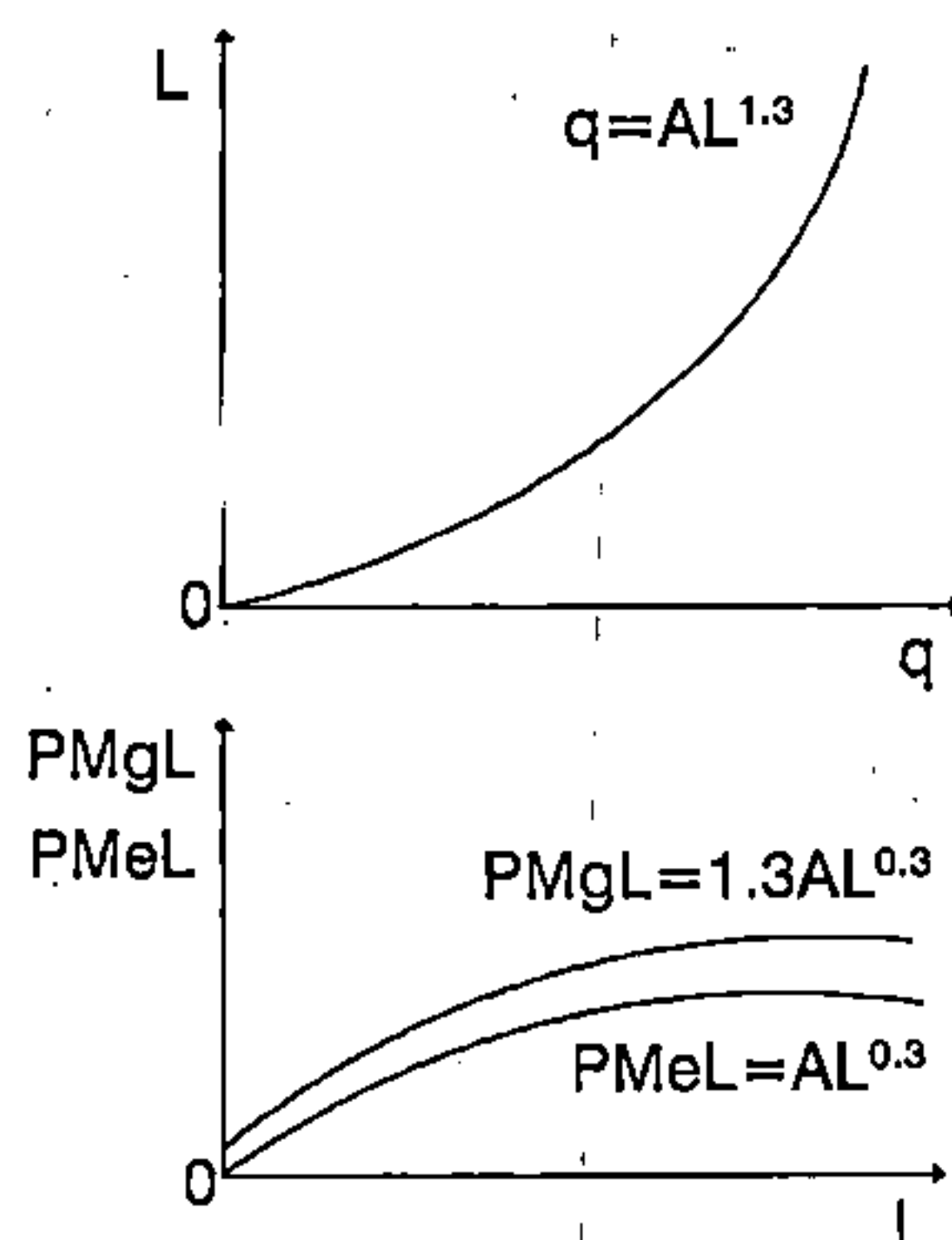
$$PMeL = AL^{0.3}$$

$$PMgL = 1.3AL^{0.3}$$

$$PMgL = 1.3(PMeL)$$

La función sólo opera en la primera fase de la producción como se observa en el siguiente gráfico.

Gráfico N° III.1.1



2. Dada la función de producción:

$$q = LK - 0.2L^2 - 0.8K^2$$

- ¿Cuáles serán las funciones de PMeL y PMgL dado $K^0 = 10$?
- ¿Para qué valores de L , el PMgL y el PMeL se igualan a cero?

Respuesta:

a) **Producto medio y marginal de L:**

$$PMeL = \frac{q}{L} = K - 0.2L - 0.8\frac{K^2}{L}$$

$$PMgL = \frac{\partial q}{\partial L} = K - 0.4L$$

Para $K^0 = 10$

$$P_{MeL} = 10 - 0.2L - 0.8 \frac{100}{L} = 10 - 0.2L - \frac{80}{L}$$

$$P_{MgL} = 10 - 0.4L$$

b) Producto medio de $L = 0$

$$P_{MeL} = 10L - 0.2L^2 - 80 = 0$$

$$0.2L^2 - 10L + 80 = 0$$

$$L^2 - 50L + 400 = 0$$

$$L = \frac{50 \pm \sqrt{2,500 - 1,600}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{900}}{2}$$

$$L_1 = \frac{80}{2} = 40$$

$$L_2 = \frac{20}{2} = 10$$

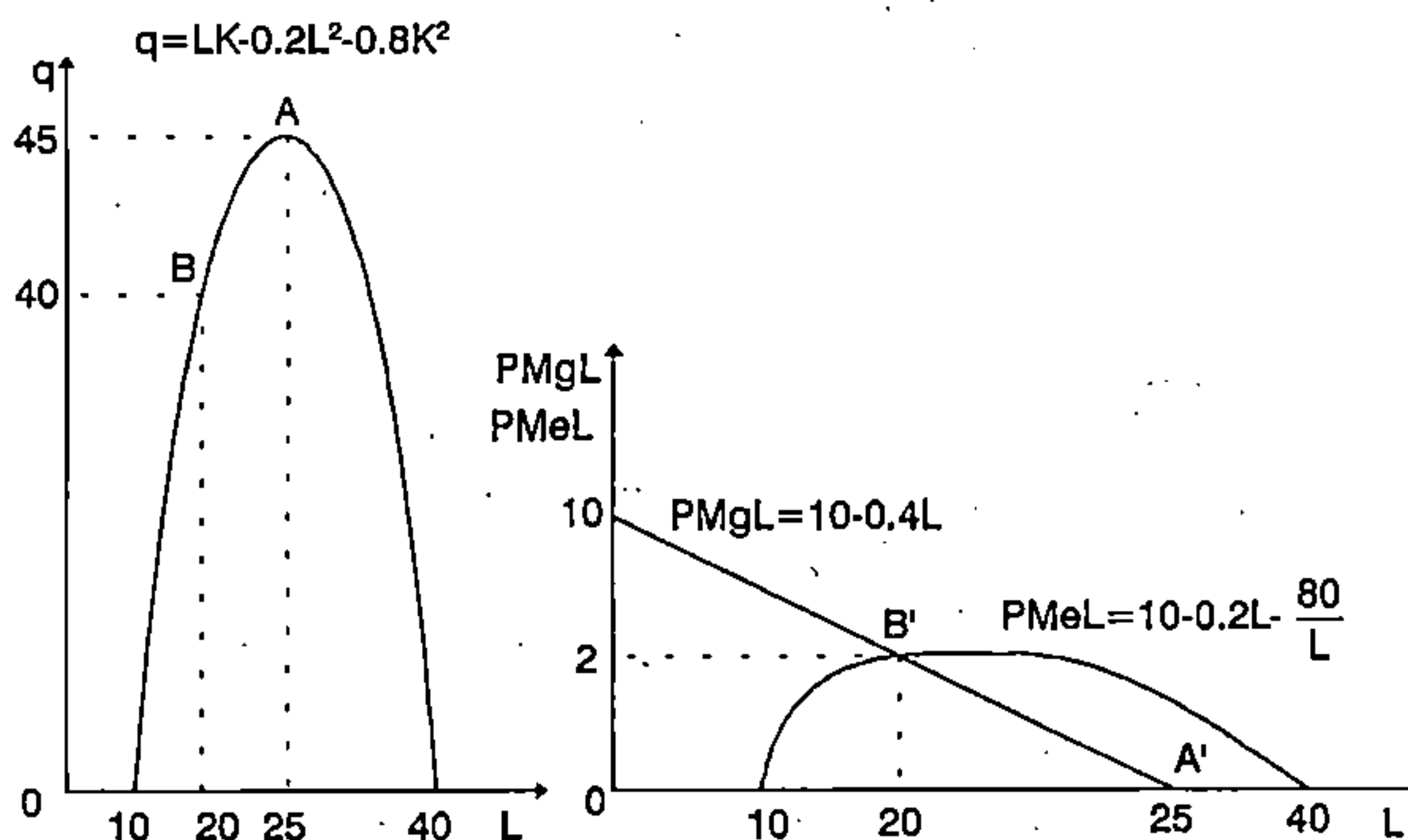
Producto marginal de $L = 0$

$$P_{MgL} = 10 - 0.4L = 0$$

$$10 = 0.4L$$

$$L = 25$$

Gráfico N° III.1.2



3. Verificar que la función de producción Cobb-Douglas no es estrictamente cóncava.

$$q = AL^\alpha K^{1-\alpha} \quad A > 0; \quad 0 < \alpha < 1$$

Respuesta:

Una función de producción es estrictamente cóncava si:

$$f_{LL} < 0$$

$$f_{KK} < 0$$

Productos marginales de L y K decrecientes

$$\begin{vmatrix} f_{LL} & f_{LK} \\ f_{KL} & f_{KK} \end{vmatrix} > 0$$

Desarrollando las derivadas parciales para esta función de producción:

$$f_L = A\alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha}$$

$$f_{LL} = A\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^{1-\alpha}$$

$$f_{LL} = A \frac{L^{\alpha}K^{1-\alpha}}{L^2} (\alpha)(\alpha-1)$$

$$f_{LL} = \frac{q}{L^2} (\alpha^2 - \alpha) < 0$$

$$f_K = AL^{\alpha}(1-\alpha)K^{1-\alpha-1}$$

$$f_{KK} = A^{\alpha}(1-\alpha)(-\alpha)K^{-1-\alpha}$$

$$f_{KK} = A \frac{L^{\alpha}K^{1-\alpha}}{K^2} (1-\alpha)(\alpha)$$

$$f_{KK} = \frac{q}{K^2} (-\alpha + \alpha^2) < 0$$

$$f_{LK} = A\alpha L^{\alpha-1}(1-\alpha)K^{-\alpha}$$

$$f_{LK} = A \frac{L^{\alpha}K^{1-\alpha}}{LK} \alpha(1-\alpha)$$

$$f_{LK} = \frac{q}{LK} (\alpha - \alpha^2) > 0$$

Desarrollando el determinante de la matriz:

$$(f_{LL}f_{KK}) - (f_{LK})^2 > 0$$

$$\left[\frac{q}{L^2}(\alpha^2 - \alpha) \frac{q}{K^2}(\alpha^2 - \alpha) \right] - \left[\frac{q(\alpha - \alpha^2)}{LK} \right]^2 > 0$$

$$\frac{q^2(\alpha^2 - \alpha)^2}{L^2K^2} - \frac{q^2(\alpha - \alpha^2)^2}{L^2K^2} = 0$$

Ya que:

$$(\alpha^2 - \alpha)^2 = (\alpha - \alpha^2)^2$$

No es estrictamente cóncava. Presenta segmentos lineales por ser homogénea de primer grado.

III.2 Eficiencia en la producción

1. Si el PMgL es $f_L = 100K$ y el PMgK es $f_K = 100L - K$, ¿cuál es la combinación óptima de insumos cuando la suma total que puede gastarse en L y K es 1,000, el precio de K es 5 y el de L es 2?

Respuesta:

Condición de equilibrio o eficiencia:

$$TMgST_{K/L} = \frac{f_L}{f_K} = \frac{P_L^0}{P_K^0}$$

$$\frac{100K}{100L - K} = \frac{2}{5}$$

La recta de isocostos es:

$$1,000 = 2L + 5K$$

$$2L = 1,000 - 5K$$

$$L = 500 - \frac{5}{2}K$$

Sustituyendo L en la condición de primer orden:

$$\frac{100K}{100\left[500 - \frac{5}{2}K\right] - K} = \frac{2}{5}$$

$$500K = 2[50,000 - 250K - K]$$

$$500K = 100,000 - 502K$$

$$1,002K = 100,000$$

$$K = \frac{100,000}{1,002} = 99.8 \cong 100$$

Entonces:

$$L = 500 - \frac{5}{2}(100)$$

$$L = 500 - 250$$

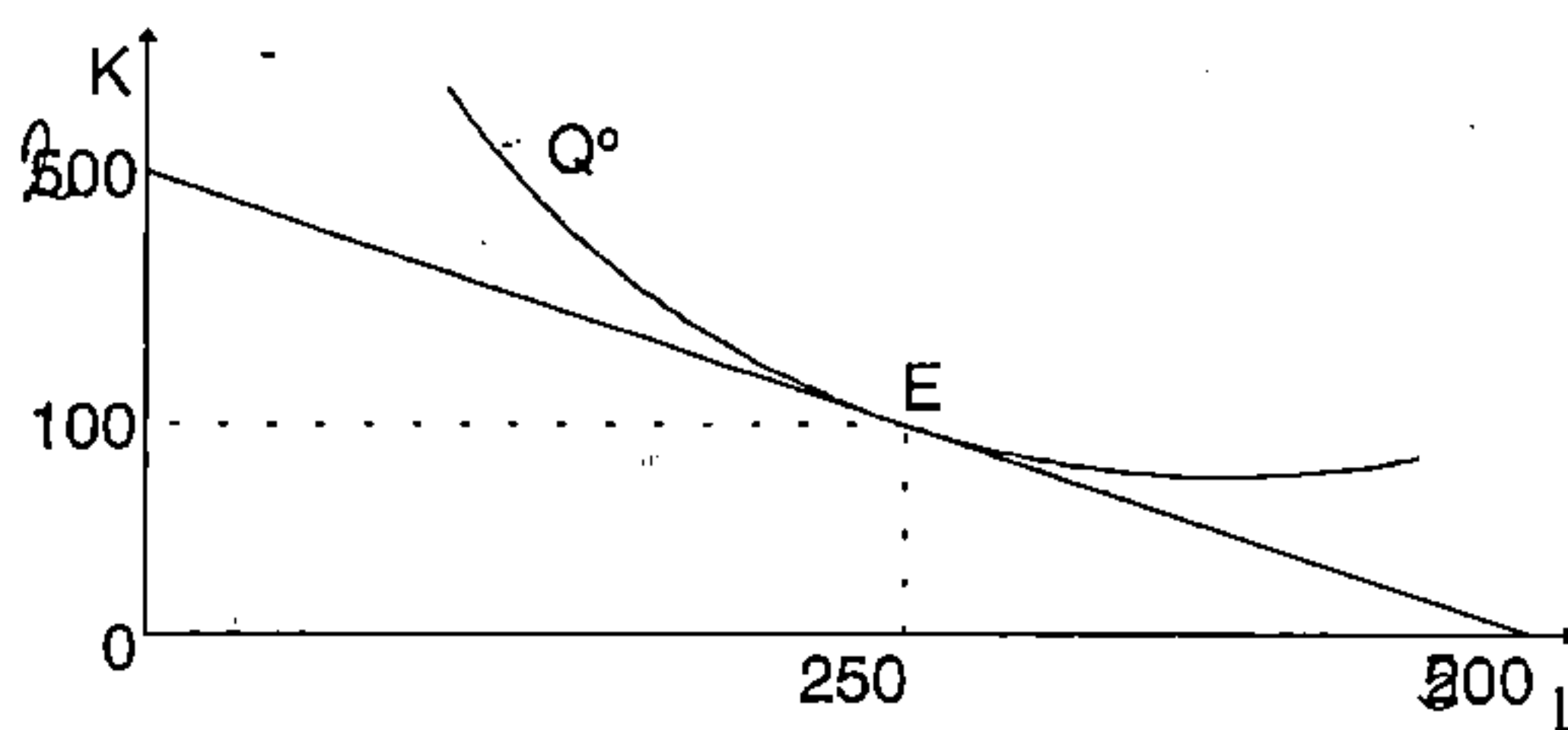
$$L = 250$$

Comprobación (reemplazando valores de L y K en la isocostos):

$$1,000 = 250(2) + 100(5)$$

$$1,000 = 500 + 500$$

Gráfico N° III.2.1



2. Dada la función de producción:

$q = 6L^{3/6}K^{2/6}$, homogénea de grado menor que 1,

y los precios de los insumos: $P_L^0 = 40$, $P_K^0 = 60$

¿Cuál será la producción máxima cuando el empresario dispone de un presupuesto de 10,000 y cuál es la senda o camino de expansión de la firma?

Respuesta

$$TMgST_{K/L} = \frac{f_L}{f_K} = \frac{P_L^0}{P_K^0} \quad \text{Condición de equilibrio o eficiencia}$$

Hallando las derivadas parciales:

$$f_L = 6 \frac{3}{6} L^{-3/6} K^{2/6}$$

$$f_L = 3L^{-3/6} K^{2/6}$$

$$f_K = 6L^{3/6} \frac{2}{6} K^{-4/6}$$

$$f_K = 2L^{3/6} K^{-4/6}$$

Sustituyendo en la $TMgST_{K/L}$:

$$\frac{f_L}{f_K} = \frac{3L^{-3/6} K^{2/6}}{2L^{2/6} K^{-4/6}} = \frac{3K}{2L}$$

Y reemplazando en la condición de equilibrio:

$$\frac{3K}{2L} = \frac{40}{60}$$

$$\frac{3K}{2L} = \frac{2}{3}$$

$$4L = 9K$$

$$L = \frac{9}{4}K$$

Esta relación se sustituye en la recta de presupuesto:

$$10,000 = 40 \left[\frac{9}{4}K \right] + 60K$$

$$10,000 = 90K + 60K$$

$$150K = 10,000$$

$$K = \frac{200}{3} \cong 66.67$$

$$L = \frac{9}{4} \left(\frac{200}{3} \right)$$

$$L = 150$$

Obsérvese que la $TMgST_{K/L}$ depende de la relación K/L . La senda de expansión es una recta.

La producción óptima:

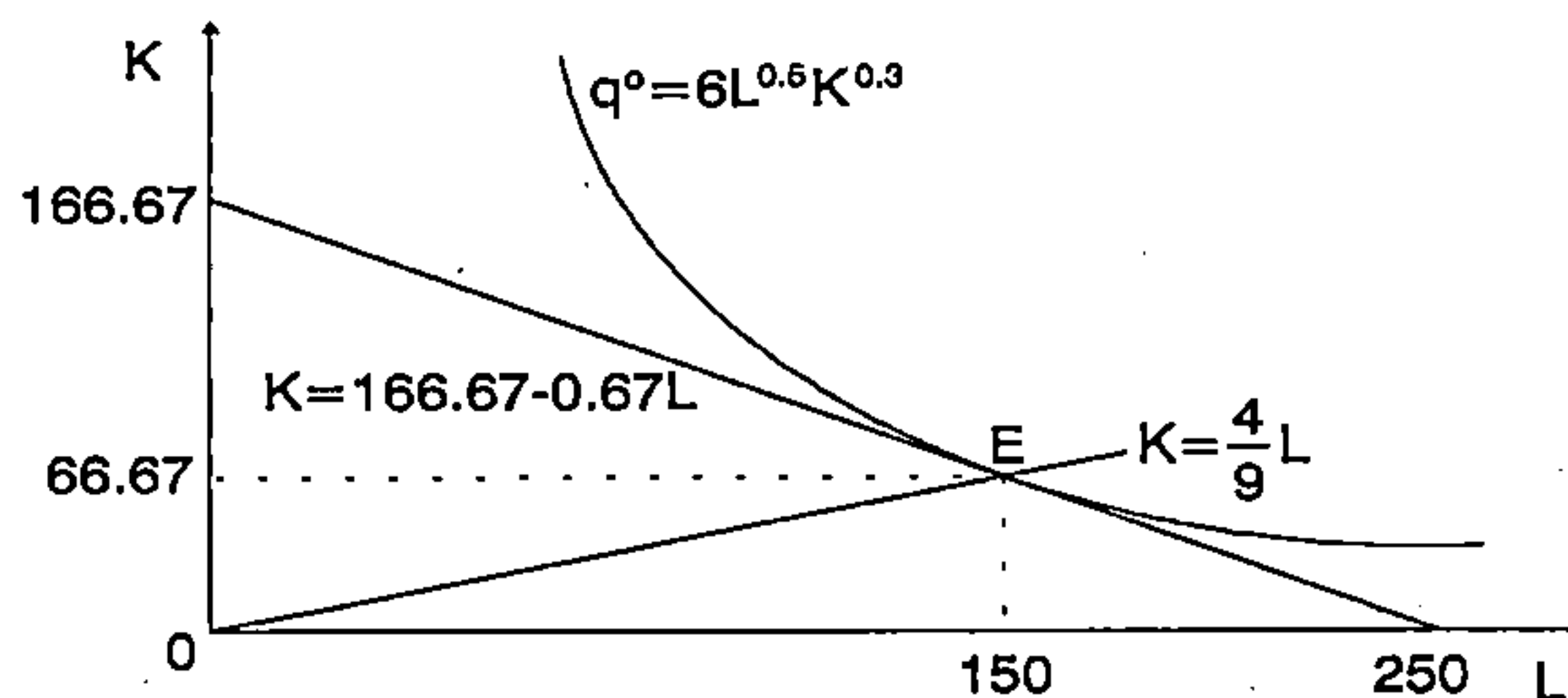
$$q = 6(150)^{1/2} \left(\frac{200}{3} \right)^{1/3}$$

$$q = 6(12.25)(3.985)$$

$$q = 293$$

El ejemplo muestra que no todos los caminos de expansión que son rectas pertenecen a funciones homogéneas de primer grado. Pero cabe señalar que todas las funciones de producción homogéneas de primer grado generan caminos que son rectas. El equilibrio se muestra en el siguiente gráfico.

Gráfico N° III.2.2



III.3 Elasticidad de productividad

1. Determinar la elasticidad de productividad total (ε_t) de la función:

$$q = 2aKL.$$

Respuesta:

$$f_L = 2aK$$

$$f_K = 2aL$$

$$PM_eL = 2aK$$

$$PM_eK = 2aL$$

$$\varepsilon_t = \frac{PM_eL}{PM_eL} + \frac{PM_eK}{PM_eK}$$

$$\varepsilon_t = \frac{2aK}{2aK} + \frac{2aL}{2aL}$$

$$\varepsilon_t = 1 + 1$$

$$\varepsilon_t = 2$$

Valor que corresponde al grado de homogeneidad de la función de producción que en este caso presenta rendimientos a escala crecientes.

2. Determine la elasticidad de productividad total (ε_t) de la función

$$q = \frac{KL}{K + L}$$

Respuesta:

$$\varepsilon_t = \frac{PMgL}{PMeL} + \frac{PMgK}{PMeK}$$

$$f_L = \frac{K^2}{(K+L)^2}$$

$$f_K = \frac{L^2}{(K+L)^2}$$

$$PMeL = \left(\frac{KL}{K+L} \right) \left(\frac{1}{L} \right) = \frac{KL}{L(K+L)}$$

$$PMeK = \left(\frac{KL}{K+L} \right) \left(\frac{1}{K} \right) = \frac{KL}{K(K+L)}$$

Por lo tanto:

$$\varepsilon_t = \frac{\left(\frac{K^2}{(K+L)^2} \right)}{\left(\frac{KL}{L(K+L)} \right)} + \frac{\left(\frac{L^2}{(K+L)^2} \right)}{\left(\frac{KL}{K(K+L)} \right)}$$

$$\varepsilon_t = \frac{K^2 L (K + L)}{KL (K + L)^2} + \frac{L^2 K (K + L)}{KL (K + L)^2}$$

$$\varepsilon_t = \frac{K}{(K + L)} + \frac{L}{(K + L)}$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_L + \varepsilon_K$$

$$\varepsilon_t = \frac{(K + L)}{(K + L)}$$

$$\varepsilon_t = 1$$

Cuando la función de producción es homogénea, la elasticidad de productividad corresponde al grado de homogeneidad de la función.

3. En la función de producción Cobb-Douglas, la elasticidad de productividad del trabajo es α y la del capital es $(1 - \alpha)$. ¿Es correcta esta afirmación?

Respuesta:

$$q = AL^\alpha K^{1-\alpha}$$

$$\varepsilon_L = \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial L}\right) \left(\frac{L}{q}\right)}{\left(\frac{\partial q}{\partial L}\right) \left(\frac{L}{q}\right)} = \left(\frac{\partial q}{\partial L}\right) \left(\frac{L}{q}\right)$$

$$\varepsilon_L = \left(\alpha \frac{q}{L}\right) \left(\frac{L}{q}\right) \text{ ya que: } f_L = \alpha \frac{q}{L}$$

$$\varepsilon_L = \alpha$$

$$\varepsilon_K = \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right) \left(\frac{K}{q}\right)}{\left(\frac{\partial q}{\partial K}\right) \left(\frac{K}{q}\right)} = \left(\frac{\partial q}{\partial K}\right) \left(\frac{K}{q}\right)$$

$$\varepsilon_K = \left((1 - \alpha) \frac{q}{K} \right) \left(\frac{K}{q} \right) \quad \text{ya que: } f_K = (1 - \alpha) \frac{q}{K}$$

$$\varepsilon_K = (1 - \alpha)$$

La afirmación es correcta.

4. ¿En qué porcentaje variará el producto medio de K, si K varía en 1%?

Respuesta:

Se trata de un concepto de elasticidad.

$$\varepsilon = \frac{\Delta \% \text{PM} \text{ de } K}{\Delta \% K}$$

$$\varepsilon = \frac{\frac{d\left(\frac{q}{K}\right)}{\left(\frac{q}{K}\right)}}{\left(\frac{dK}{K}\right)}$$

$$\varepsilon = \left[\frac{d\left(\frac{q}{K}\right)}{dK} \right] \left[\frac{K}{\left(\frac{q}{K}\right)} \right]$$

$$\varepsilon = \left[d\left(\frac{q}{K}\right) \right] \left[\frac{(K)(K)}{(dK)(q)} \right]$$

$$\varepsilon = \left(\frac{Kdq - qdK}{K^2} \right) \left(\frac{K^2}{qdK} \right)$$

$$\varepsilon = \frac{Kdq - qdK}{qdK}$$

$$\varepsilon = \left(\frac{dq}{dK} \right) \left(\frac{K}{q} \right) - 1$$

$$\varepsilon = \varepsilon_K - 1$$

El producto medio de K variará en un porcentaje igual al valor de la elasticidad de productividad de K (ε_K) menos la unidad.

III.4 Elasticidad de sustitución

1. Determine la elasticidad de sustitución y la senda de expansión para la función de producción:

$$q = \frac{KL}{K+L}$$

Respuesta:

- a) **Elasticidad de sustitución:** Se determina el grado de homogeneidad:

$$\frac{(tK)(tL)}{(tK) + (tL)} = \frac{t^2(KL)}{t(K+L)} = t^1 q \quad \text{Función homogénea de primer grado,}$$

entonces se puede aplicar una fórmula más sencilla para hallar la elasticidad de sustitución.

$$\sigma = \frac{L f_K}{K f_L}$$

$$f_L = \frac{\partial q}{\partial L} = \frac{K^2}{(K+L)^2}$$

$$f_K = \frac{\partial q}{\partial K} = \frac{L^2}{(K+L)^2}$$

$$f_{KL} = \frac{\partial^2 q}{\partial K \partial L} = \frac{2LK}{(K+L)^3}$$

Reemplazando:

$$\sigma = \frac{\left(\frac{L^2}{(K+L)^2} \right) \left(\frac{K^2}{(K+L)^2} \right)}{\left(\frac{2KL}{(K+L)^3} \right) \left(\frac{KL}{(K+L)} \right)} = 1/2 \quad \text{Valor constante}$$

b) Senda de expansión:

$$\frac{f_L}{f_K} = \frac{P_L^0}{P_K^0}$$

Condición de equilibrio

$$\frac{\left(\frac{K^2}{(K+L)^2} \right)}{\left(\frac{L^2}{(K+L)^2} \right)} = \frac{P_L^0}{P_K^0}$$

$$\frac{K^2}{L^2} = \frac{P_L^0}{P_K^0}$$

$$P_K^0 K^2 - P_L^0 L^2 = 0$$

$$P_K^0 K^2 = P_L^0 L^2$$

$$K^2 = \frac{P_L^0}{P_K^0} L^2$$

$$K = \left(\sqrt{\frac{P_L^0}{P_K^0}} \right) (L)$$

$$K = cL$$

La senda de expansión es una recta.

2. Demostrar que en la función de Cobb-Douglas, la participación del trabajo en el producto es α .

Respuesta:

$$q = AL^\alpha K^{1-\alpha}$$

Cobb-Douglas es homogénea de primer grado, por lo tanto se puede aplicar el teorema de Euler:

$$f_L L + f_K K = q$$

$$f_L = A\alpha L^{\alpha-1} K^{1-\alpha} = \alpha \frac{q}{L}$$

$$f_K = AL^\alpha (1-\alpha) K^{1-\alpha-1} = (1-\alpha) \frac{q}{K}$$

Sustituyendo:

$$\alpha \frac{q}{L} L + (1 - \alpha) \frac{q}{K} K = q$$

$$\alpha q + (1 - \alpha) q = q$$

α es participación del trabajo y $(1 - \alpha)$ la participación del capital en términos físicos.

Como: $f_L = \alpha \frac{q}{L}$ ó $\alpha q = f_L L$

Y se sabe que: $P_L^0 = P^0 f_L$

El precio del factor debe igualar al valor de su producto marginal.

Se despeja $f_L = \frac{P_L^0}{P^0}$

Y se reemplaza: $\alpha q = \frac{P_L^0}{P^0} L$

$$\alpha = \frac{P_L^0 L}{P^0 q}$$

Participación del trabajo en el valor del producto.

IV

Teoría de los costos

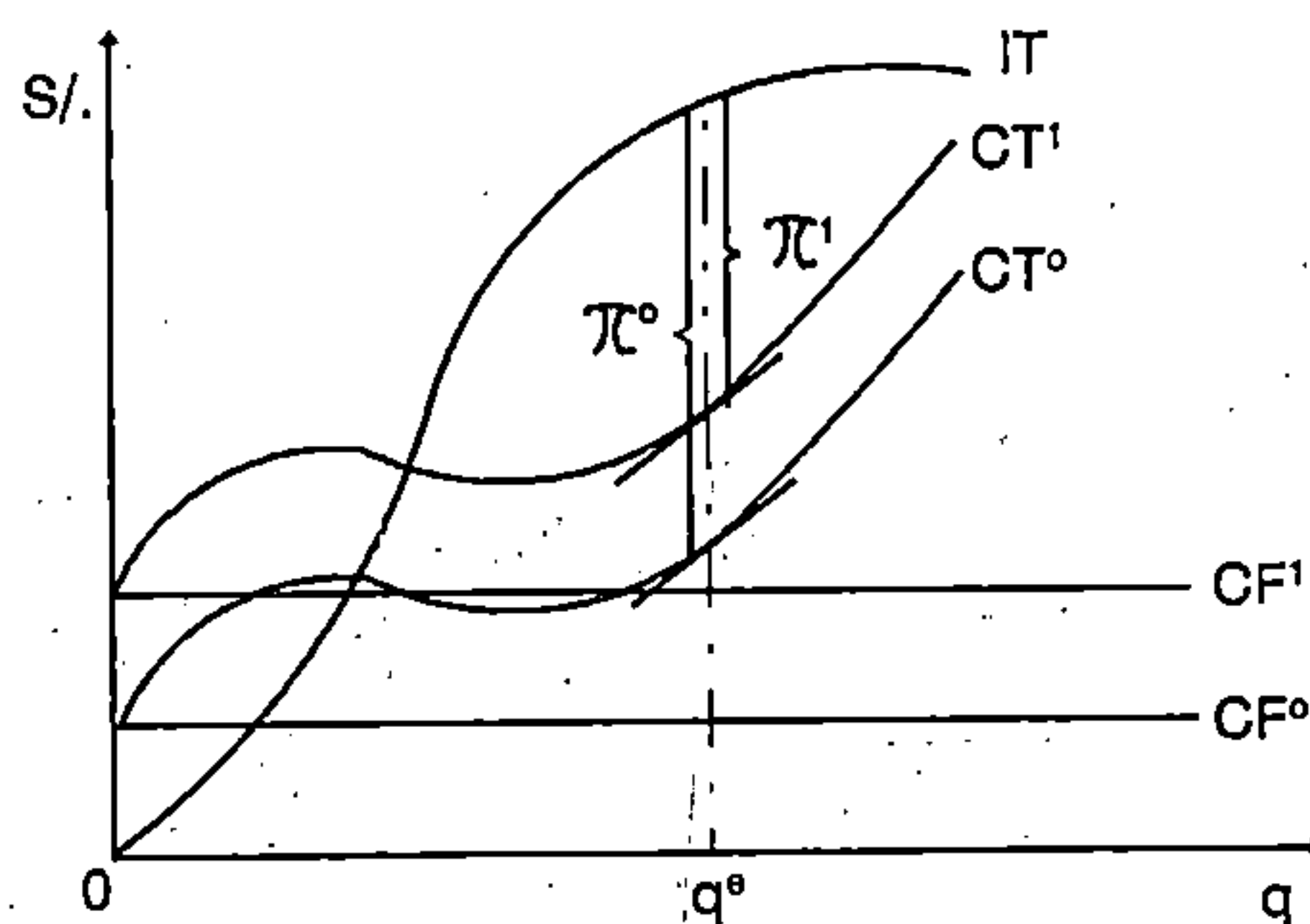
IV.1 Costos en el corto plazo

1. ¿En qué sentido una elevación del CF altera el equilibrio de la firma competitiva?

Respuesta:

No modifica el valor de "q" que maximiza el beneficio, pues la condición $P^0 = CMg$ seguirá siendo la misma. Lo que se altera es el beneficio. Será menor que antes de la subida del costo fijo (*ceteris paribus*).

Gráfico N° IV.1.1



2. Una función correspondiente a costos totales parte de la siguiente ordenada al origen:

$$y = 80$$

¿Cuál será el CFMe cuando se produzcan 1,000 unidades de q ?

Respuesta:

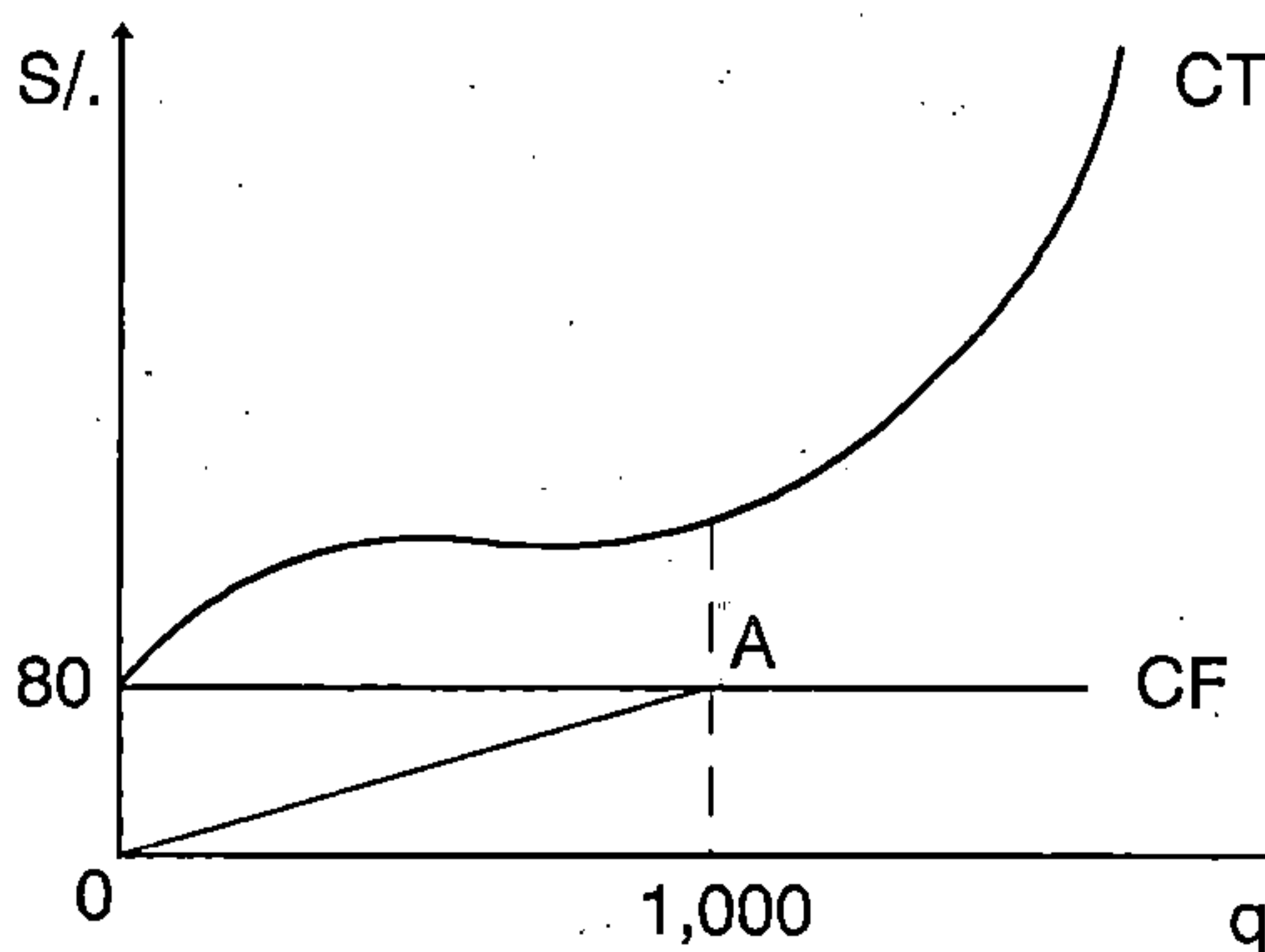
$$y = 80 = CF$$

$$CFMe = \frac{80}{q}$$

$$CFMe(1,000) = \frac{80}{1,000} = 0.08$$

El CFMe es igual a la pendiente del rayo OA

Gráfico N° IV.1.2



3. Una recta tangente a una curva de costo total de corto plazo que pasa por el origen, corta la curva de costo medio respectiva en el punto $q = 180$ y $CMe = 900$. Determine el valor del CMe mínimo.

Respuesta:

Ecuación de la recta que pasa por el origen:

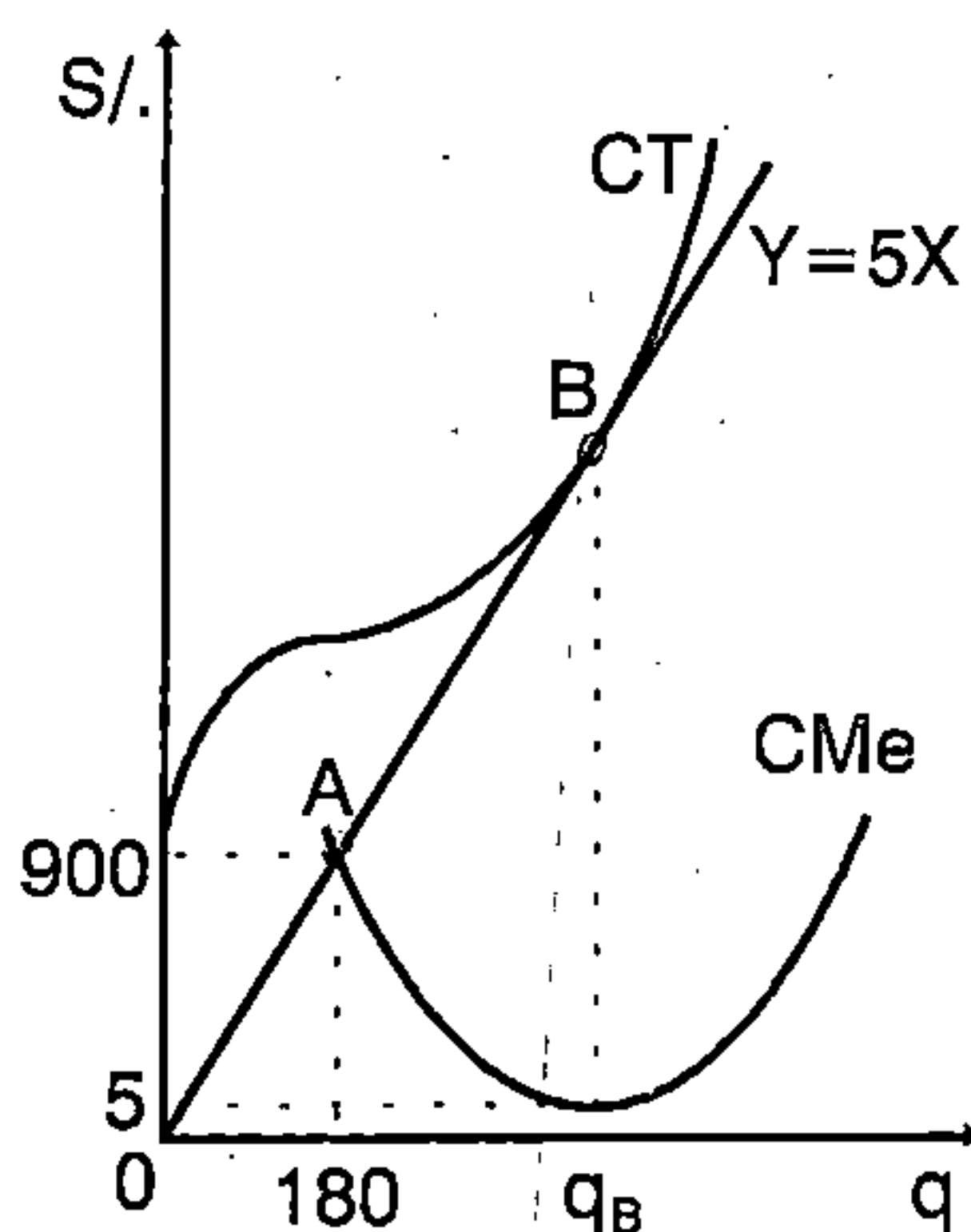
$$Y = mX \quad (S/. = mq)$$

Los puntos A y B están sobre la recta. En A, la pendiente de la recta:

$$m = \frac{900}{180} = 5 \quad \text{por lo tanto } Y = 5X$$

Pero el valor "m" de la recta tangente es el valor del CMe mínimo y del CMg en q_B . Es decir el CMe mínimo = $CMg = 5$.

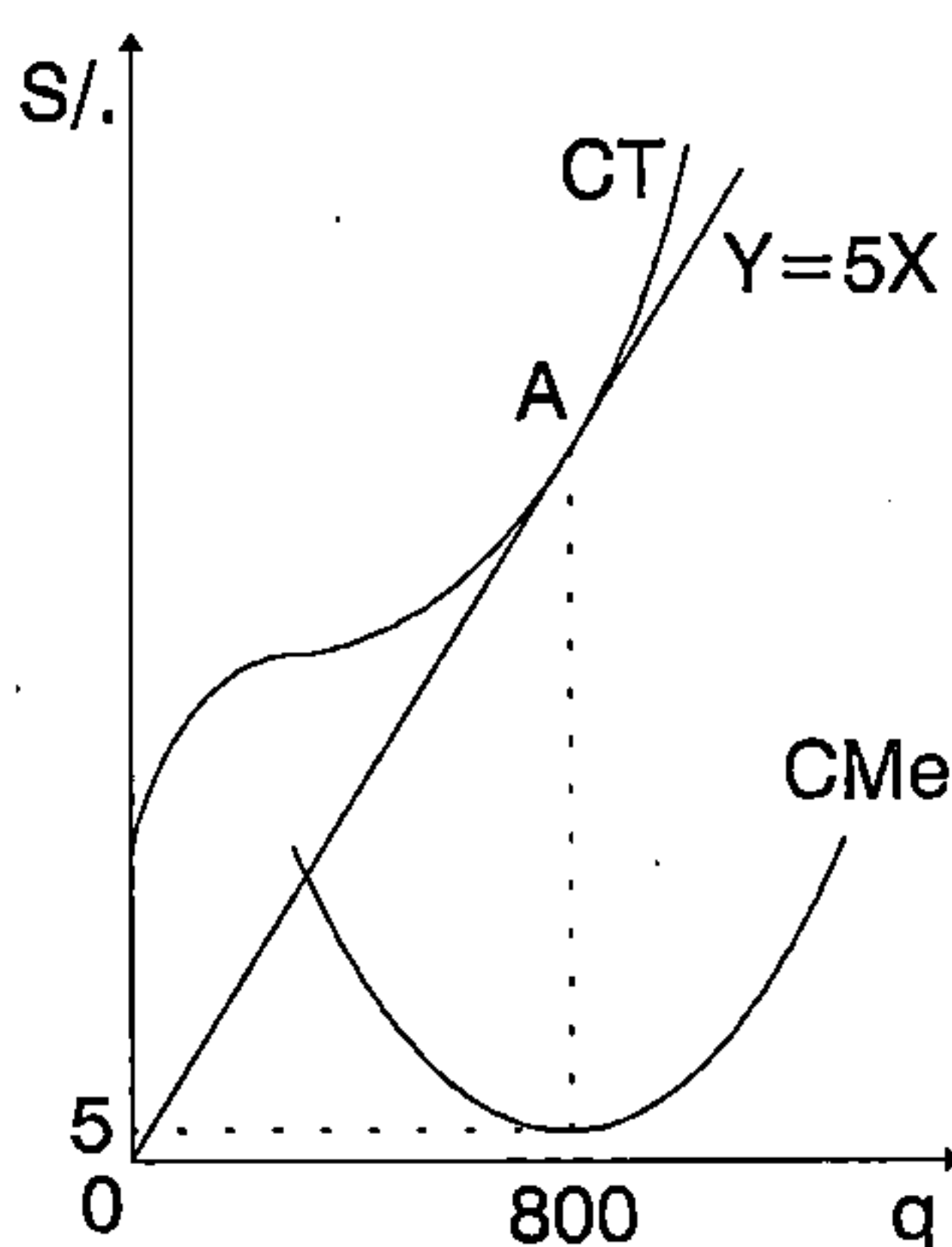
Gráfico N° IV.1.3



4. Una recta cuya ecuación es $Y = 5X$ es tangente a una curva de CT cuando $q = 800$. ¿Cuál es el valor del CT y del CMg en el punto donde el CMe es mínimo?

Respuesta:

Gráfico N° IV.1.4



De acuerdo a los datos del problema, el punto A del gráfico muestra la pendiente del rayo que parte del origen ($Y = 5X$) que es 5. En este punto $CMe = CMg$, el CMe mínimo = CMg.

Por lo tanto:

$$CMe (\text{mínimo}) = 5$$

$$CT = (CMe)(q)$$

$$CT = (5)(800)$$

$$CT = 4,000$$

$$CMg = 5$$

5. La función de costo total de corto plazo de una empresa es:

$$CT = 0.1q^3 - 2q^2 + 15q + 10$$

Se pide:

- Demstrar que el CMg intersecta la curva de CVMe cuando esta última alcanza su valor mínimo.
- Demuestre que el CMg alcanza un valor mínimo antes que el CVMe.

Respuesta:

- a) $CMg = CVMe$:

$$CVMe = \frac{CT}{q}$$

$$CV = 0.1q^3 - 2q^2 + 15q$$

$$CVMe = 0.1q^2 - 2q + 15$$

$$\frac{d[CVMe]}{dq} = 0.2q - 2 = 0$$

$$q = 10$$

$$\frac{d^2[CVMe]}{dq^2} = 0.2 > 0$$

Luego en $q = 10$, el CMg y CVMe deben ser iguales:

$$CMg = 0.3q^2 - 4q + 15$$

$$CVMe = 0.1q^2 - 2q + 15$$

$$CMg = CVMe$$

$$0.3q^2 - 4q + 15 = 0.1q^2 - 2q + 15$$

$$0.3[100] - 4[10] + 15 = 0.1[100] - 2[10] + 15$$

$$30 - 40 + 15 = 10 - 20 + 15$$

$$5 = 5$$

b) Mínimo del CMg:

$$CMg = \frac{dCT}{dq}$$

$$CMg = 0.3q^2 - 4q + 15$$

$$\frac{dCMg}{dq} = 0.6q - 4 = 0$$

$$q = \frac{4}{0.6} = \frac{20}{3}$$

$$\frac{d^2CMg}{dq^2} = 0.6 > 0$$

Reemplazando este valor en el CMg,

$$CMg = 0.3\left(\frac{20}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{20}{3}\right) + 15$$

$$CMg = 0.3\left(\frac{400}{9}\right) - \frac{80}{3} + \frac{45}{3}$$

$$CMg = \frac{85}{3} - \frac{80}{3}$$

$$CMg = \frac{5}{3}$$

Y en el CMe:

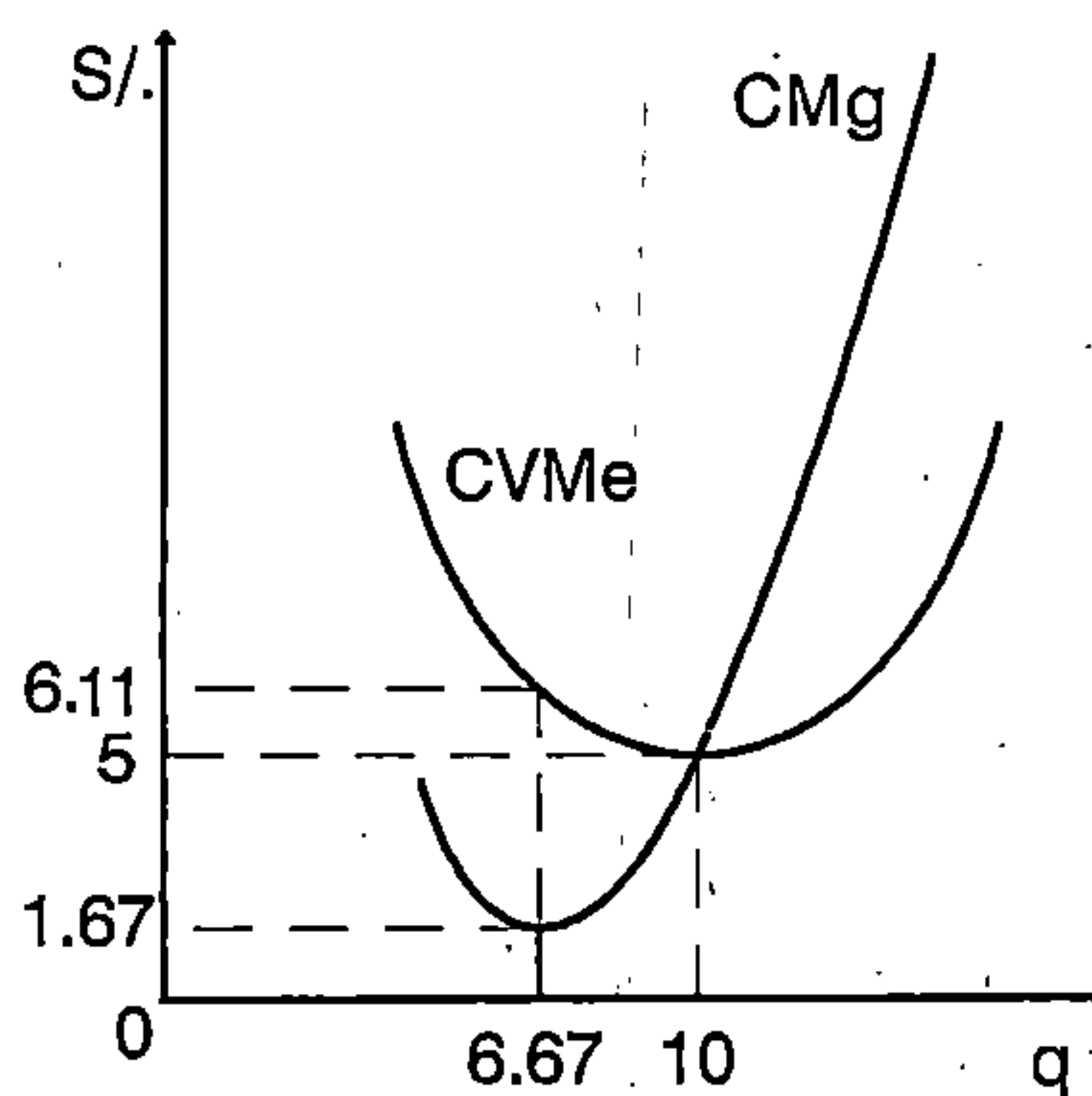
$$CVMe = 0.1 \left[\frac{20}{3} \right]^2 - 2 \left[\frac{20}{3} \right] + 15$$

$$CVMe = 0.1 \left[\frac{400}{9} \right] - 2 \left[\frac{20}{3} \right] + 15$$

$$CVMe = \frac{40}{9} - \frac{40}{3} + 15$$

$$CVMe = 6.11$$

Gráfico Nº IV.1.5



6. Dada la siguiente función de producción: $q = 10L^{1/5}K^{3/10}$

Y dado que los precios de los insumos son: $P_L^0 = 64$ y $P_K^0 = 3$

Determine la función de costos, el costo medio y el costo marginal de corto plazo.

Respuesta:

En equilibrio de la producción:

$$\frac{f_L}{f_K} = \frac{P_L^0}{P_K^0}$$

$$f_L = 2L^{-4/5}K^{3/10}$$

$$f_K = 3L^{1/5}K^{-7/10}$$

Reemplazando:

$$\frac{2L^{-4/5}K^{3/10}}{3L^{1/5}K^{-7/10}} = \frac{64}{3}$$

$$\frac{2K}{3L} = \frac{64}{3}$$

$$K = 32L \quad \text{Senda de expansión (recta)}$$

Reemplazando en la función de producción y despejando L :

$$q = 10L^{1/5}[32L]^{3/10}$$

$$q = 10L^{1/5+3/10}[32]^{3/10}$$

$$q = 10L^{1/2}[32]^{3/10}$$

$$L^{1/2} = \frac{q}{10[32]^{3/10}}$$

$$L = \frac{q^2}{100[32]^{3/5}}$$

$$L = \frac{q^2}{(100)(8)}$$

$$L = \frac{q^2}{800}$$

En la recta de isocoste:

$$CT = 64L + 3K + CF$$

$$CT = 64L + 3[32] + CF$$

$$CT = 64L + 96L + CF$$

$$CT = 160L + CF$$

$$CT = 160 \left[\frac{q^2}{800} \right] + CF$$

$$CT = \frac{q^2}{5} = CV$$

$$CT = CV + CF$$

$$CT = \frac{q^2}{5} + b^0$$

Y por lo tanto:

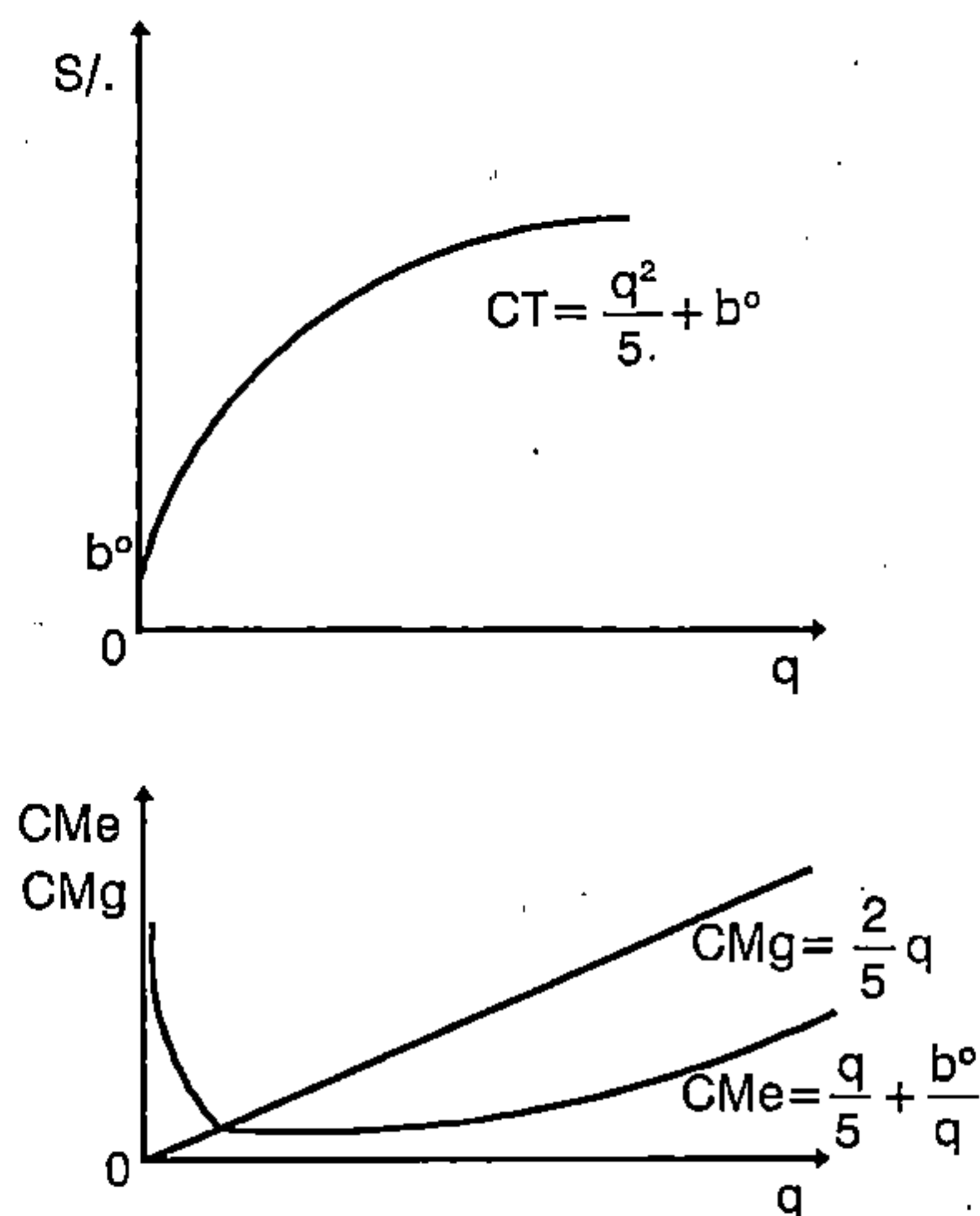
$$CMe = \frac{q}{5} + \frac{b^0}{q}$$

Alcanza un mínimo en función de b^0 y luego crece indefinidamente

$$CMg = \frac{2}{5}q$$

Creciente a una tasa constante (0.4)

Gráfico N° IV.1.6



IV.2 Función de oferta de corto plazo

1. Derivar la función de oferta de corto plazo de un empresario cuya función de costo de corto plazo es:

$$CT = 0.04q^3 - 0.8q^2 + 10q + 5$$

Respuesta:

En competencia perfecta:

$$P = CMg$$

donde:

$$CMg = \frac{dCT}{dq}$$

$$P = 0.12q^2 - 1.6q + 10$$

$$0.12q^2 - 1.6q + (10 - P) = 0$$

$$q = \frac{1.6 \pm \sqrt{(1.6)^2 - 4(0.12)(10 - P)}}{2(0.12)}$$

$$q = \frac{1.6 + \sqrt{2.56 - 0.48(10 - P)}}{0.24}$$

Se elimina el tramo descendente del CMg.

$$q = \frac{1.6 + \sqrt{0.48P - 2.24}}{0.24}$$

Pero P debe ser mayor o igual que el CVMe mínimo para que la firma produzca en el corto plazo

$$CV = 0.04q^3 - 0.8q^2 + 10q$$

$$CVMe = 0.04q^2 - 0.8q + 10$$

Para un mínimo del CVMe:

$$\frac{dCVMe}{dq} = 0.08q - 0.8 = 0$$

$$q = 10$$

Condición de segundo orden:

$$\frac{d^2CVMe}{dq^2} = 0.08 > 0$$

Reemplazando "q" mínimo en el CVMe:

$$CVMe = 0.04(10)^2 - 0.8(10) + 10$$

$$CVMe = 4 - 8 + 10$$

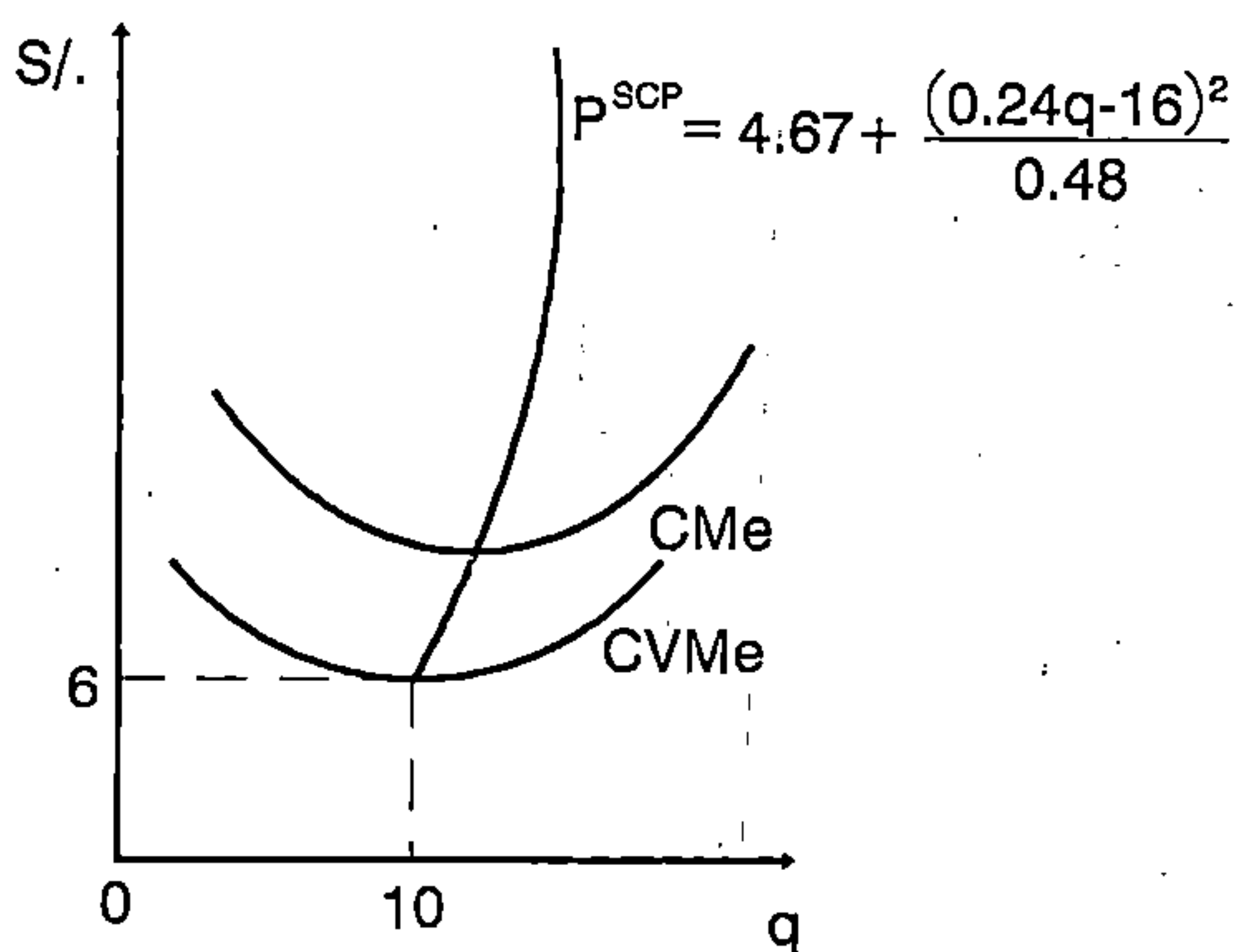
$$CVMe (\text{mínimo}) = 6$$

Función de oferta de corto plazo:

$$q = s = \frac{1.6 + \sqrt{0.48P - 2.24}}{0.24} \quad P \geq 6$$

$$q = s = 0 \quad P < 6$$

Gráfico N° IV.2.1



2. Una firma en competencia perfecta tiene la siguiente función de costos:

$$CT = 0.1q^3 - 2q^2 + 15q + 10$$

Determinar su curva de oferta:

Respuesta:

$$CT = 0.1q^3 - 2q^2 + 15q + 10$$

$$P = CMg$$

$$CMg \equiv \frac{dCT}{dq} = 0.3q^2 - 4q + 15 = P$$

$$0.3q^2 - 4q + (15 - P) = 0$$

$$q = s = \frac{4 + \sqrt{1.2P - 2}}{0.6}$$

El signo negativo en la ecuación se ha eliminado porque corresponde al tramo decreciente (con pendiente negativa) del CMg. Esta función es válida para todos los precios iguales o mayores al CVMe mínimo.

$$CV = 0.1q^3 - 2q^2 + 15q$$

$$CVMe = 0.1q^2 - 2q + 15$$

$$\frac{dCVMe}{dq} = 0.2q - 2 = 0$$

$$\frac{d^2CVMe}{dq^2} = 0.2 > 0$$

Sustituyendo $q = 10$ en CVMe:

$$CVMe = 0.1(100) - 2(10) + 15$$

$$CVMe = 10 - 20 + 15$$

$$CVMe = 5 \quad \text{mínimo}$$

Cuando $P < 5$, es mejor no producir. Entonces, la función de oferta de corto plazo de la firma es:

$$q = s = \frac{4 + \sqrt{1.2P - 2}}{0.6} \quad P \geq 5$$

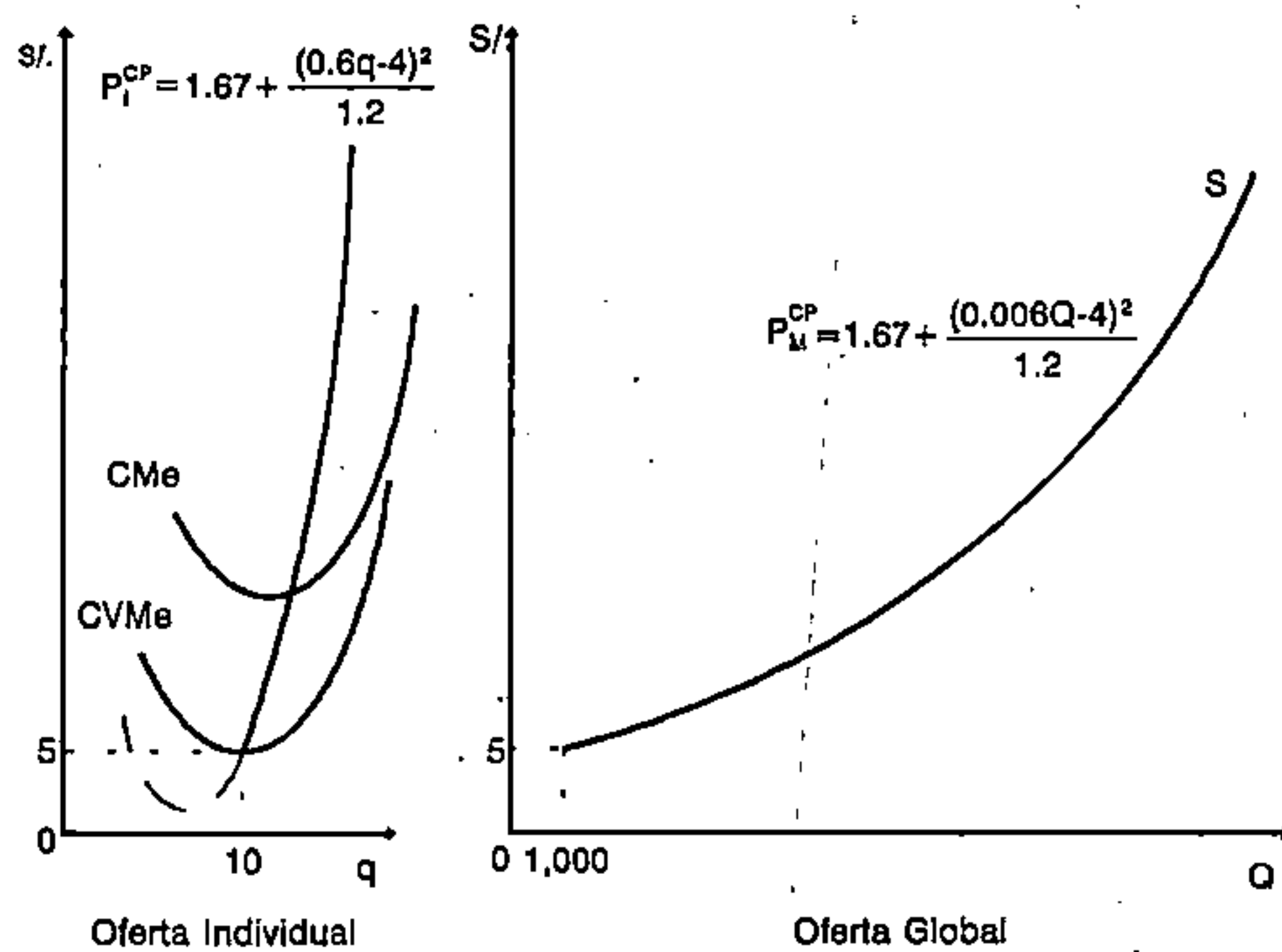
$$q = s = 0 \quad P < 5$$

Si hay 100 firmas idénticas, la oferta agregada será:

$$S = (100) \left(\frac{4 + \sqrt{1.2P - 2}}{0.6} \right) \quad P \geq 5$$

$$q = s = 0 \quad P < 5$$

Gráfico N° IV.2.2



IV.3 Costos en el largo plazo

1. Dada la función de producción de una empresa perfectamente competitiva:

$$q = 6L^{3/6}K^{2/6}$$

Y dado que los precios de los insumos son: $P_L^0 = 40$, $P_K^0 = 60$, determine la función de costos a largo plazo.

Respuesta:

En equilibrio, la condición de empleo óptimo de insumos:

$$\frac{f_L}{f_K} = \frac{P_L^0}{P_K^0}$$

$$f_L = 6\left(\frac{3}{6}\right)L^{-1/2}K^{1/3}$$

$$f_K = 6L^{1/2}K^{-2/3}$$

$$\frac{6\left(\frac{3}{6}\right)L^{-1/2}K^{1/3}}{6L^{1/2}K^{-2/3}} = \frac{40}{60}$$

$$\frac{3K}{2L} = \frac{2}{3}$$

$$K = \frac{4}{9}L \quad \text{Senda de expansión}$$

Por lo tanto:

$$q = 6L^{3/6}K^{2/6}$$

$$q = 6L^{3/6}\left(\frac{4}{9}\right)^{2/6}L^{2/6}$$

$$q = 6L^{3/6}\left(\frac{4}{9}\right)^{2/6}$$

$$L^{5/6} = \frac{q}{6\left(\frac{4}{9}\right)^{2/6}}$$

$$L = \frac{q^{6/5}}{(6)^{6/5}\left(\frac{4}{9}\right)^{2/5}}$$

L en función de q y K se reemplaza en la recta de isocoste.

$$CT = 40L + 60K$$

$$CT = 40\left[\frac{q^{6/5}}{(6)^{6/5}\left(\frac{4}{9}\right)^{2/5}}\right] + 60\left[\frac{4}{9}L\right]$$

$$CT = 40\left[\frac{q^{6/5}}{(6)^{6/5}\left(\frac{4}{9}\right)^{2/5}}\right] + 60\left[\frac{4}{9}\right]\left[\frac{q^{6/5}}{(6)^{6/5}\left(\frac{4}{9}\right)^{2/5}}\right]$$

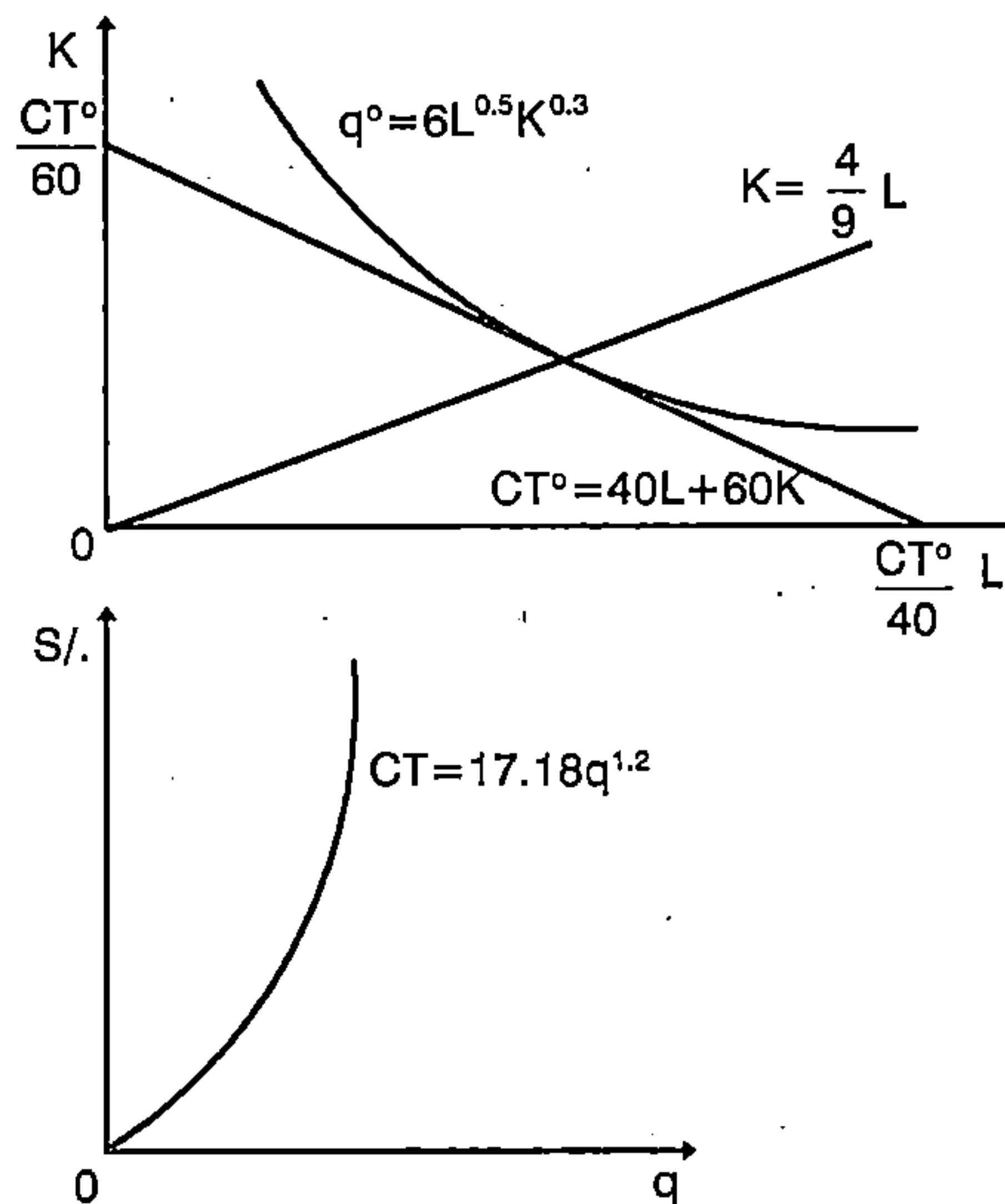
$$CT = \left[\frac{q^{6/5}}{(6)^{6/5} \left(\frac{4}{9}\right)^{2/5}} \right] \left[40 + \frac{(60)(4)}{(9)} \right]$$

$$CT = \left[\frac{q^{1.2}}{6.21} \right] \left[40 + \frac{200}{3} \right]$$

$$CT = 17.18q^{1.2}$$

El costo total de largo plazo en función de q .

Gráfico N° IV.3.1



2. Una firma competitiva opera con la siguiente función de producción:

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

Donde A , α y β son parámetros positivos. A partir de dicha función de producción se pide determinar la respectiva función de costo marginal, si la ecuación de costo total es:

$$CT = P_L^0 L + P_K^0 K$$

y la senda de expansión de la firma es:

$$\frac{P_K^0}{P_L^0} - \frac{\beta L}{\alpha K} = 0$$

Una vez determinada la función de costo marginal, se pide analizar bajo qué condiciones dicho costo será decreciente, constante o creciente.

Respuesta:

Se trata de un ejercicio sobre rendimiento de escala, los que varían según los valores de los parámetros α y β . Como primer paso se despeja el valor de L en la ecuación de expansión de la firma.

$$\frac{P_K^0}{P_L^0} - \frac{\beta L}{\alpha K} = 0$$

$$\frac{\beta L}{\alpha K} = \frac{P_K^0}{P_L^0}$$

$$L = \frac{P_K^0 K \alpha}{P_L^0 \beta}$$

Dicho valor se reemplaza en la ecuación de costo total.

$$CT = P_L^0 \left[\frac{P_K^0 K \alpha}{P_L^0 \beta} \right] + P_K^0 K$$

$$CT = \frac{P_K^0 K \alpha}{\beta} + P_K^0 K$$

$$CT = K \left[\frac{P_K^0 \alpha}{\beta} + P_K^0 \right]$$

Se despeja el valor de K:

$$K = \frac{CT}{\left[\frac{P_K^0 \alpha}{\beta} + P_K^0 \right]}$$

$$K = \frac{CT}{P_K^0 \left[\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right]}$$

$$K = \frac{\beta CT}{P_K^0 [\alpha + \beta]}$$

Los valores de L y de K se introducen en la función de producción.

$$Q = AL^\alpha K^\beta$$

$$Q = A \left[\frac{P_K^0 K \alpha}{P_L^0 \beta} \right]^\alpha \left[\frac{\beta CT}{P_K^0 (\alpha + \beta)} \right]^\beta$$

Adicionalmente:

$$Q = A \left[\left(\frac{P_K^0 \alpha}{P_L^0 \beta} \right) \left(\frac{\beta CT}{P_K^0 (\alpha + \beta)} \right) \right]^\alpha \left[\frac{\beta CT}{P_K^0 (\alpha + \beta)} \right]^\beta$$

Simplificando:

$$Q = A \left[\frac{\alpha CT}{P_L^0 (\alpha + \beta)} \right]^\alpha \left[\frac{\beta CT}{P_K^0 (\alpha + \beta)} \right]^\beta$$

Elevando los factores a las potencias α y β .

$$Q = A \left[\frac{\alpha^\alpha CT^\alpha}{P_L^{0\alpha} (\alpha + \beta)^\alpha} \right] \left[\frac{\beta^\beta CT^\beta}{P_K^{0\beta} (\alpha + \beta)^\beta} \right]$$

$$Q = CT^{\alpha+\beta} A \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{P_L^{0\alpha} P_K^{0\beta} (\alpha + \beta)^{\alpha+\beta}}$$

Despejando el CT:

$$CT^{\alpha+\beta} = \frac{P_L^{0\alpha} P_K^{0\beta} (\alpha + \beta)^{\alpha+\beta}}{A \alpha^\alpha \beta^\beta}$$

$$CT = \left[\left(\frac{P_L^0}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{P_K^0}{\beta} \right)^\beta (\alpha + \beta)^{\alpha+\beta} \left(\frac{1}{A} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$CT = BQ^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Se procede a determinar la función de costo marginal:

$$CMg = \frac{dCT}{dQ} = B \left(\frac{1}{\alpha+\beta} \right) Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1}$$

El comportamiento del costo marginal estará dado por el signo de su primera derivada.

$$\frac{dCMg}{dQ} = \frac{d^2CT}{dQ^2} = B \left(\frac{1}{\alpha+\beta} \right) \left(\frac{1}{\alpha+\beta} - 1 \right) Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}-2}$$

Lo que se puede escribir:

$$\frac{d^2CT}{dQ^2} = B \left[\frac{1}{(\alpha+\beta)^2} - \frac{1}{\alpha+\beta} \right] Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}-2}$$

Expresión que depende de los valores de α y β .

Si $\alpha + \beta < 1$, entonces la resta entre corchetes es positiva por lo que:

$$\frac{d^2CT}{dQ^2} > 0$$

Si $\alpha + \beta = 1$, entonces la resta es cero y:

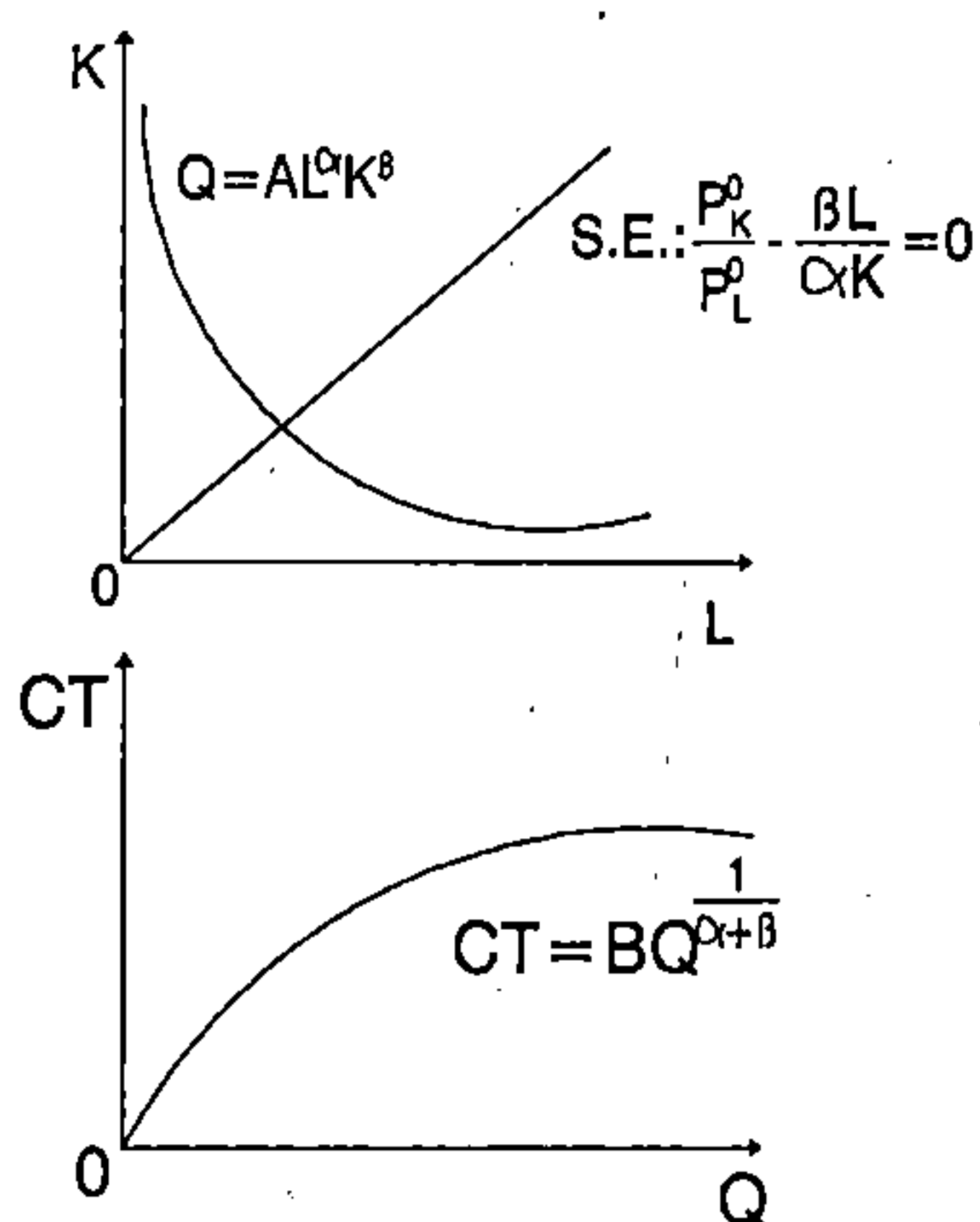
$$\frac{d^2CT}{dQ^2} = 0$$

Si $\alpha + \beta > 1$, entonces la resta es negativa y:

$$\frac{d^2CT}{dQ^2} < 0$$

Es decir, el costo marginal será creciente, constante o decreciente según el valor de la suma de los coeficientes α y β —que además indican el grado de homogeneidad de la función de producción.

Gráfico Nº IV.3.2



IV.4 Función de oferta de largo plazo

1. Una empresa que opera en competencia perfecta en el largo plazo enfrenta la siguiente función:

$$CT = q^3 - 10q^2 + 75q$$

Determine el precio mínimo que la empresa requerirá para entrar en el mercado y determine su función de oferta.

Respuesta:

El precio mínimo es aquel que le permite cubrir sus costos, sin arrojar ganancias ni pérdidas económicas.

$$P = CMe_{LP} = CMg_{LP}$$

Ingresa al mercado cuando P iguala al CMe mínimo de largo plazo.

$$CMg_{LP} = 3q^2 - 20q + 75$$

$$CMe_{LP} = q^2 - 10q + 75$$

$$CMg_{LP} = CMe_{LP}$$

$$3q^2 - 20q + 75 = q^2 - 10q + 75$$

$$2q^2 - 10q = 0$$

$$2q(q - 5) = 0$$

$$q_1 = 0$$

$$q_2 = 5$$

Donde se sabe que el CMe_{LP} debe tener un valor mínimo. Además, el CMg debe ser creciente.

$$\frac{dCMg}{dq} = 6q - 20$$

$$q_1 = 0 \quad \frac{dCMg}{dq} = -20 < 0$$

$$q_2 = 5 \quad \frac{dCMg}{dq} = 10 > 0$$

$q_2 = 5$ cumple con la condición de segundo orden.

Valor del CMg_{LP} en el punto de equilibrio:

$$CMg_{LP} = 3(5)^2 - 20(5) + 75$$

$$CMg_{LP} = 75 - 100 + 75$$

$$CMg_{LP} = 50$$

Valor del CMe_{LP} (mínimo) en el punto de equilibrio:

$$CMe_{LP} = (5)^2 - 10(5) + 75$$

$$CMe_{LP} = 25 - 50 + 75$$

$$CMe_{LP} = 50$$

Para determinar la función de oferta de la firma:

$$CMg_{LP} = P$$

$$3q^2 - 20q + 75 = P$$

$$3q^2 - 20q + (75 - P) = 0$$

$$q = \frac{20 + \sqrt{(20)^2 - 4(3)(75 - P)}}{6}$$

Se toma la raíz positiva porque sólo interesa la sección del CMg_{LP} que es creciente.

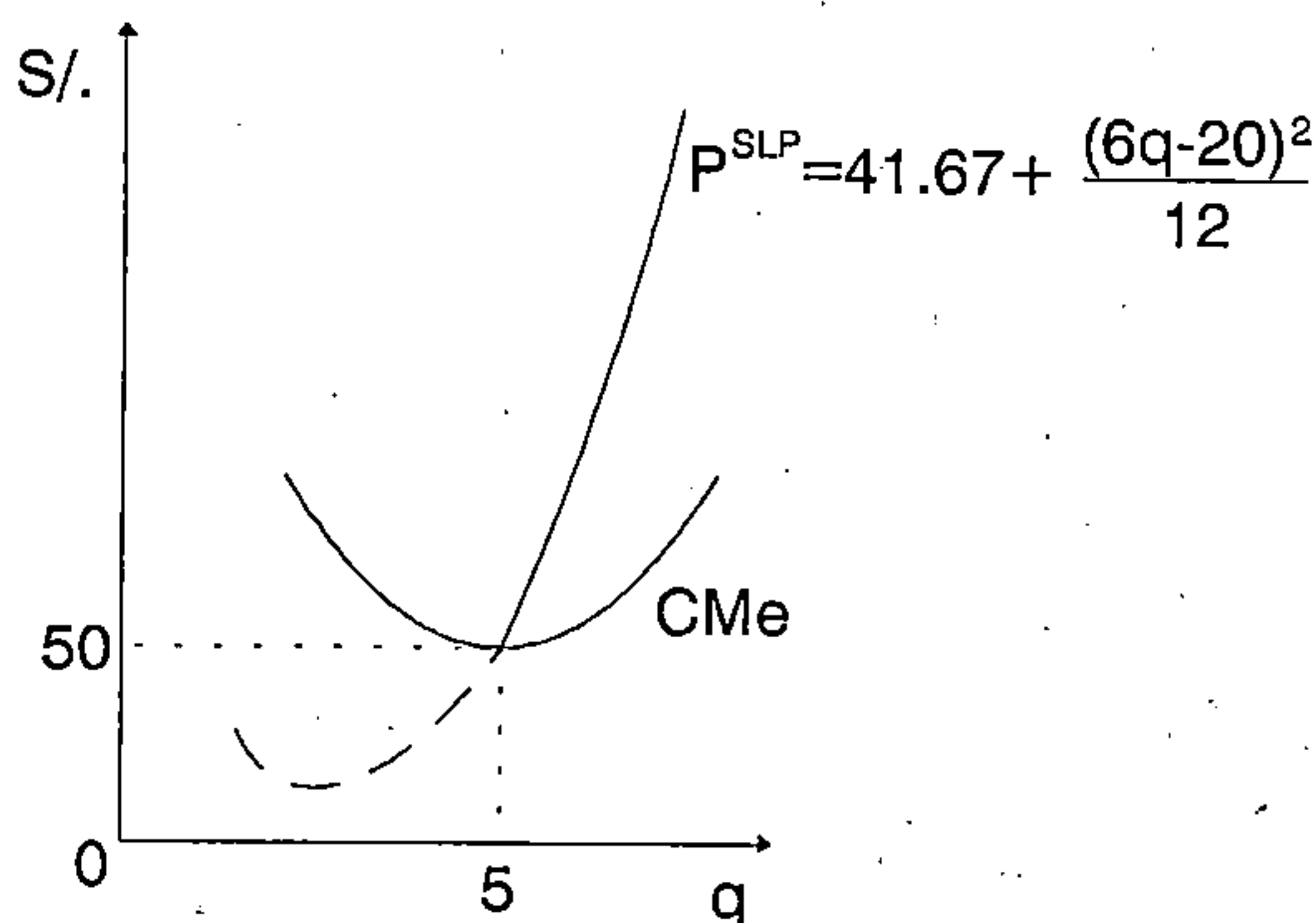
$$q = \frac{20 + \sqrt{12P - 500}}{6}$$

La función sólo es válida si el precio es por lo menos igual que 50. Por lo tanto, la función de oferta individual será:

$$q = s = \frac{20 + \sqrt{12P - 500}}{6} \quad P \geq 50$$

$$q = s = 0 \quad P < 50$$

Gráfico N° IV.4.1



2. Una empresa presenta la función de costos de largo plazo:

$$CT_{LP} = q^3 - 20q^2 + 150q$$

- ¿Cuál es el precio mínimo necesario para permanecer en el mercado y cuál es su función de S_{LP} ?
- Considere ahora que existen 100 empresas idénticas a la anterior, que fabrican el mismo producto. Hallar la curva de S_{LP} de la industria.

Respuesta:

- En el largo plazo el equilibrio se logra cuando: $P = CMe_{LP} = CMg_{LP}$ y la empresa permanece en el mercado si cubre CMe mínimos,

$$CT_{LP} = q^3 - 20q^2 + 150q$$

$$CMe_{LP} = q^2 - 20q + 150$$

Para encontrar la producción donde el CMe de largo plazo es mínimo,

$$\frac{d[CMe_{LP}]}{dq} = 2q - 20 = 0$$

$$q = 10$$

$$\frac{d^2[CMe]}{dq^2} = 2 > 0$$

Cuando $q = 10$, el valor total del CMe mínimo es:

$$CMe_{LP} = q^2 - 20q + 150$$

$$CMe_{LP} = (10)^2 - 20(10) + 150$$

$$CMe_{LP} = 50$$

que es el precio mínimo para permanecer en la industria ($P = 50$). La función S_{LP} coincide con la función CMg_{LP} para $q \geq 10$

$$CMe_{LP} = \frac{dCT}{dq} = 3q^2 - 40q + 150$$

$$P = CMg_{LP}$$

$$P = 3q^2 - 40q + 150$$

$$3q^2 - 40q + (150 - P) = 0$$

$$s_i = q_i^s = \frac{40 + \sqrt{12P - 200}}{6}$$

Entonces, la función de oferta de la firma "i" será:

$$s_i = q_i^s = \frac{40 + \sqrt{12P - 200}}{6} \quad P \geq 50$$

$$q_i^s = 0 \quad P < 50$$

- b) Cuando hay 100 firmas que tienen funciones de oferta idénticas, la función de oferta de mercado será la sumatoria horizontal de las cantidades producidas:
 $(s_i)(n) = S$ donde $n = 100$

$$S = Q^s = 100 \left[\frac{40 + \sqrt{12P - 200}}{6} \right]$$

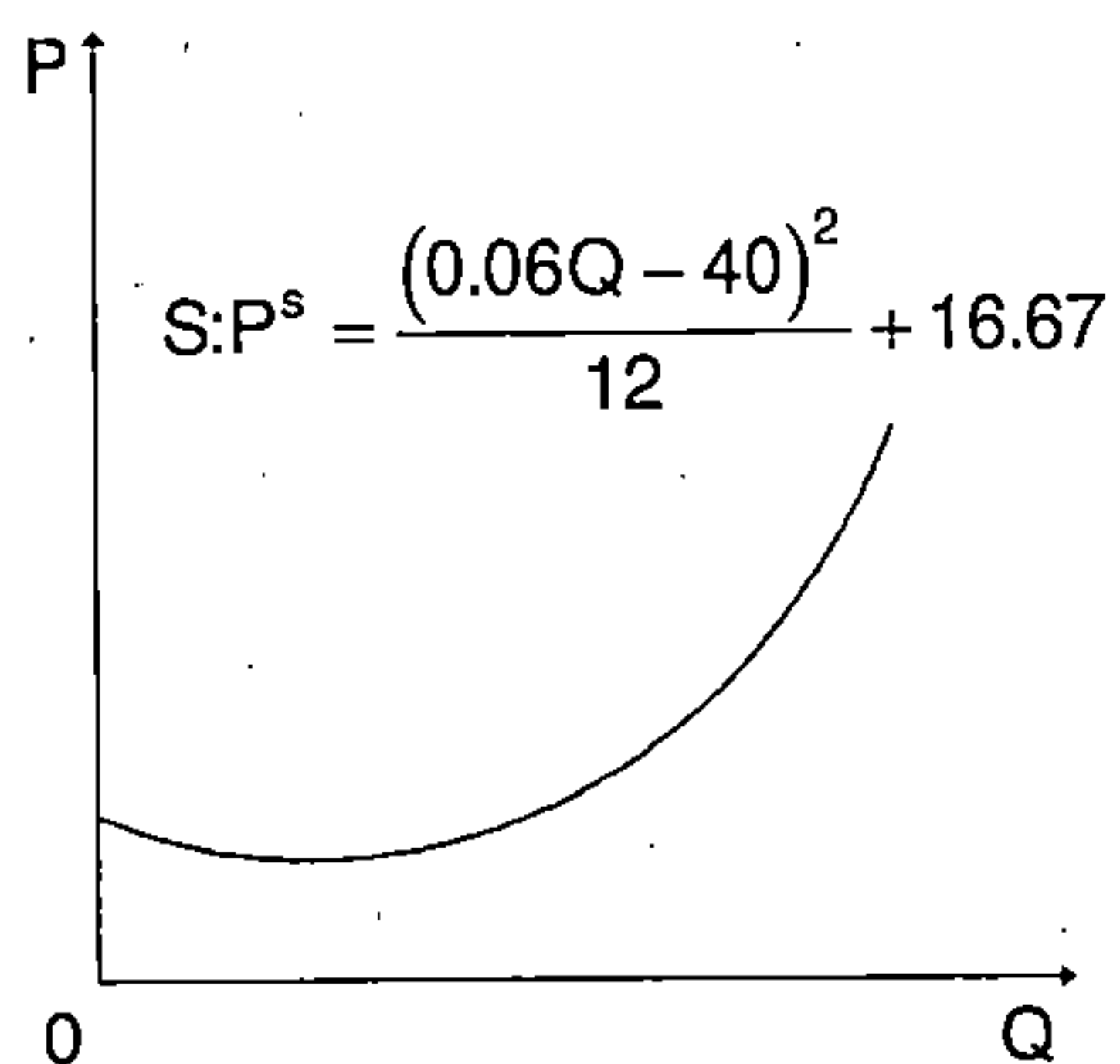
Por lo tanto:

$$S = Q^s = \frac{2,000}{3} + \frac{50}{3} \sqrt{12P - 200} \quad P \geq 50$$

ó

$$S = P^s = \frac{[0.06Q - 40]^2}{12} + 16.67 \quad P \geq 50$$

Gráfico N° IV.4.2



V

Teoría del equilibrio del mercado bajo competencia perfecta

V.1 Equilibrio de la firma y del mercado bajo competencia perfecta en el corto plazo

Responda verdadero o falso a la siguiente afirmación y explique.

“Una empresa en competencia perfecta que ve incrementar sus costos fijos (CF) en el corto plazo, modificará su nivel de producción para maximizar sus beneficios”.

Respuesta:

Falso. La empresa decide producir donde se encuentra la máxima diferencia entre el ingreso total (IT) y el costo total (CT). Los costos fijos (CF) sólo constituyen un parámetro de desplazamiento del CT. Es así que el incremento de éstos sólo afecta el beneficio total (ver gráfico N° V.1.1a).

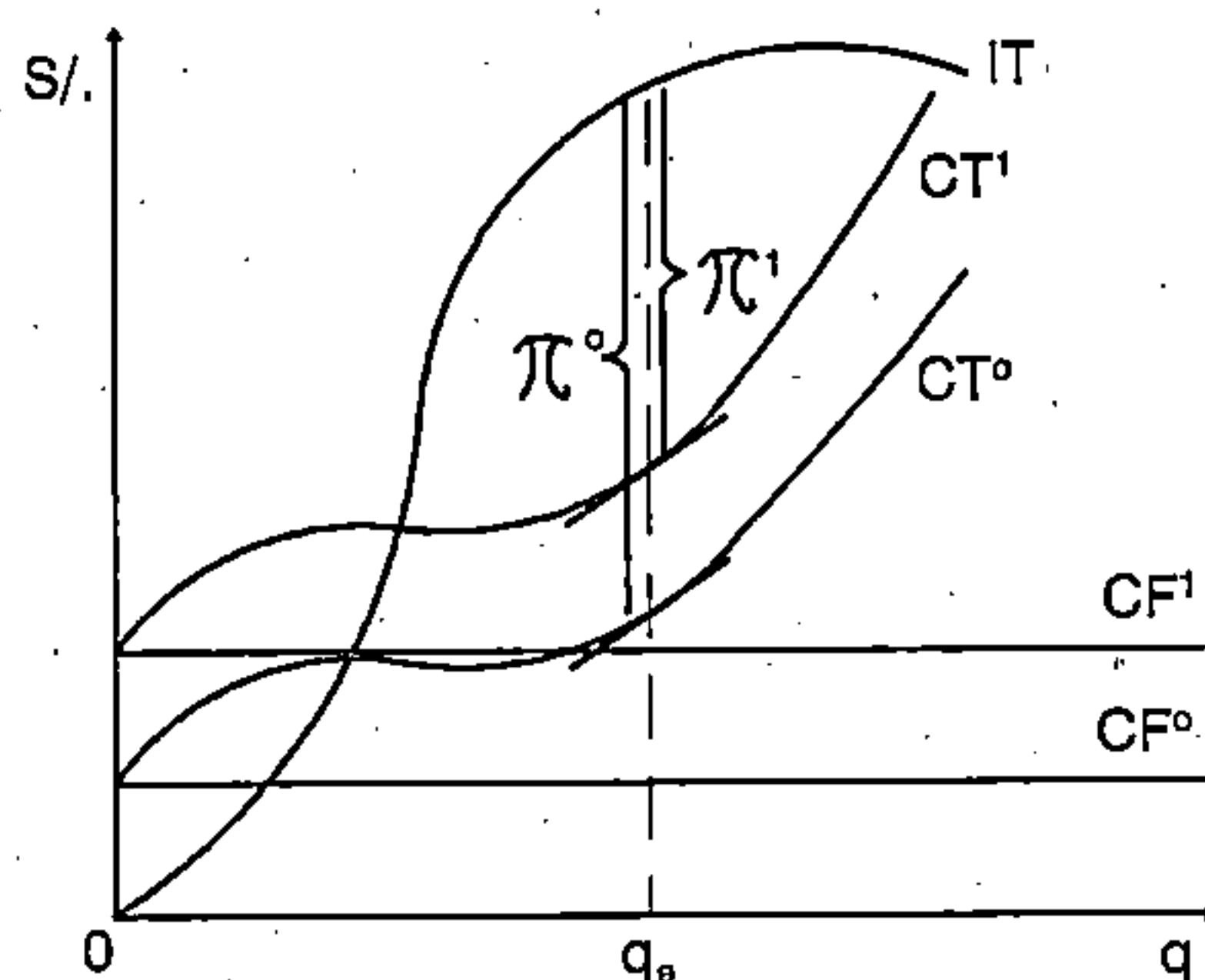
Una empresa en competencia perfecta produce donde el costo marginal es igual al precio vigente en el mercado. El incremento de los costos fijos medios hace que la curva de costo medio (CMe) se traslade hacia arriba afectando solamente al beneficio medio. En el gráfico N° V.1.1b se muestran tres casos de incrementos en el costo medio por aumentos en el costo fijo medio. En el primer caso (CMe_1) se observa que el incremento del CF eleva el CMe (desde CMe_0), pero aún así, el precio vigente se encuentra por encima del CMe. Se sigue produciendo q_0 .

En el segundo caso (CMe_2), el incremento en el CF eleva el CMe hasta la intersección del precio con el CMg. Se sigue produciendo q_0 , aunque los beneficios económicos extraordinarios han desaparecido.

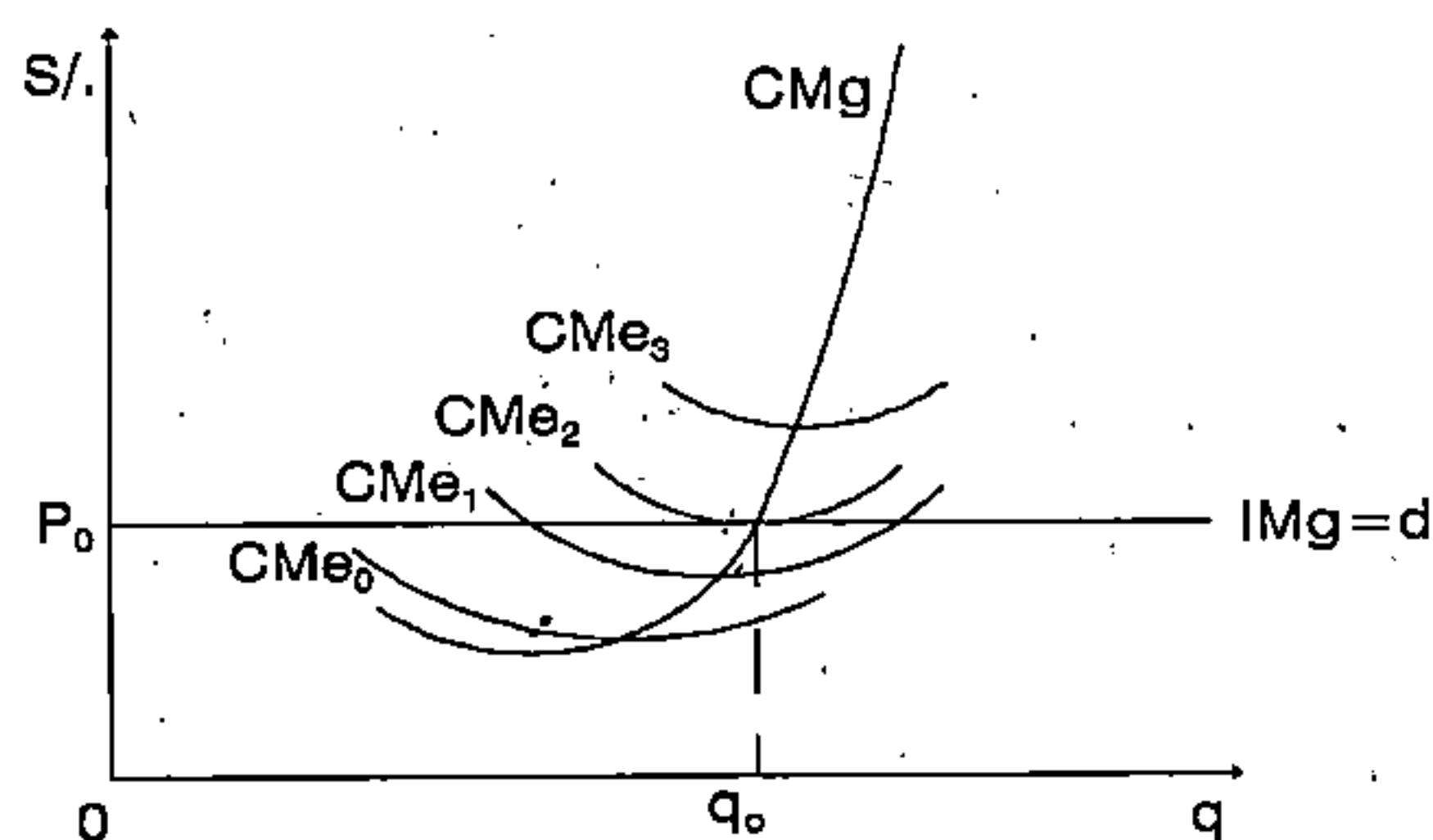
En el tercer caso (CMe_3) el incremento en el CMe supera el precio de mercado. Se sigue produciendo q_0 en el corto plazo, aunque ahora existan pérdidas económicas. Por lo tanto, los incrementos en el CF no alteran el punto de optimización (no varían el CMg), sólo reducen los beneficios.

Gráfico N° V.1.1

(a)



(b)



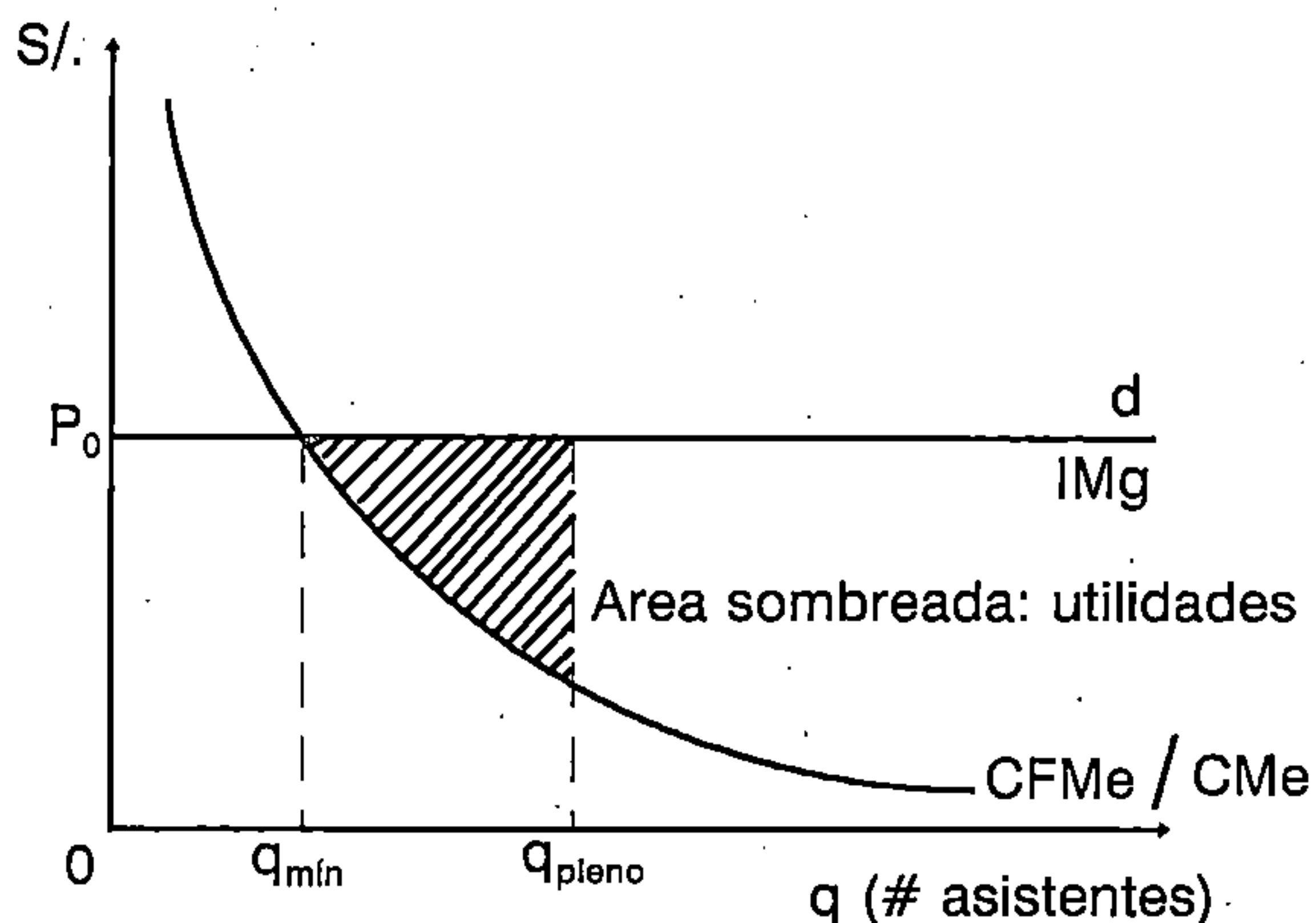
2. Se observa que los empresarios de los espectáculos tienden en lo posible a llenar la sala donde éstos se presentan. ¿Qué razón económica existe tras este objetivo?

Respuesta:

La empresa de espectáculos es una empresa de servicios, donde los costos fijos son los más importantes componentes del costo total. El número de asistentes a una función no altera (significativamente) el costo total. Los costos variables, como el boletaje, suman una pequeña proporción del costo total de llevar a cabo una función.

Entonces, el costo fijo se encuentra muy cerca del costo total. Se podría asumir que el costo marginal no es relevante dada la pequeñez relativa de los costos variables. Por lo tanto, la curva de costo fijo medio representa bien el costo medio. Por cada persona que asista, el CFMe se reduce y los beneficios aumentan. Cuando la sala se llena, el beneficio es máximo como se observa en el siguiente gráfico.

Gráfico N° V.1.2



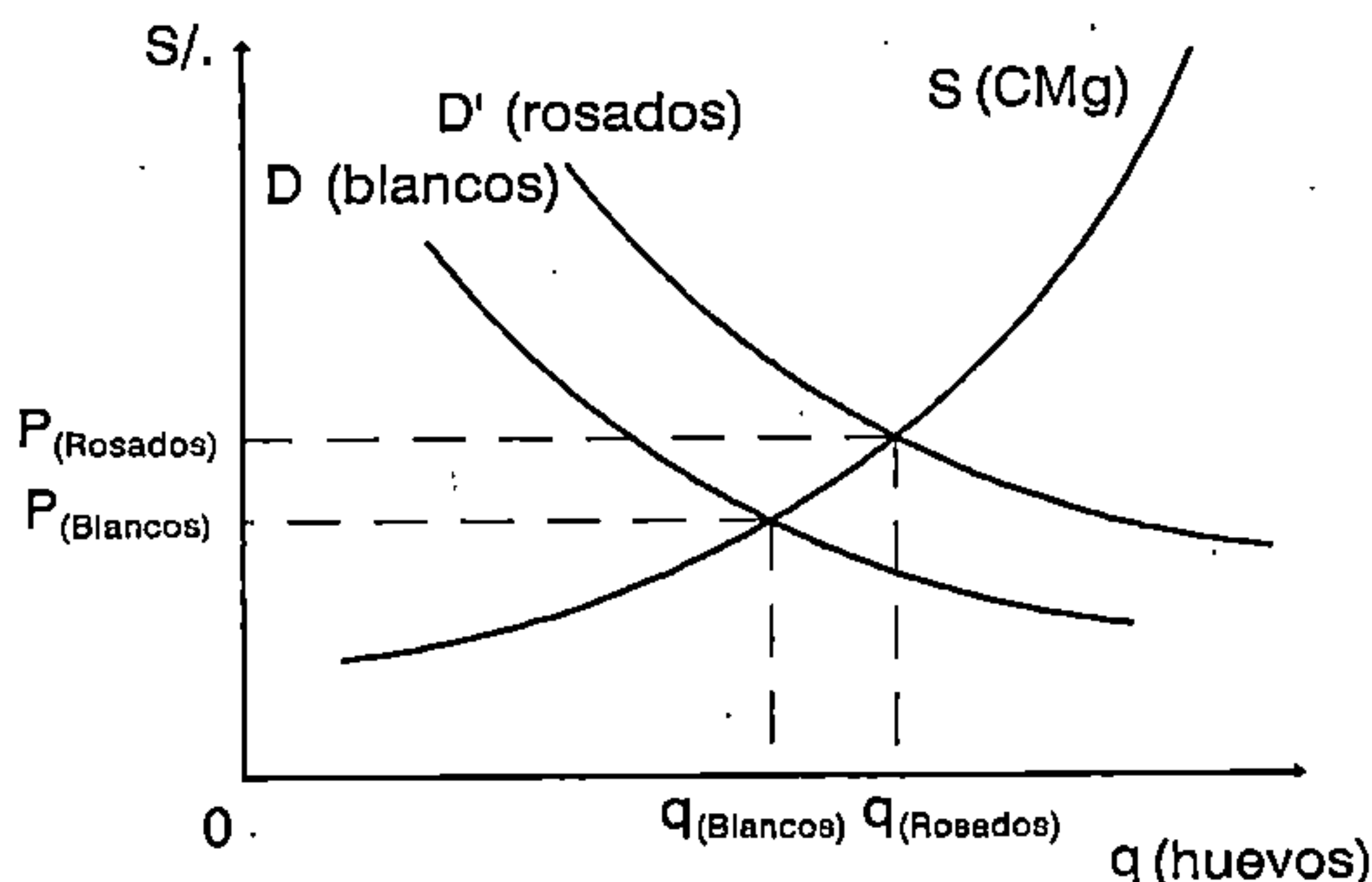
3. Analice la siguiente proposición:

“En el mercado competitivo de huevos de gallina, no rige la regla $P = CMg$, ya que los huevos blancos cuestan menos que los rosados, a pesar de que el costo de producción de ambos es el mismo y por consiguiente el CMg (la función de oferta del productor) debe ser igual en cada caso. ¿Cómo es que existen dos precios diferentes?”

Respuesta:

En realidad se trata de dos mercados diferentes, y por ello existen dos curvas de demanda distintas. La curva de demanda de huevos rosados se encuentra a la derecha de la curva de demanda de huevos blancos, reflejando la preferencia de los consumidores de huevos de gallina por éstos. En consecuencia, la intersección de las curvas de demanda y única curva de oferta (CMg) genera los dos precios distintos. Ver gráfico N° V.1.3.

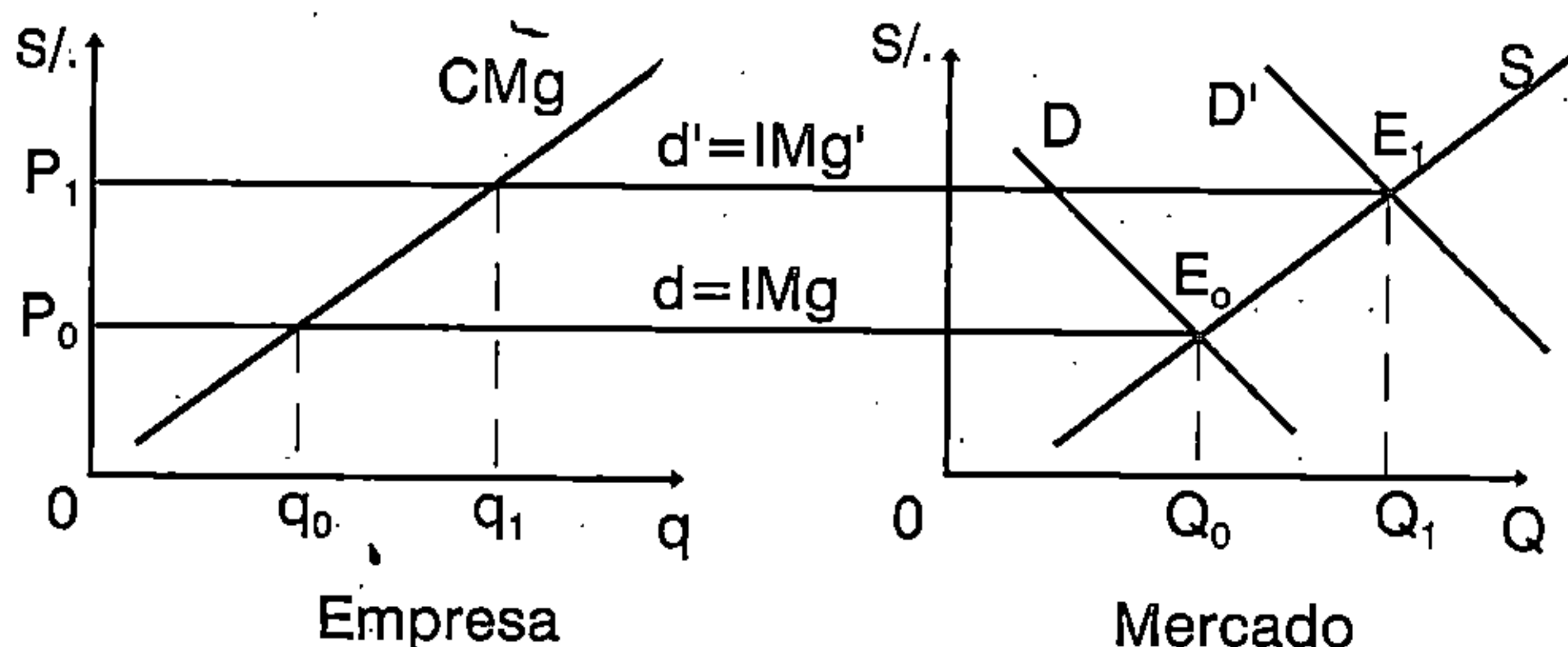
Gráfico N° V.1.3



4. Explique gráfica y analíticamente cómo en el corto plazo, un incremento en la demanda aumenta el precio y este aumento incrementa la cantidad ofertada por un empresario competitivo.

**Respuesta:**

Una elevación de la demanda de D a D' eleva el precio de mercado a P_1 . Ello eleva la recta del IMg del empresario a IMg' . El productor ofrece al mercado una cantidad mayor q_1 (se incrementa la cantidad ofertada y no la oferta). La suma de los incrementos de las cantidades de los empresarios individuales, totaliza el incremento de la cantidad ofertada en el mercado (ver gráfico N° V.1.4).

Gráfico N° V.1.4

5. Cierta industria consta de 100 empresas con funciones de costo idénticas:

$$C_i = 0.1q_i^2 + q_i + 10$$

Determinar el precio y la cantidad de equilibrio en el mercado si la función de demanda es:

$$D: Q = 4,000 - 400P$$

Respuesta:

Como en competencia perfecta $P = CMg$

$$CMg = 0.2q_i + 1$$

$$0.2q_i + 1 = P$$

Condición de equilibrio

$$q_i + 5 = 5P$$

$$s_i = q_i = 5P - 5$$

Función de oferta individual

La función de oferta anterior es válida para precios igual o mayores que:

$$CV = 0.1q_i^2 + q_i$$

$$CVMe = 0.1q_i + 1$$

$$CVMe \text{ mínimo} = 0.1(0) + 1 = 1$$

$$CVMe \text{ mínimo} = 1$$

El precio no debe ser inferior a 1. Entonces, la función de oferta individual será:

$$s_i = 5P - 5 \quad P \geq 1$$

$$s_i = 0 \quad P < 1$$

Y la función de oferta total:

$$S = 500P - 500 \quad P \geq 1$$

$$S = 0 \quad P < 1$$

Precio y cantidades de equilibrio en el mercado:

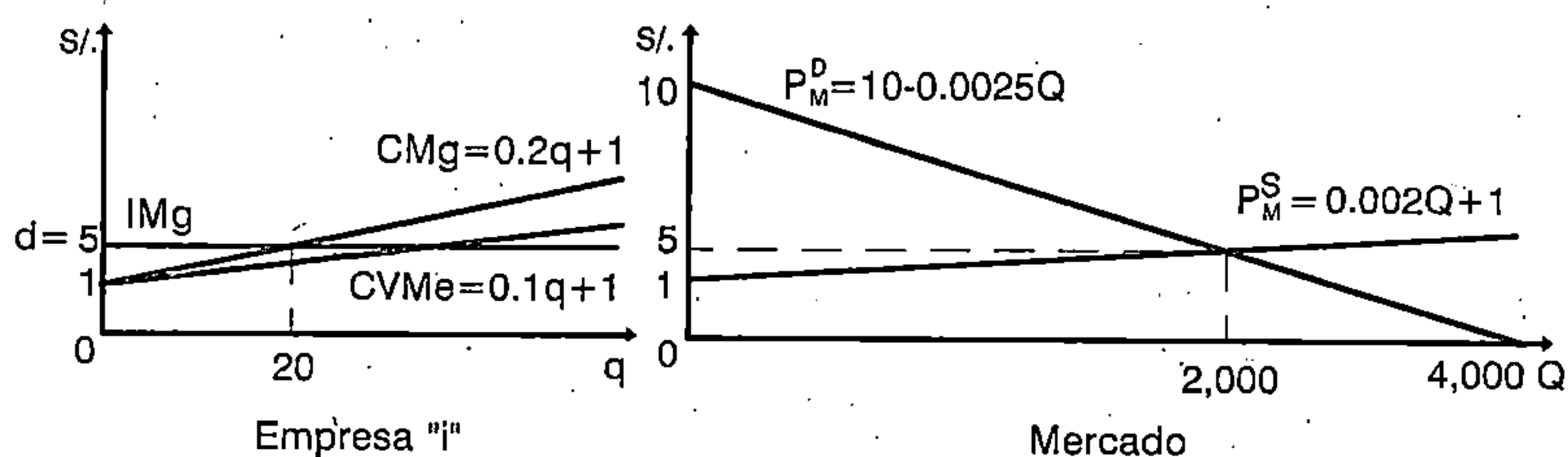
$$S = D$$

$$500P - 500 = 4,000 - 400P$$

$$P = 5$$

$$D = S = 2,000$$

Gráfico N° V.1.5



6. Si a los productores del ejercicio anterior se les coloca un impuesto de "x" soles por cada unidad de "q" producido, ¿cómo se altera el equilibrio?

Respuesta:

$$C_i = [0.1q_i^2 + q_i + 10] + xq_i$$

El impuesto modifica el costo variable

$$C_i = 0.1q_i^2 + (1 + X)q_i + 10$$

$$CMg = 0.2q_i + (1 + x) = P \quad \text{condición de equilibrio}$$

$$q_i + 5 + 5x = 5P$$

$$q_i = 5P - 5x - 5$$

$$s_i = 5(P - x) - 5$$

El precio debe cubrir por lo menos los costos variables medios

$$CV = 0.1q_i^2 + (1 + x)q_i$$

$$CVMe = 0.1q_i + (1 + x)$$

CVMe mínimo cuando $q_i = 0$

$$0.1(0) + 1 + x = 1 + x = \text{CVMe mínimo} = P \text{ mínimo}$$

Luego,

Oferta de la firma individual:

$$s_i = 5(P - x) - 5 \quad P \geq 1 + x$$

$$s_i = 0 \quad P < 1 + x$$

Oferta de todas las firmas:

$$S = 500(P - x) - 500 \quad P \geq 1 + x$$

$$S = 0 \quad P < 1 + x$$

Igualando $S = D$ y despejando P :

$$500(P - x) - 500 = 4,000 - 400P$$

$$500P - 500x - 500 = 4,000 - 400P$$

$$900P = 4,500 + 500x$$

$$9P = 45 + 5x$$

$$P = 5 + \frac{5}{9}x$$

Si el impuesto es de 0.9 soles/unidad, la combinación (Q, P) de equilibrio es:

$$P = 5 + \frac{5}{9}(0.9)$$

$$P = 5 + 0.5$$

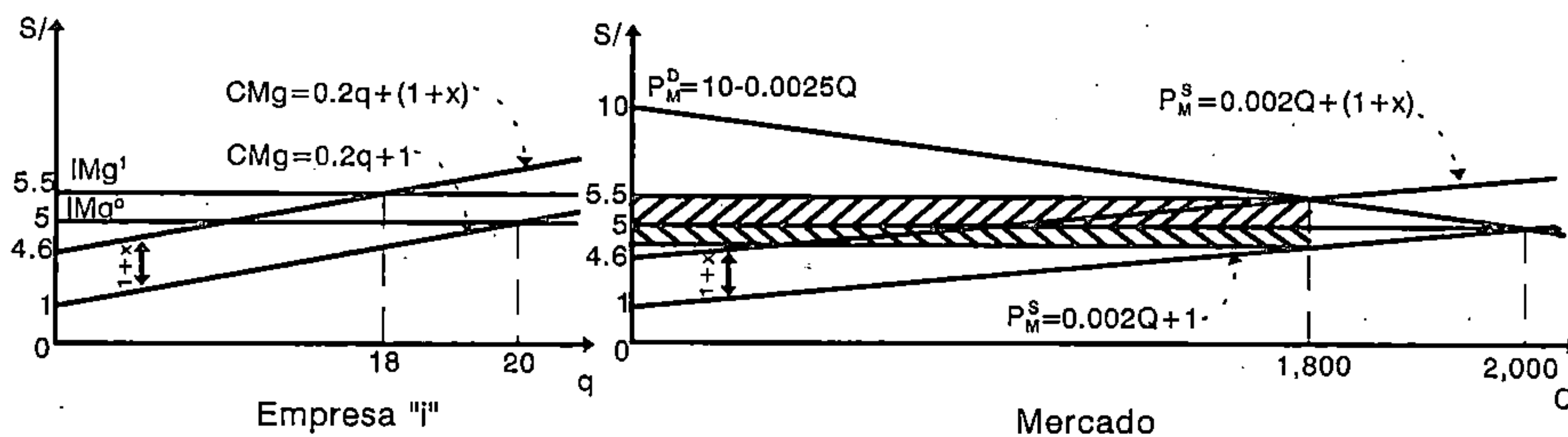
$$P = 5.5$$

$$Q = 4,000 - 400(5.5)$$

$$Q = 1,800$$

A consecuencia de este impuesto, se incrementa el precio y se reduce la cantidad vendida. Pero el incremento en el precio es menor que el impuesto unitario. De éste, S/.0.5 se trasladarán al consumidor. El empresario por su lado contribuirá con S/.0.4 ya que en realidad del total de S/.5.5 sólo retiene S/.4.60. (Ver gráfico N° V.1.6).

Gráfico N° V.1.6



 Parte del impuesto que pagan los consumidores

 Parte del impuesto que pagan los productores

V.2 Equilibrio de la firma y del mercado bajo competencia perfecta en el largo plazo

1. Analizar el siguiente párrafo:

“Los empresarios que son hombres prácticos, y que no han estudiado microeconomía, no saben que en competencia deben igualar el precio de mercado o IMg con el costo marginal ($P = CMg$). Lo que suelen hacer es añadir un porcentaje a sus CMc (*mark-up*) que les alcanza el contador”.

Respuesta:

Se puede demostrar que el empresario “práctico” no es contradictorio con la regla de conducta de la empresa que maximiza sus beneficios.

$$IT = Pq$$

$$\frac{dIT}{dq} \equiv IMg = P + q \frac{dP}{dq}$$

$$IMG = P \left[1 + \left(\frac{q}{P} \right) \left(\frac{dP}{dq} \right) \right]$$

pero:
$$\varepsilon_{11} = - \left(\frac{dq}{dP} \right) \left(\frac{P}{q} \right)$$

así:
$$IMg = P \left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_{11}|} \right]$$

El equilibrio competitivo en el largo plazo:

$$P = CMg_{LP} = IMg_{LP} = CMe_{LP}$$

tomando:
$$CMe_{LP} = IMg_{LP}$$

$$CMe_{LP} = P \left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_{11}|} \right]$$

$$CMe_{LP} = P \left[\frac{|\varepsilon_{11}| - 1}{|\varepsilon_{11}|} \right]$$

$$P = CMe_{LP} \left[\frac{|\varepsilon_{11}|}{|\varepsilon_{11}| - 1} \right]$$

El precio es igual al CMe_{LP} veces un factor

El resultado anterior quiere decir que el empresario “práctico”, al añadirle un porcentaje determinado al CMe, lo que hace es estimar la elasticidad-precio de la demanda de su producto –de acuerdo a su conocimiento del mercado– y aplicarlo al CMe para “instintivamente” buscar la maximización de su beneficio. Pero este

raciocinio supone que la ε_{11} es normalmente un valor alto (elástico) o que el producto es de relativamente fácil sustitución.

2. La función de costo a largo plazo de cada una de las empresas que producen el bien "Q" es:

$$CT_{LP} = q^3 - 4q^2 + 8q$$

- a) Derive Ud. la función de oferta a largo plazo de la firma "i".
b) Si la función de demanda es:

$$D: Q = 2,000 - 100P$$

determinar el precio de equilibrio, la cantidad total y el número de empresas.

Respuesta:

- a) **Oferta de largo plazo:** Corresponde al CMg a partir del CMe mínimo de largo plazo.

$$CT_{LP} = q^3 - 4q^2 + 8q$$

$$P = CMg_{LP} = CMe \text{ mín}_{LP}$$

$$CMg_{LP} = 3q^2 - 8q + 8 = P$$

$$3q^2 - 8q + (8 - P) = 0$$

$$s_i = q_i^s = \frac{8 + \sqrt{64 - 4(3)(8 - P)}}{6}$$

$$s_i = q_i^s = \frac{8 + \sqrt{12P - 32}}{6}$$

Pero esto es válido para $P \geq CMe \text{ mínimo LP}$

$$CMe_{LP} = q^2 - 4q + 8$$

$$\frac{d[CMe_{LP}]}{dq} = 2q - 4 = 0$$



Producción donde el CMe_{LP} es mínimo $q = 2$

$$CMe_{LP} = (2)^2 - 4(2) + 8 = 4$$

$$\frac{d^2 CMe}{dq^2} = 2 > 0$$

Por lo tanto, el precio debe exceder o ser igual a 4 para que la firma "típica" permanezca en la industria. Entonces:

$$s_i = q_i^s = \frac{8 + \sqrt{12P - 32}}{6} \quad P \geq 4$$

$$s_i = q_i^s = 0 \quad P < 4$$

b) El precio de equilibrio en el largo plazo no puede ser otro que 4, o sea, el CMe mínimo de largo plazo.

A ese precio ($P = 4$), cada firma ofrece:

$$s_i = q_i^s = \frac{8 + \sqrt{12P - 32}}{6} = \frac{8 + \sqrt{16}}{6} = 2$$

Pero si el precio de equilibrio de largo plazo es 4, entonces la cantidad demandada y ofertada es:

$$D: Q^d = 2,000 - 100P$$

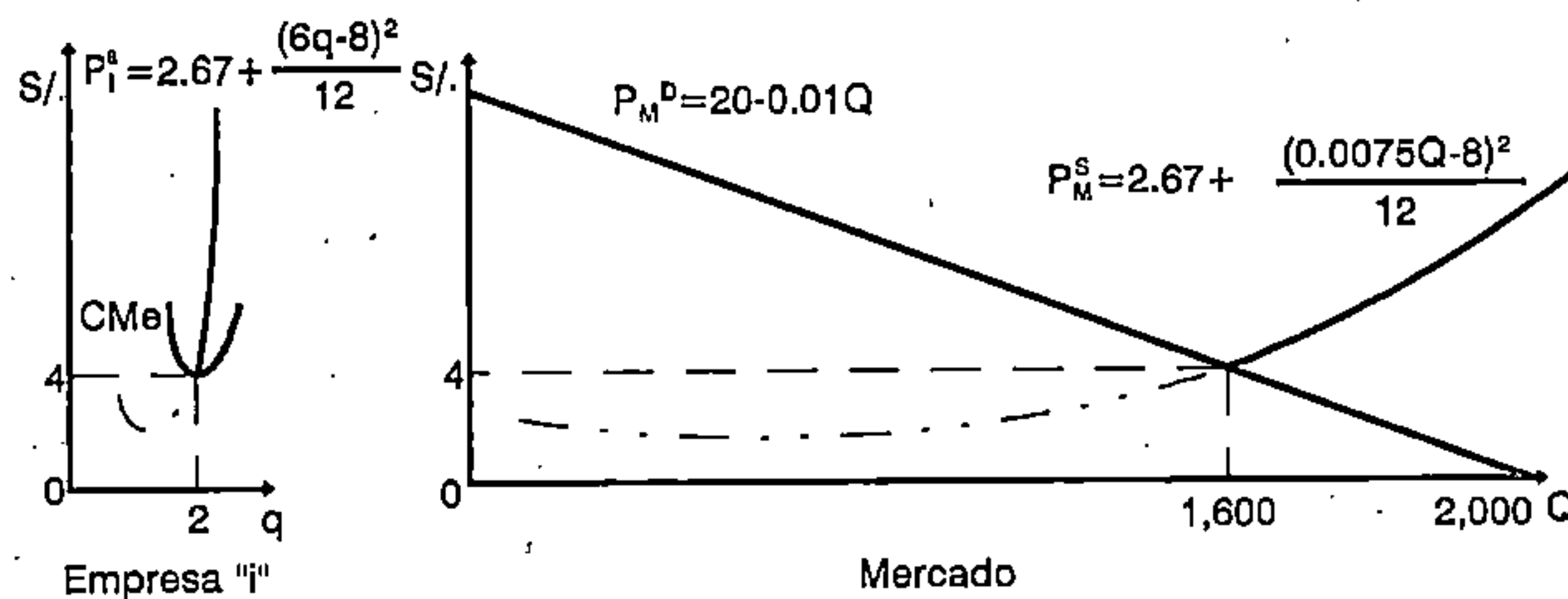
$$D:Q^d = 2,000 - 100(4)$$

$$D:Q^d = 2,000 - 400$$

$$D:Q^d = 1,600$$

El número de firmas será entonces: $1,600/2 = 800$ firmas, produciendo cada una $q_i = 2$. Ver gráfico N° V.2.1.

Gráfico N° V.2.1



3. La oferta de largo plazo de una firma está dada por la ecuación:

$$s_i = \frac{20 + \sqrt{12P - 500}}{6} \quad P \geq 50$$

Si existen 60 empresas similares a la del problema anterior, derive la cantidad de bienes que cada una vende en el mercado, si se sabe que la curva de demanda agregada es:

$$Q^d = 2,000 - 10P$$

¿Cuál será el precio y cuáles las cantidades de equilibrio? ¿Se encontrará la industria en una situación de equilibrio de largo plazo?

Respuesta:

La oferta de una firma:

$$s_i = \frac{20 + \sqrt{12P - 500}}{6} \quad P \geq 50$$

Se determina la demanda proporcional para cada una de las 60 firmas, dado que existe competencia perfecta y cada firma abastece la misma fracción del mercado:

$$q_i^d = \frac{100}{3} - \frac{1}{6}P \quad \text{ó} \quad P_i = 200 - 6q$$

Porque la Q^d es la suma horizontal de las q_i^d individuales

Luego:

$$q_i^d = q_i^s \quad (5)$$

$$\frac{20 + \sqrt{12P - 500}}{6} = \frac{100}{3} - \frac{1}{6}P$$

$$20 + \sqrt{12P - 500} = 200 - P$$

$$\sqrt{12P - 500} = 180 - P$$

$$12P - 500 = (180)^2 - 2(180)((P) + (P)^2$$

$$12P - 500 = 32,400 - 360P + P^2$$

$$P^2 - 372P + 32,900 = 0$$

$$P = \frac{372 + \sqrt{(372)^2 - 4(1)(32,900)}}{2}$$

$$P = \frac{372 \pm \sqrt{6,784}}{2}$$

$$P_1 = 227.1825$$

$$P_2 = 144.817$$

El precio P_1 no es de equilibrio pues:

$$Q^d = 2,000 - 10(227.1825) < 0$$

La cantidad demandada y ofertada al precio $P_2 = 144.817$

$$Q^d = 2,000 - 10(144.817) = 551.83$$

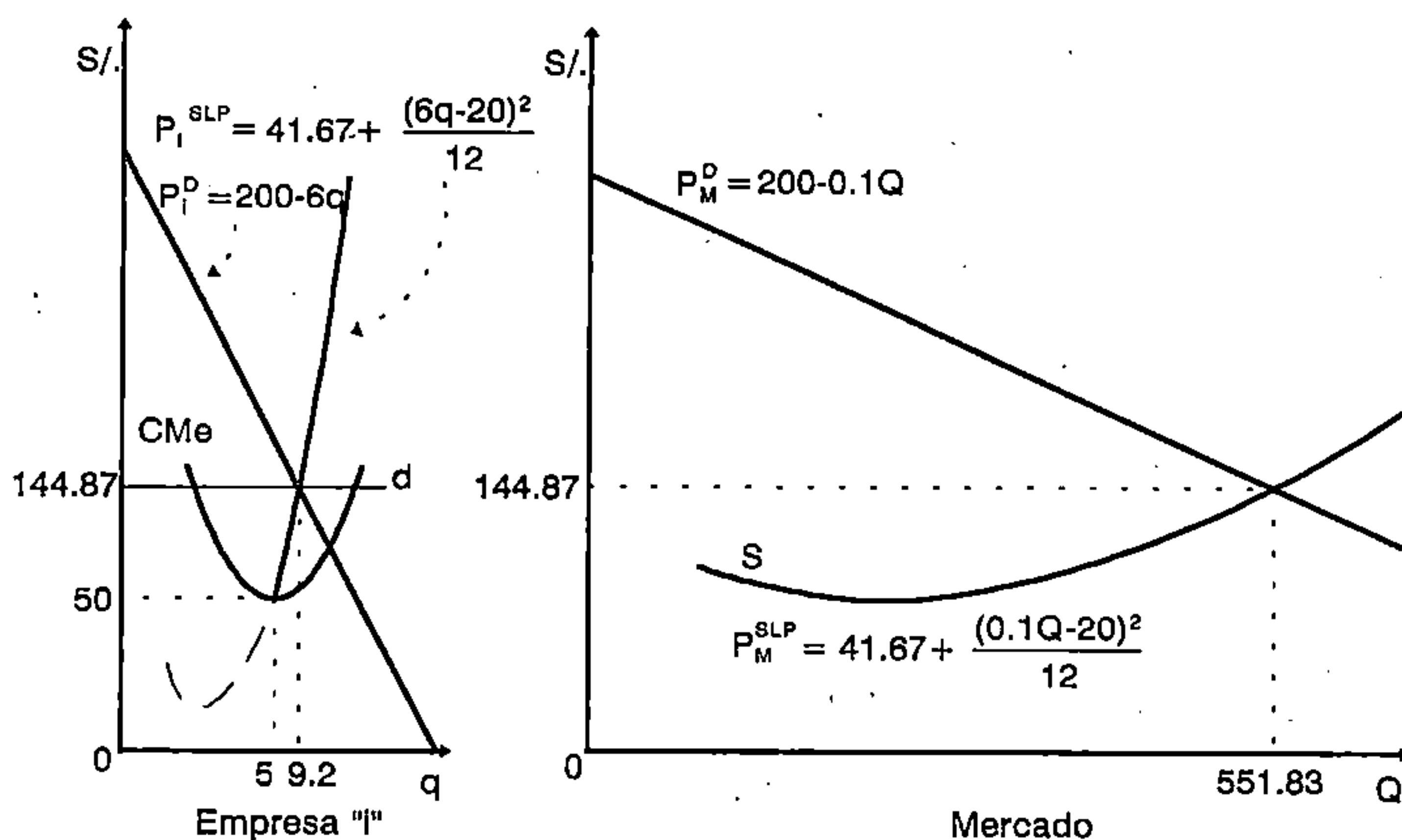
Entonces, las ventas de cada firma serán:

$$q_1 = \frac{Q^e}{n} = \frac{551.83}{60}$$

$$q_1 = 9.2 \text{ unidades}$$

El número de empresas supuesto ($n = 60$) no corresponde al número necesario para definir un equilibrio de largo plazo, pues el precio resulta ser mayor que el CVMe mínimo (50). Por lo tanto, cada una realizará beneficios económicos, lo que atraerá nuevas firmas hasta que el número existente elimine los beneficios económicos.

Gráfico N° V.2.2



El problema también puede ser resuelto considerando las funciones de oferta y demanda del mercado. En tal caso, la oferta de las 60 firmas:

$$(60)(q_i) = Q = 60 \left[\frac{20 + \sqrt{12P - 500}}{6} \right]$$

$$Q = 200 + 10\sqrt{12P - 500}$$

Lo que se puede expresar:

$$P^S = 41.67 + \frac{(0.1Q - 20)^2}{12}$$

Entonces, igualando $P^S = P^D$

$$41.67 + \frac{(0.1Q - 20)^2}{12} = 200 - 0.1Q$$

$$12[158.33 - 0.1Q] = [0.1Q - 20]^2$$

$$0.01Q^2 - 2.8Q - 1,499.96 = 0$$

$$Q = \frac{2.8 \pm \sqrt{67.834}}{0.02}$$

$$Q = 551.82$$

que es la raíz positiva

4. La función de costos a largo plazo de cada una de las empresas de una industria es:

$$C_{LP} = q^3 - 6q^2 + 12q$$

Nuevas empresas entrarán o abandonarán la industria según los beneficios puros sean positivos o negativos. Determine el precio, la cantidad global transada y el número de firmas en la situación de equilibrio de largo plazo. Asuma que la función de demanda del mercado es:

$$Q^d = 306 - 2P$$

Respuesta:

$$P = CMg_{LP} \quad \text{Condición de equilibrio de largo plazo}$$

$$CMg_{LP} = 3q^2 - 12q + 12 = P$$

$$3q^2 - 12q + [12 - P] = 0$$

$$q_i = \frac{12 + \sqrt{(12)^2 - 4(3)(12-P)}}{6}$$

$$q_i = 2 + \frac{\sqrt{12P}}{6}, \text{ función de oferta individual}$$

Pero esta función vale sólo si $P \geq CMe_{LP}$ mínimo.

$$CMe_{LP} = q^2 - 6q + 12$$

$$\frac{dCMe_{LP}}{dq} = 2q - 6 = 0$$

$$q = 3$$

$$\frac{d^2CMe_{LP}}{dq^2} = 2 > 0$$

Entonces:

$$CMe \text{ (mínimo)} = (3)^2 - 6(3) + 12$$

$$CMe \text{ (mínimo)} = 3$$

Por lo tanto, la función de oferta individual será:

$$q_i = s_i = 2 + \frac{\sqrt{12P}}{6} \quad P \geq 3$$

$$q_i = s_i = 0 \quad P < 3$$

Asumiendo equilibrio en el mercado, el precio debe ser igual al CMe mínimo una vez que el número de firmas se ha estabilizado al desaparecer los beneficios puros.

Entonces:

$$Q^d = 306 - 2(3)$$

$$Q^d = 300$$

Pero como cada firma en equilibrio ofertará $q_i=3$, entonces el número de firmas será de:

$$n = \frac{Q}{q_i} = \frac{300}{3} = 100 \text{ firmas}$$

Luego se puede verificar que al precio de equilibrio $P^e = 3$, la demanda y la oferta totales se igualan.

$$Q^d = Q^s \quad \text{donde } Q^s = (n)(q_i)$$

$$306 - 2P = 100 \left[2 + \frac{\sqrt{12P}}{6} \right]$$

$$306 - 2P = 200 + \frac{100}{3} \sqrt{3P}$$

$$106 - 2P = \frac{100}{3} \sqrt{3P}$$

De donde se obtiene:

$$\sqrt{3P} = 3.18 - 0.06P$$

$$0.0036P^2 - 0.3816P + 10.1124 = 0$$

cuya raíz $P = 3$ corresponde a la solución buscada. La cantidad total transada en el mercado será:

$$Q^d = Q^s = Q^e = 306 - 2(3)$$

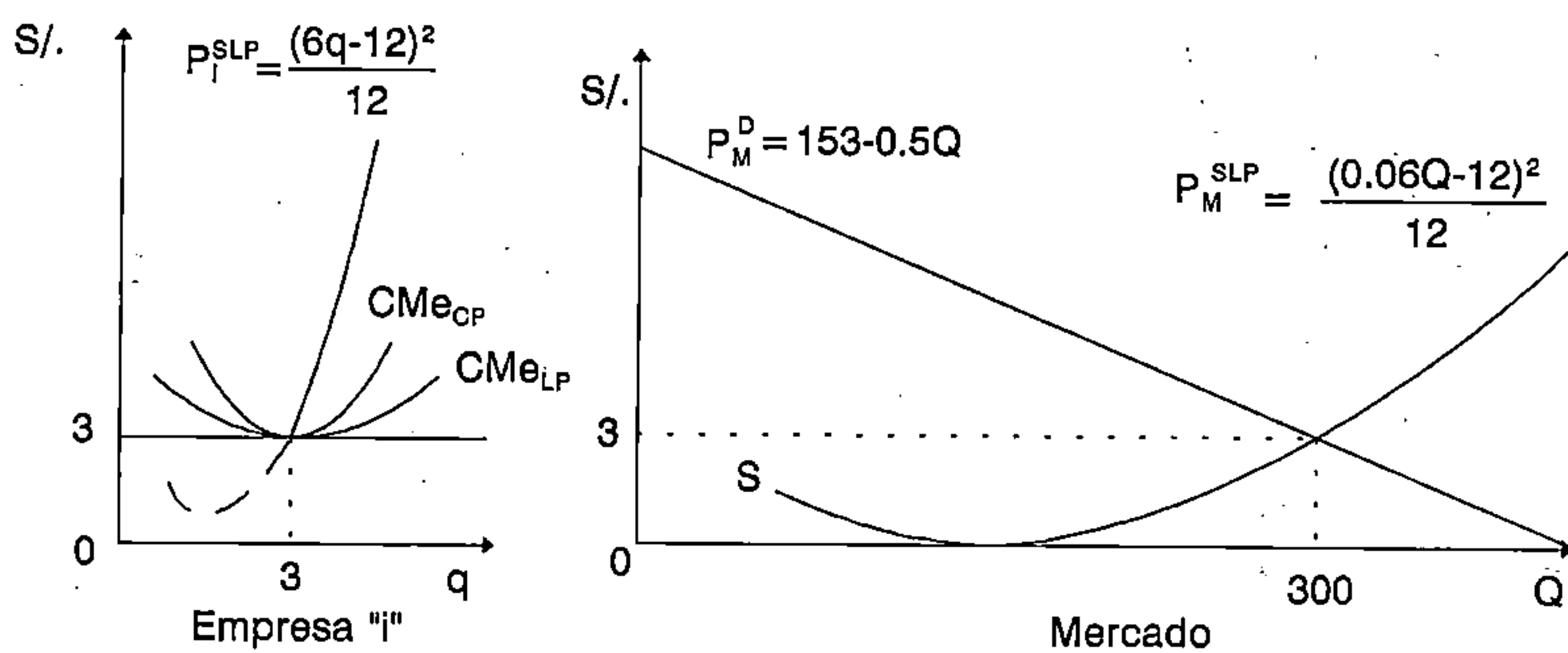
$$Q^e = 300$$

$$Q^d = Q^s = Q^e = 306 - 2(3)$$

$$Q^e = 300$$

El equilibrio del mercado se aprecia en el siguiente gráfico.

Gráfico Nº V.2.3



V.3 Estabilidad estática en el mercado competitivo

1. Determine la existencia de soluciones de equilibrio para los mercados siguientes según el precio sea la variable independiente (Walras) o dependiente (Marshall).

a) $D: Q^d = 12 - 3P$

$$S: Q^s = -10 + 2P$$

b) $D: Q^d = 9 - 0.5P$

$$S: Q^s = 14 + 1P$$

Respuesta:

- a) El precio es la variable independiente (Walras): $Q = f(P)$

$$Q^s = Q^d$$

$$12 - 3P = -10 + 2P$$

$$22 = 5P$$

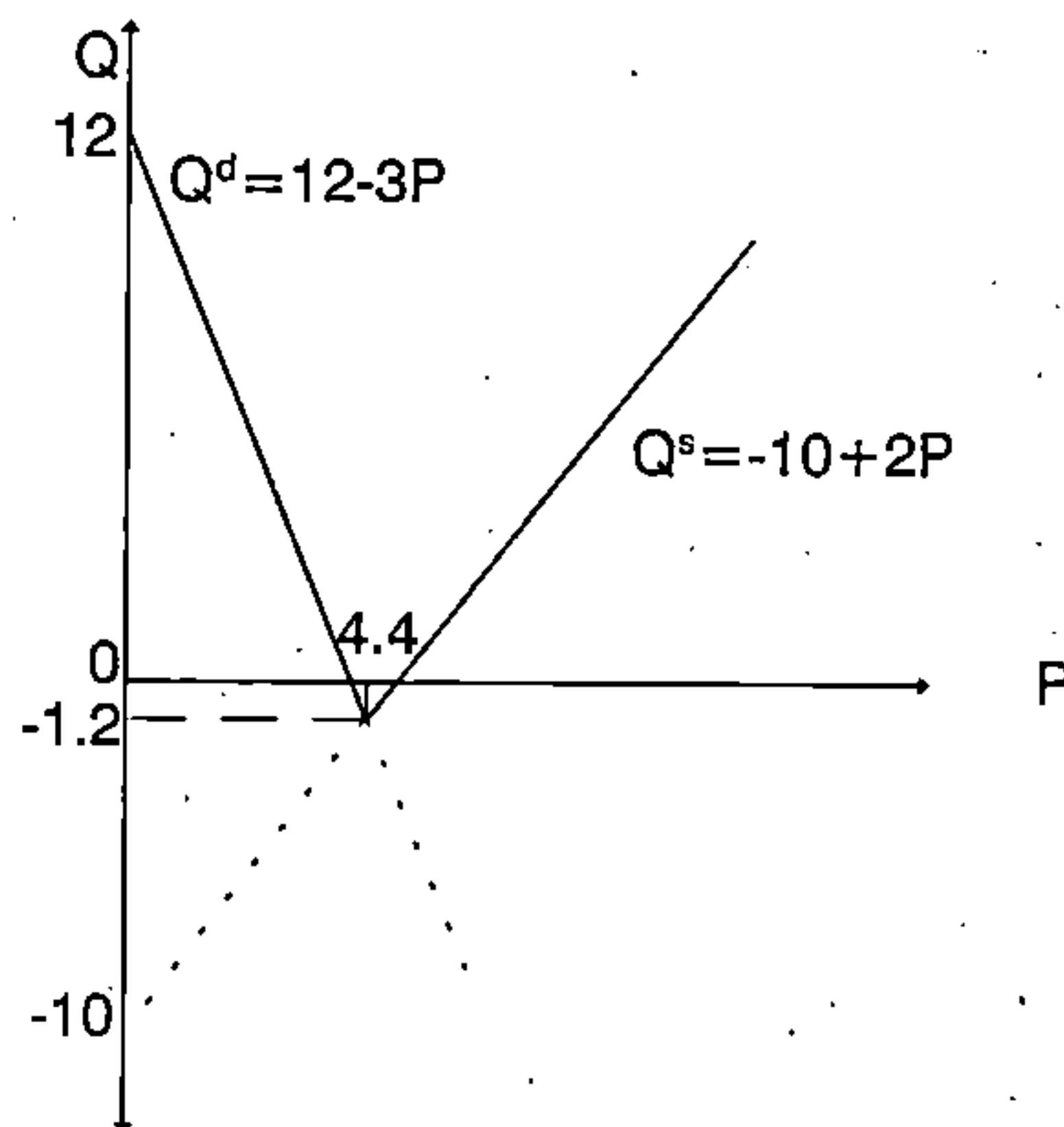
$$P = 4.4$$

$$Q^d = 12 - 3\left(\frac{22}{5}\right)$$

$$Q^s = Q^d = -1.2$$

La igualdad entre oferta y demanda ocurre en el cuarto cuadrante.

Gráfico N° V.3.1



El precio es la variable dependiente (Marshall): $P = f(Q)$

Demanda:

$$Q^d = 12 - 3P$$

$$Q^d - 12 = -3P$$

$$P^d = 4 - \frac{1}{3}Q$$

Oferta:

$$Q^s = -10 + 2P$$

$$Q^s + 10 = 2P$$

$$P^s = 5 + \frac{1}{2}Q$$

Igualando:

$$p^d = p^s$$

$$4 - \frac{1}{3}Q = 5 + \frac{1}{2}Q$$

$$Q = -1.2$$

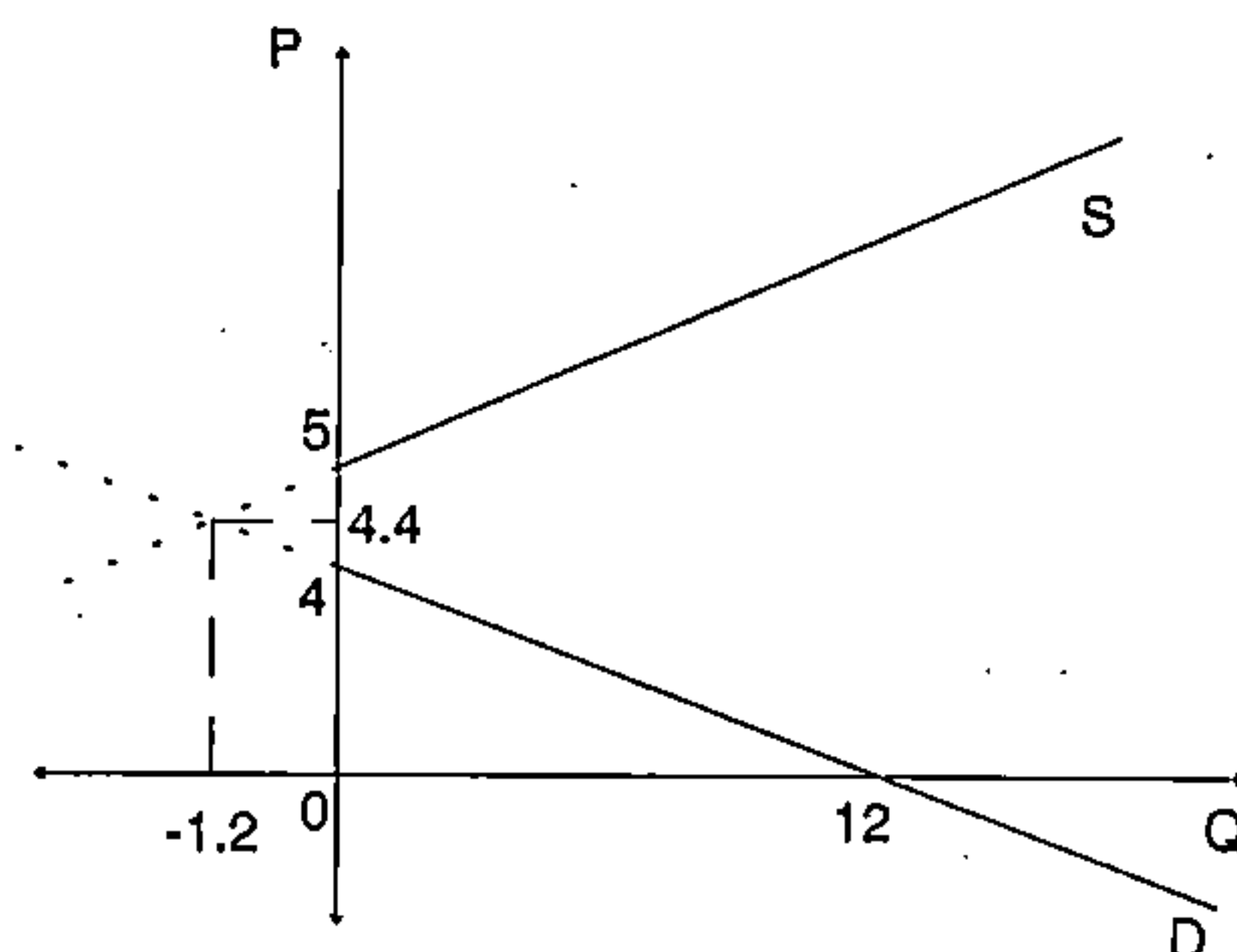
Luego:

$$P = 4 - \frac{1}{3}(-1.2)$$

$$P = 4.4$$

La solución matemática en ambos ejercicios admite una interpretación económica. Sería el caso, por ejemplo, de bienes lujosos. Nadie está dispuesto a cubrir el costo de producción a pesar de existir demanda por el producto. Por lo tanto $Q = 0$. Ver gráfico N° V.3.2.

Gráfico N° V.3.2



b) El precio es la variable independiente (Walras): $Q = f(P)$

$$Q^d = Q^s$$

$$9 - 0.5P = 14 + 1P$$

$$-\frac{3}{2}P = 5$$

$$P = -\frac{10}{3}$$

Demanda:

$$Q^d = 9 - 0.5P$$

$$Q^d - 9 = -0.5P$$

$$P^d = 18 - 2Q$$

Oferta:

$$Q^s = 14 + 1P$$

$$Q - 14 = 1P$$

$$P^s = -14 + Q$$

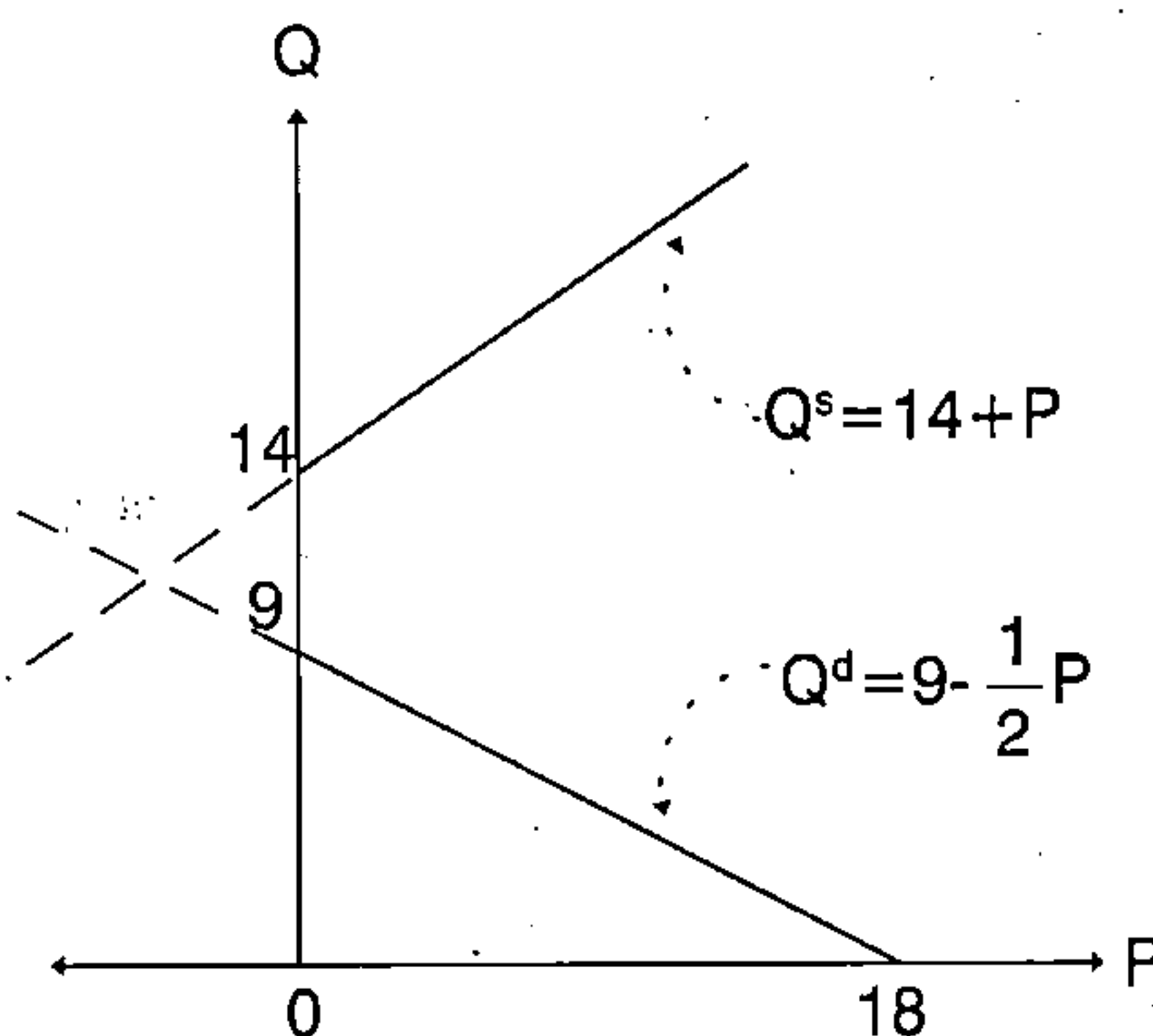
Resolviendo se obtiene:

$$Q = 10.67$$

$$P = -3.33$$

Aparentemente no existiría un equilibrio con significación económica, pero en realidad se trataría del caso de un bien “libre”, donde a precio cero, la cantidad máxima demandada es inferior a la cantidad “ofertada” o existente a dicho precio. (Gráfico N° V.3.3).

Gráfico N° V.3.3



El precio es la variable dependiente (Marshall): $P = f(Q)$

Demanda:

$$Q^d = 9 - 0.5Q$$

$$Q^d - 9 = -0.5P$$

$$9 - Q^d = 0.5P$$

$$P^d = 18 - 2Q$$

Oferta:

$$Q^s = 14 + 1P$$

$$Q^s - 14 = P$$

$$P^s = -14 + 1Q$$

Igualando:

$$P^d = P^s$$

$$18 - 2Q = -14 + 1Q$$

$$-3Q = -32$$

$$Q = \frac{32}{3} = 10.67$$

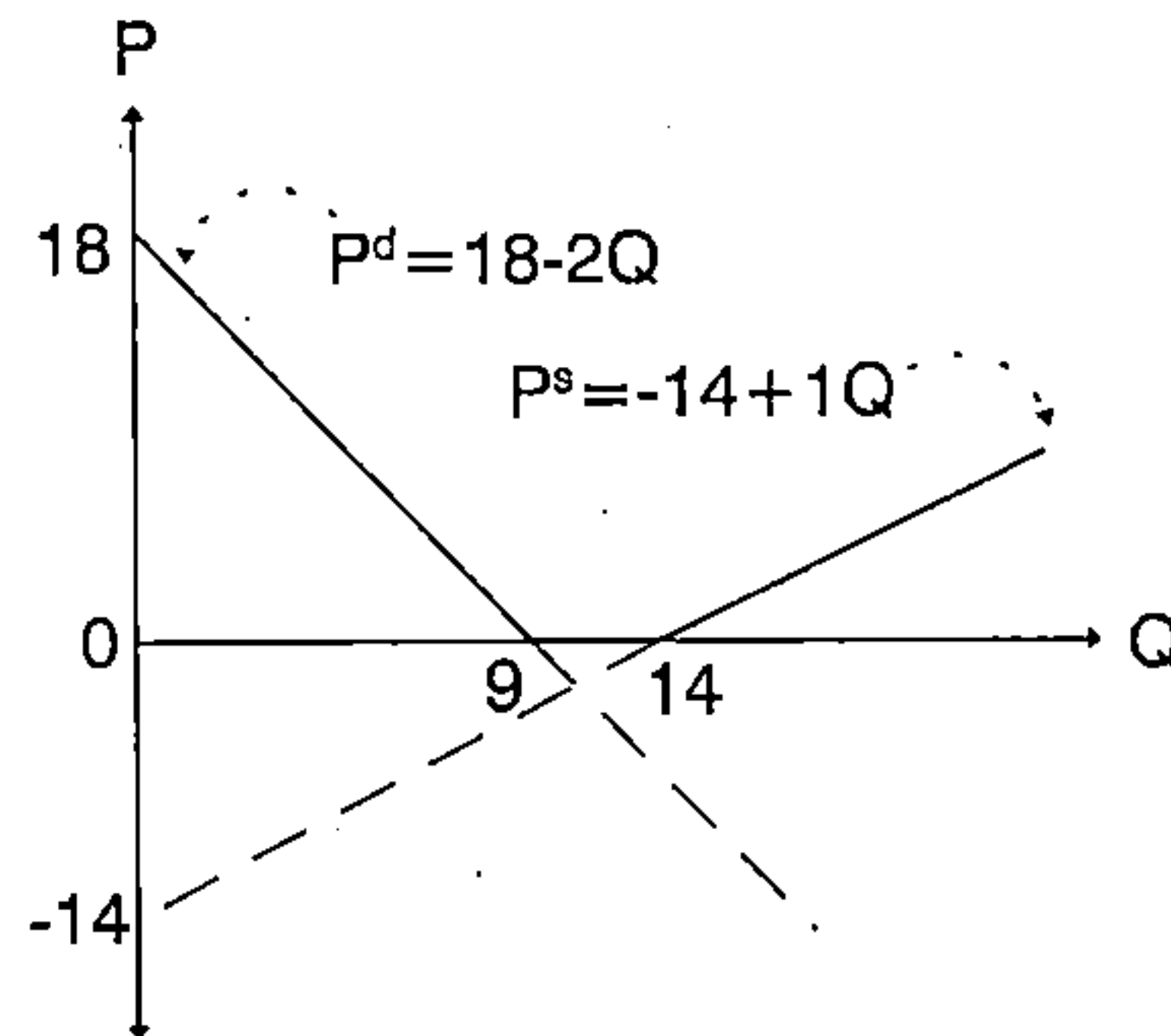
Luego:

$$P^{s=e} = -14 + 1(10.67)$$

$$P^e = -3.33$$

Este caso también puede interpretarse como correspondiente a un bien libre, pues a precio cero la cantidad máxima demandada es inferior a la oferta o disponibilidad del bien (gráfico N° V.3.4).

Gráfico N° V.3.4



2. Dadas las ecuaciones del mercado:

$$D: Q^d = 20 - 2P$$

$$S: Q^s = 40 - 6P$$

Determine el equilibrio del mercado y señale si éste es estable estáticamente, según los criterios de Walras y Marshall.

Respuesta:

a) El precio es la variable independiente (Walras): $Q = f(P)$

$$D = S$$

$$20 - 2P = 40 - 6P$$

$$-2P + 6P = 40 - 20$$

$$4P = 20$$

$$P = 5$$

$$Q = 10$$

En este mercado existe equilibrio único

$$E(P) = D(P) - S(P) \quad \text{Exceso de demanda}$$

$$\frac{d[E(P)]}{dP} < 0$$

Condición para la estabilidad estática según Walras

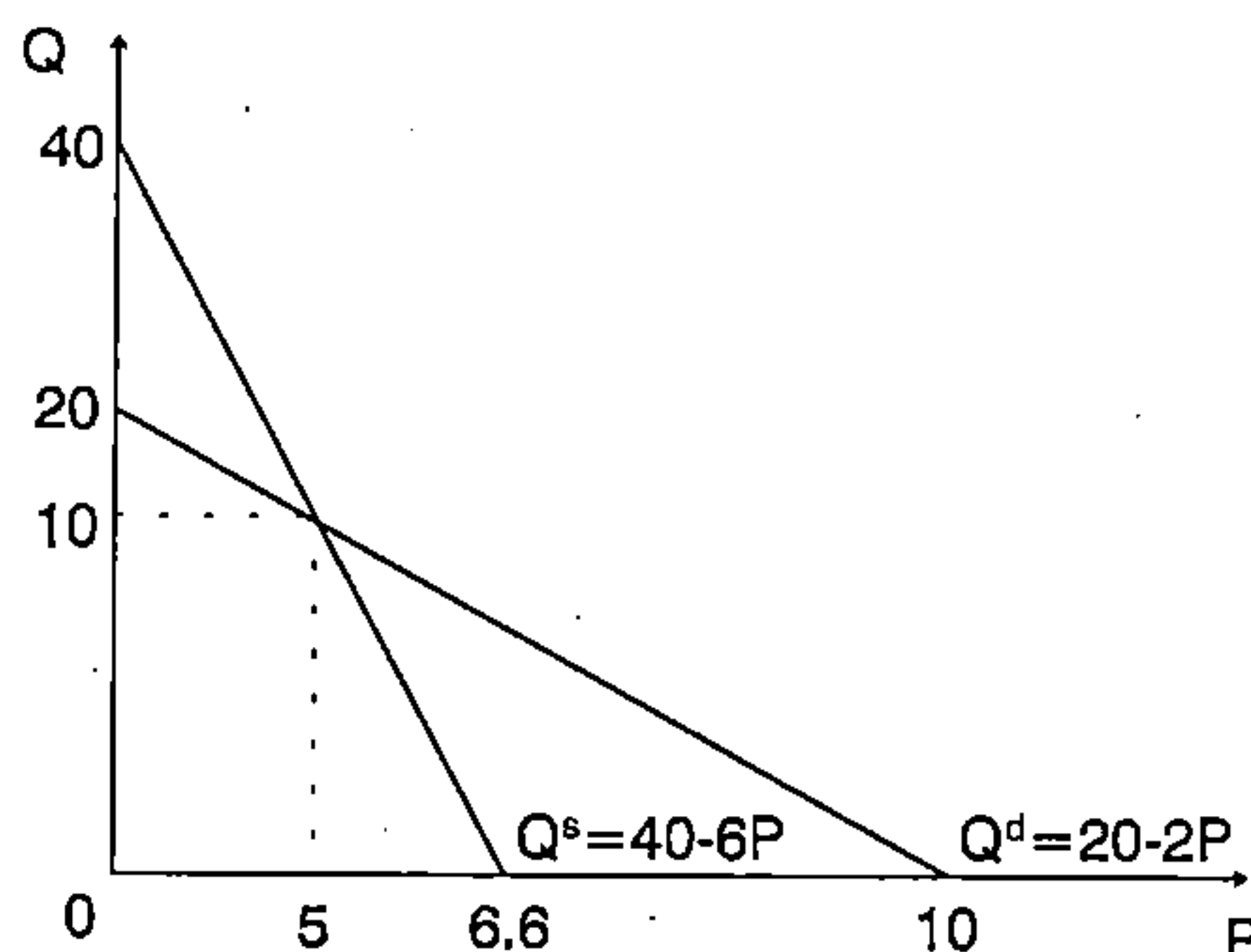
$$D'(P) - S'(P) < 0$$

$$D'(P) < S'(P)$$

$$-2 < -6$$

No es un mercado estable según Walras porque a un precio superior al de equilibrio se produce un exceso de demanda. Según Walras, un exceso de demanda provoca competencia entre los compradores, por lo que el precio debe subir. Pero al hacerlo, éste se aleja del equilibrio. Ver gráfico N° V.3.5.

Gráfico N° V.3.5



b) El precio es la variable dependiente (Marshall): $P = f(Q)$

Demanda:

$$Q^d = 20 - 2P$$

$$Q^d - 20 = -2P$$

$$P^d = 10 - \frac{1}{2}Q$$

Oferta:

$$Q^s = 40 - 6P$$

$$Q^s - 40 = -6P$$

$$P^s = \frac{40}{6} - \frac{1}{6}Q$$

Exceso de precio de demanda

$$F(Q) = P^d - P^s$$

$$F(Q) = D^{-1}(Q) - S^{-1}(Q)$$

$$\frac{d[F(Q)]}{dQ} < 0$$

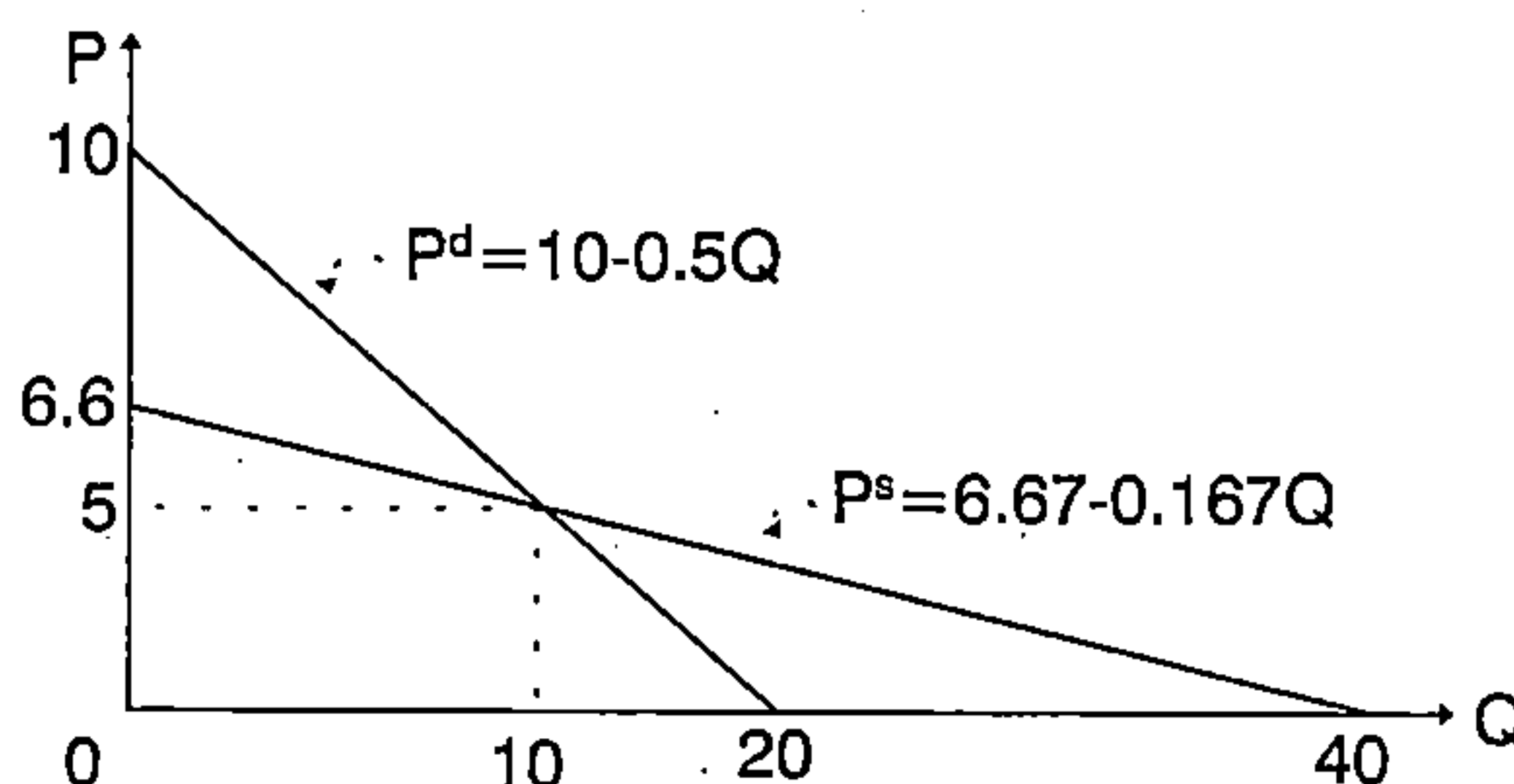
$$D^{-1'}(Q) - S^{-1'}(Q) < 0$$

Condición para la estabilidad estática según Marshall

$$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{6}$$

Sí es estable según el criterio marshalliano. Cuando la cantidad excede a la de equilibrio, el $P^s > P^d$. Luego, los productores reducen la cantidad ofertada y ello cierra el exceso del precio de oferta.

Gráfico N° V.3.6



3. El equilibrio fijado por las ecuaciones de demanda y oferta dadas por:

$$P^d = a + 2Q$$

$$P^s = b + 1Q$$

¿Es estable estáticamente según los criterios de Walras y Marshall?

Respuesta:

a) El precio es la variable independiente (Walras): $Q = f(P)$

Demanda:

$$D = Q^d = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}P \quad \frac{dD}{dP} = \frac{1}{2}$$

Oferta:

$$S = Q^s = -b + P \quad \frac{dS}{dP} = 1$$

$$\frac{d[E(P)]}{dP} < 0$$

$$D'(P) - S'(P) < 0$$

Condición de estabilidad estática de Walras

$$D'(P) < S'(P)$$

$$\frac{1}{2} < 1 \quad \text{Es estable según el criterio de Walras.}$$

b) El precio es la variable dependiente (Marshall): $P = f(Q)$

Demanda:

$$P^d = a + 2Q \quad \frac{dP^d}{dQ} = 2$$

Oferta:

$$P^s = b + Q \quad \frac{dP^d}{dQ} = 1$$

$$\frac{d[F(Q)]}{dQ} < 0$$

$$D^{-1'}(Q) - S^{-1'}(Q) < 0$$

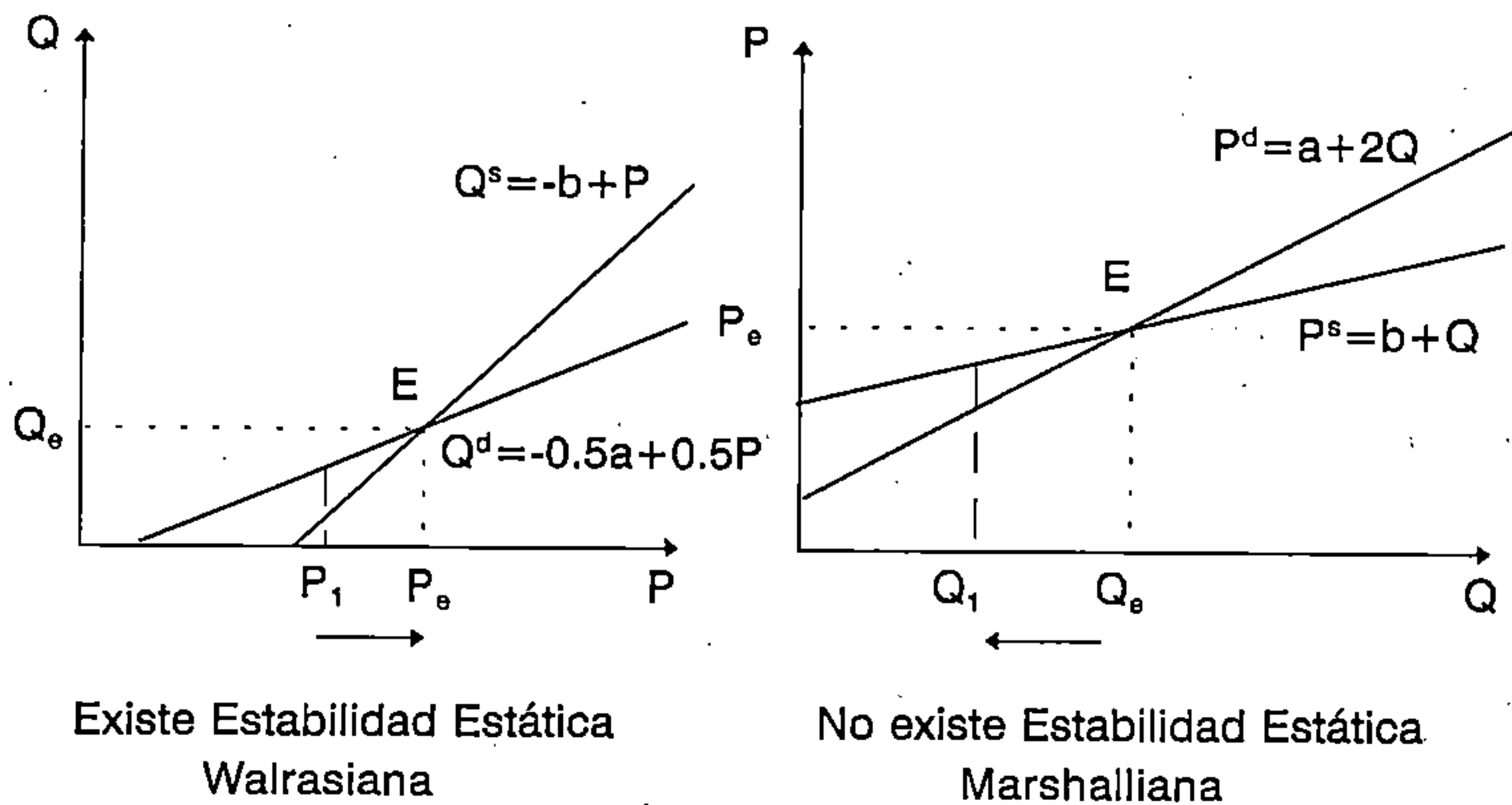
Condición de estabilidad estática de Marshall

$$D^{-1'}(Q) < S^{-1'}(Q)$$

$$2 < 1$$

No es estable según el criterio de Marshall. Ver gráfico N° V.3.7.

Gráfico N° V.3.7



V.4 Estabilidad dinámica (teorema de la telaraña)

1. Determinar la solución de equilibrio general de un mercado dadas las siguientes funciones:

$$D_t: Q_t^d = \alpha P_t + a$$

$$S_t: Q_t^s = \beta P_{t-1} + b$$

Respuesta:

$$D_t = S_t$$

$$\alpha P_t + a = \beta P_{t-1} + b$$

$$P_t = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) P_{t-1} + \frac{b-a}{\alpha}$$

$$P_t = A P_{t-1} + B$$

Ecuación en diferencia lineal de primer orden no homogénea.

Solución general = solución homogénea + solución particular

Solución homogénea = CA^t

Solución particular = $B \frac{1-A^t}{1-A}$

Donde:

$$A = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)$$

$$B = \left(\frac{b-a}{\alpha} \right)$$

Este mercado se encontrará en equilibrio cuando $P_t = P_{t-1} = P_e$. Es decir:

$$Q^d = \alpha P_t + a$$

$$Q^s = \beta P_t + b$$

Por lo tanto:

$$\alpha P_t + a = \beta P_t + b$$

$$P_t = P_e = \frac{b-a}{\alpha-\beta}$$

Existe solución de equilibrio. Pero el problema es determinar cómo se llega a ella:

Solución general:

$$P_t = CA^t + B \frac{1-A^t}{1-A}$$

$$P_t = C\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^t + \left(\frac{b-a}{\alpha}\right) \left[\frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^t}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \right]$$

Valor inicial de P , cuando $t = 0$; $P_t = P_0$

$$P_0 = C\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^0 + \left(\frac{b-a}{\alpha}\right) \left[\frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^0}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \right]$$

$$P_0 = C$$

Por lo tanto:

$$P_t = P_0\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^t + \left(\frac{b-a}{\alpha}\right) \left[\frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^t}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \right]$$

Desarrollando:

$$P_t = P_0\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^t + \left[\frac{b - b\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^t - a + a\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^t}{\alpha - \beta} \right]$$

$$P_t = P_0 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^t - \frac{b \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^t}{\alpha - \beta} + \frac{a \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^t}{\alpha - \beta} + \frac{b - a}{\alpha - \beta}$$

$$P_t = P_0 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^t \left[P_0 - \frac{b - a}{\alpha - \beta} \right] + \left[\frac{b - a}{\alpha - \beta} \right]$$

$$P_t = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^t (P_0 - P_e) + P_e$$

En particular, cuando $t \rightarrow \infty$ dado $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1$ la expresión $\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{t=\infty} \Rightarrow 0$; por lo que

$$P_t = P_\infty = P_e$$

$$P_\infty = P_e = \frac{b - a}{\alpha - \beta}$$

Solución de equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$ ya que la expresión $\frac{b - a}{\alpha - \beta}$ es el valor de equilibrio de P . El mercado es dinámicamente estable.

2. Dado el siguiente mercado, caracterizado por una respuesta retrasada de la oferta:

$$D_t: Q_t^d = 40 - 10P_t \qquad D_t = a + \alpha P_t$$

$$S_t:Q_t^s = 2 + 9P_{t-1} \quad S_t = b + \beta P_{t-1}$$

Se pide determinar:

- a) Si tiene solución de equilibrio
- b) La solución general
- c) Dado $P_0 = 1$, calcular $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_{49}, P_{50}, \dots, P_{89}, P_{90}$
- d) Grafique las fluctuaciones a partir de $P_0 = 1$

Respuesta:

a) Solución de equilibrio:

Cuando el precio no varía de un período a otro:

$$D_t:Q_t^d = 40 - 10P_t$$

$$S_t:Q_t^s = 2 + 9P_{t-1}$$

Igualando:

$$40 - 10P_t = 2 + 9P_t$$

$$38 = 19P_t$$

$$P_t = 2$$

$$S_t = 2 + 9(2) = 20$$

Este mercado posee una solución.

b) Solución general:

$$D_t = S_t$$

$$40 - 10P_t = 2 + 9P_{t-1}$$

$$a + \alpha P_t = b + \beta P_{t-1}$$

$$\alpha P_t = b - a + \beta P_{t-1}$$

$$P_t = \frac{b-a}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} P_{t-1}$$

Ecuación en diferencia lineal de primer orden no homogénea, cuya solución general es:

$$P_t = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^t \left[P_0 - \frac{b-a}{\alpha-\beta} \right] + \frac{b-a}{\alpha-\beta}$$

$$\text{Si } |\alpha| > |\beta| \Rightarrow \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1$$

P_t fluctúa convergentemente a P_e cuando $t \rightarrow \infty$

$$P_t = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^t [P_0 - P_e] + P_e$$

Dado $t \rightarrow \infty$, entonces: $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^t \rightarrow 0$ y queda solamente:

$$\frac{b-a}{\alpha-\beta} = \frac{2-40}{-10-9} = \frac{-38}{-19} = 2 \rightarrow P_e$$

Además, para ver si el mercado es dinámicamente convergente:

Demanda:

$$Q_t^d = 40 - 10P_t$$

$$-10P_t = Q_t - 40$$

$$P_t = 4 - \frac{1}{10}Q_t$$

Pendiente: $|D_t| = 0.1$

Oferta:

$$Q_t^s = 2 + 9P_{t-1}$$

$$-9P_{t-1} = -Q_t + 2$$

$$P_{t-1} = -\frac{2}{9} + \frac{1}{9}Q_t$$

Pendiente: $|S_t| = 0.111$

$$|D_t| < |S_t|$$

Entonces el precio converge dinámicamente al valor de equilibrio.

La solución general se escribe reemplazando valores:

$$P_t = \left[\frac{9}{-10} \right] \left[P_0 - \frac{2-40}{-10-9} \right] + 2$$

$$P_t = [-0.9]^t [P_0 - 2] + 2$$

c) $P_0 = 1$, calcular $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_{49}, P_{50}, \dots, P_{89}, P_{90}$.

$$P_1 = [-0.9]^1 [1 - 2] + 2$$

$$P_1 = 0.9 + 2$$

$$P_1 = 2.9$$

$$P_2 = [-0.9]^2 [1 - 2] + 2$$

$$P_2 = -0.81 + 2$$

$$P_2 = 1.19$$

$$P_3 = [-0.9]^3 [1 - 2] + 2$$

$$P_3 = -0.729 + 2$$

$$P_3 = 2.729$$

$$P_4 = [-0.9]^4 [1 - 2] + 2$$

$$P_4 = -0.6561 + 2$$

$$P_4 = 1.3439$$

$$P_{49} = [-0.9]^{49} [1-2] + 2$$

$$P_{49} = 0.0057264 + 2$$

$$P_{49} = 2.0057264$$

$$P_{50} = [-0.9]^{50} [1-2] + 2$$

$$P_{50} = -0.0051538 + 2$$

$$P_{50} = 1.9948462$$

$$P_{89} = [-0.9]^{89} [1-2] + 2$$

$$P_{89} = 0.0000846 + 2$$

$$P_{89} = 2.0000846$$

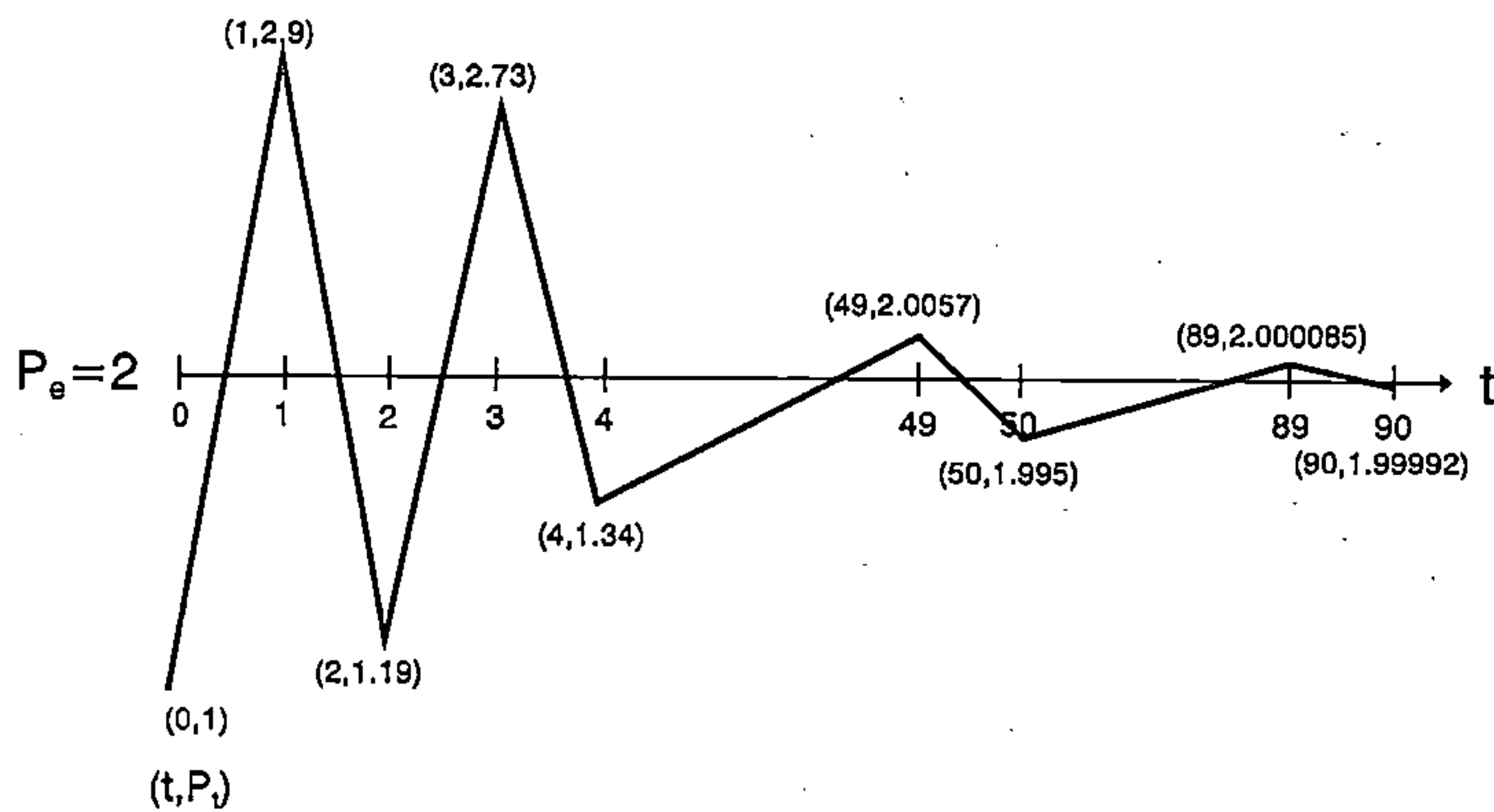
$$P_{90} = [-0.9]^{90} [1-2] + 2$$

$$P_{90} = -0.0000762 + 2$$

$$P_{90} = 1.9999238$$

d) Gráfico:

Gráfico Nº V.4.1



V.5 Producción conjunta

1. Determinar:

a) La RTP (relación de transformación entre productos) de la curva de transformación de productos generada por:

$$X = q_1^2 + q_2^2$$

donde X es el único recurso empleado; q_1 y q_2 son productos que se producen en forma conjunta.

b) La forma de la curva de transformación.

Respuesta:

a) **Relación de transformación entre productos:**

$$X = q_1^2 + q_2^2$$

$$X = X^0$$

$$dX^0 = 0 = 2q_1 dq_1 + 2q_2 dq_2$$

El valor de la pendiente de cualquier tangente a un determinado punto sobre la curva de transformación está definido por:

$$\text{RTP} \equiv -\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{q_1}{q_2}$$

b) Forma de la curva de transformación:

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = \frac{q_2 - q_1 \left(\frac{dq_2}{dq_1} \right)}{q_2^2} = \frac{q_2 - q_1 \left(-\frac{q_1}{q_2} \right)}{q_2^2} \left(\frac{q_2}{q_2} \right) = \frac{q_2^2 + q_1^2}{q_2^3}$$

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2} > 0$$

La pendiente crece conforme q_1 crece. Por lo tanto, la curva de transformación es cóncava vista desde el origen de coordenadas.

2. Determinar las condiciones de primer y segundo orden que un empresario que desea maximizar sus beneficios debe cumplir, dado que su curva de transformación de productos está dada por:

$$X = q_1^2 + q_2^2$$

Respuesta:

$$\pi = IT - CT$$

$$\pi = [P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2] - r^0 X$$

donde r^0 es el precio de mercado del factor

$$\pi = [P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2] - r^0 [q_1^2 + q_2^2]$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = P_1^0 - r^0 2q_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = P_2^0 - r^0 2q_2 = 0$$

Condición de primer orden:

$$\frac{P_1^0}{P_2^0} = \frac{q_1}{q_2}$$

la RTP debe ser igual a la relación de precios.

Condiciones de segundo orden:

$$h_{11} > 0$$

donde: $X = h(q_1, q_2)$

$$h_{22} > 0$$

$$(h_{11})(h_{22}) - (h_{12})^2 > 0$$

$$h_1 = \frac{\partial X}{\partial q_1} = 2q_1 = CMg_1^x ; \quad h_2 = \frac{\partial X}{\partial q_2} = 2q_2 = CMg_2^x$$

$$h_{11} = 2(CMg_1^x) \text{ creciente; } h_{22} = 2(CMg_2^x) \text{ creciente y } h_{12} = 0$$

$$h_{11} = h_{22} = 2$$

$$(2)(2) - (0)^2 > 0$$

Se cumple la condición de segundo orden cuando los costos marginales reales de ambos productos son crecientes.

3. Un empresario utiliza un insumo X para producir dos productos que se obtienen de forma conjunta según la función de transformación siguiente:

$$X = A(q_1^\alpha + q_2^\beta)$$

donde $\alpha, \beta > 1$

A : constante positiva

Expresar los niveles de "q" que maximizan el beneficio en función de los precios si éstos son $P_1 = P_1^0$ y $P_2 = P_2^0$

Respuesta:

Condición de primer orden:

$$\pi = IT - CT$$

$$\pi = [P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2] - r^0 X$$

$$\pi = [P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2] - r^0 [A(q_1^\alpha + q_2^\beta)]$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = P_1^0 - r^0 A \alpha q_1^{\alpha-1} = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = P_2^0 - r^0 A \beta q_1^{\beta-1}$$

Despejando r^0 :

$$r^0 = \frac{P_1^0}{A \alpha q_1^{\alpha-1}} = \frac{P_2^0}{A \beta q_2^{\beta-1}}$$

Para un máximo de beneficio, el empresario debe utilizar el factor de tal manera que el valor de su producto marginal en ambos productos deba ser el mismo.

Dado que:

$$h_1 = \frac{\partial X}{\partial q_1} = A \alpha q_1^{\alpha-1}$$

Costo marginal real de q_1

$$\frac{1}{h_1} = \frac{1}{A \alpha q_1^{\alpha-1}}$$

Producto marginal de X en q_1

$$h_2 = \frac{\partial X}{\partial q_2} = A \beta q_2^{\beta-1}$$

Costo marginal real de q_2

$$\frac{1}{h_2} = \frac{1}{A \beta q_2^{\beta-1}}$$

Producto marginal de X en q_2

Entonces:

$$r^0 = P_1^0 PMg_x^1 = P_2^0 PMg_x^2$$

$$r^0 = \text{VPM}g_x^1 = \text{VPM}g_x^2$$

Luego:

$$P_1^0 = r^0 A \alpha q_1^{\alpha-1}$$

$$q_1^{\alpha-1} = \frac{P_1^0}{r^0 A \alpha}$$

$$q_1 = \alpha^{-1} \sqrt[\alpha]{\frac{P_1^0}{r^0 A \alpha}}$$

$$P_2^0 = r^0 A \beta q_1^{\beta-1}$$

$$q_2^{\beta-1} = \frac{P_2^0}{r^0 A \beta}$$

$$q_2 = \beta^{-1} \sqrt[\beta]{\frac{P_2^0}{r^0 A \beta}}$$

Condiciones de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2} = -r^0 h_{11} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} = -r^0 h_{22} < 0$$

y

$$r_0^2 \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$h_1 = \frac{\partial X}{\partial q_1} = A\alpha q_1^{\alpha-1}$$

$$h_2 = \frac{\partial X}{\partial q_2} = A\beta q_2^{\beta-1}$$

$$h_{11} = \frac{\partial^2 X}{\partial q_1^2} = A\alpha(\alpha-1)q_1^{\alpha-2} > 0 ; \alpha > 1 \text{ entonces } -r^0 h_{11} < 0 \text{ se cumple}$$

$$h_{22} = \frac{\partial^2 X}{\partial q_2^2} = A\beta(\beta-1)q_2^{\beta-2} > 0 ; \beta > 1 \text{ entonces } -r^0 h_{22} < 0 \text{ se cumple}$$

$$h_{12} = 0$$

Por lo tanto:

$$r^0 [h_{11}h_{22} - (h_{12})^2] > 0$$

$$(+)[(+)(+) - (0)^2] > 0$$

La curva de transformación de productos es estrictamente cóncava y el equilibrio es único.

4. Un granjero cría ovejas que le proporcionan dos productos: carne y lana. Si su curva de costos totales está dada por la ecuación:

$$CT = 0.03q^3 + 2.44q + 10$$

donde 'q' representa número de ovejas, mientras que la demanda de mercado por carne y lana de oveja está dada por las ecuaciones:

$$P_c^d = 11 - \frac{3}{5}q_c \quad \text{y} \quad P_l^d = 6 - \frac{1}{2}q_l$$

Se pide encontrar el número óptimo de ovejas que deben ser producidas. Asuma que cada oveja produce una cantidad fija de lana y carne de la misma calidad.

Respuesta:

La crianza óptima estará determinada por la igualdad de la demanda y oferta (curva de costo marginal) del granjero.

El costo marginal:

$$CT = 0.03q^3 + 2.44q + 10$$

$$CMg \equiv \frac{dCT}{dq} = 0.09q^2 + 2.44$$

- La demanda por ovejas corresponde a la suma vertical de las demandas por lana y carne que produce cada oveja. Por lo tanto:

$$P^d = P_c^d + P_l^d$$

$$P^d = \left[11 - \frac{3}{5}q_c \right] + \left[6 - \frac{1}{2}q_l \right]$$

$$P^d = 17 - \frac{11}{10}q$$

Luego, la igualdad entre oferta y demanda:

$$0.09q^2 + 2.44 = 17 - 1.1q$$

$$0.09q^2 + 1.1q - 14.56 = 0$$

$$q = \frac{-1.1 \pm \sqrt{(1.1)^2 - 4(0.09)(-14.56)}}{2(0.09)}$$

$$q = \frac{-1.1 \pm \sqrt{6.4516}}{0.18}$$

$$q = \frac{-1.1 \pm 2.54}{0.18}$$

$$q = 8 \text{ ovejas}$$

El precio por la carne y lana que produce cada oveja:

$$P_c^d = 11 - \frac{3}{5}q_c$$

$$P_c^d = 11 - 0.6(8)$$

$$P_c^d = 6.2$$

$$P_l^d = 6 - \frac{1}{2}q_l$$

$$P_l^d = 6 - 0.5(8)$$

$$P_l^d = 2$$

Por lo tanto, el precio a que se vende cada oveja:

$$P = 6.2 + 2$$

$$P = 8.2$$

El beneficio óptimo del granjero:

$$\pi = IT - CT$$

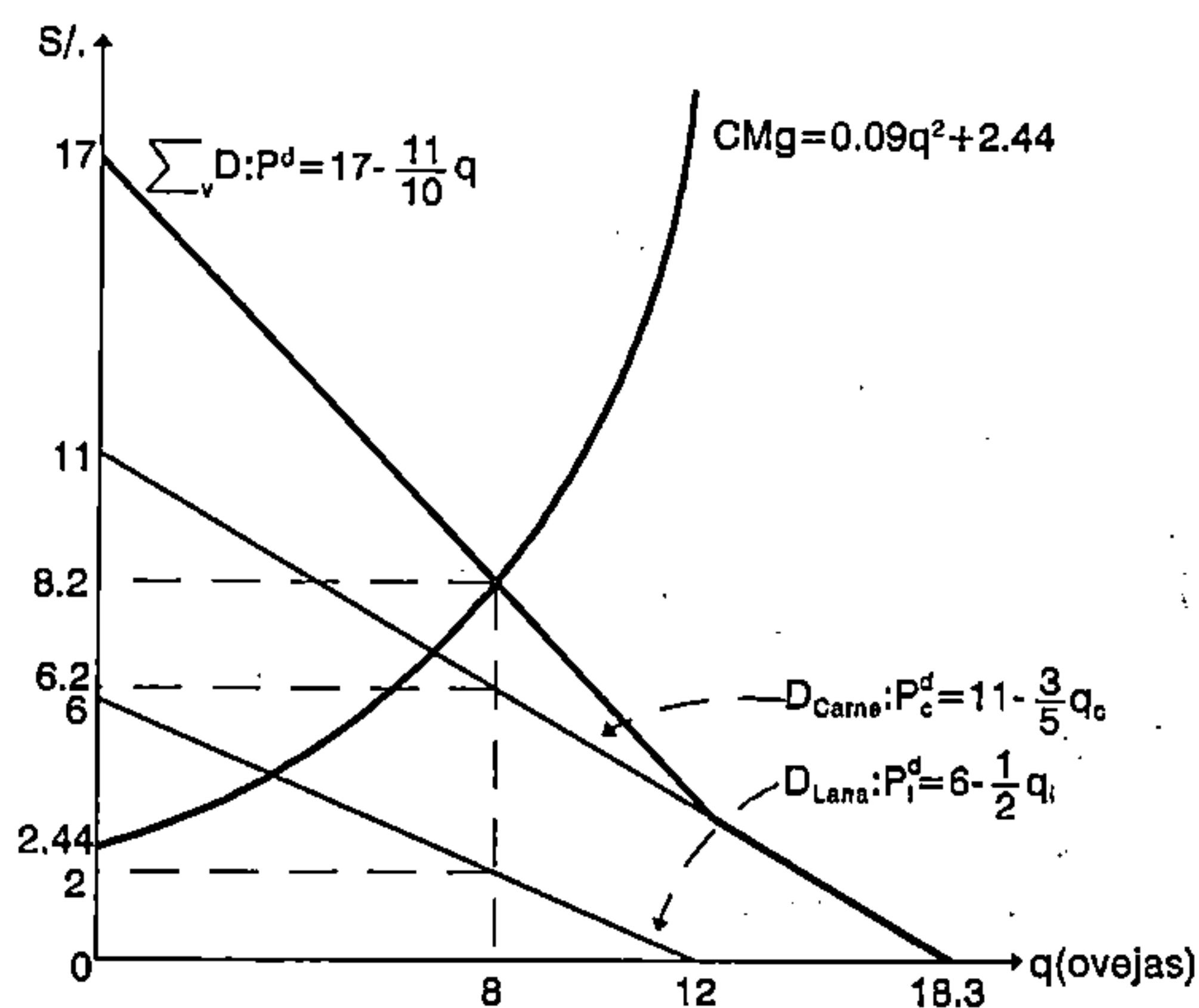
$$\pi = [(8.2)(8)] - [0.03(8)^3 + 2.44(8) + 10]$$

$$\pi = 65.6 - [15.36 + 19.52 + 10]$$

$$\pi = 65.6 - 44.88$$

$$\pi = 20.72$$

Gráfico N° V.5.1



5. En cierta región, las demandas por petróleo crudo y gas natural están dadas por las ecuaciones siguientes:

$$q_{pc}^d = 20 - \frac{5}{6}P$$

$$q_g^d = 14 - \frac{7}{6}P$$

La industria que extrae el petróleo en dicha región por su parte presenta la siguiente ecuación de costos totales:

$$CT = 0.04q^3 + 3q + 20$$

Teniendo en cuenta que cada barril de petróleo extraído implica la extracción simultánea de 1 unidad de petróleo crudo y 1 unidad de gas natural, se pide determinar los precios y cantidad de equilibrio de la industria, así como el beneficio total.

Posteriormente, el Gobierno decide establecer un tope al precio del gas, fijándolo en 2.7. ¿Cuáles serán los nuevos precios, producción y beneficios de la industria?

Respuesta:

La extracción óptima de petróleo estará determinada por la igualdad entre la demanda total por petróleo y su oferta.

El costo marginal de la industria:

$$CT = 0.04q^3 + 3q + 20$$

$$CMg \equiv \frac{dCT}{dq} = 0.12q^2 + 3$$

La demanda total por los dos productos que se extraen conjuntamente es la suma vertical de las demandas individuales.

$$q_g^d = 14 - \frac{7}{6}P \rightarrow P_g^d = 12 - \frac{6}{7}q$$

$$q_{pc}^d = 20 - \frac{5}{6}P \rightarrow P_{pc}^d = 24 - \frac{6}{5}q$$

La suma horizontal:

$$P^d = P_g^d + P_{pc}^d$$

$$P^d = \left[12 - \frac{6}{7}q\right] + \left[24 - \frac{6}{5}q\right]$$

$$P^d = 36 - \frac{72}{35}q$$

La condición de equilibrio del mercado $D = S$ (CMg)

$$36 - \frac{72}{35}q = 0.12q^2 + 3$$

$$0.12q^2 + \frac{72}{35}q - 33 = 0$$

$$q = \frac{-\frac{72}{35} \pm \sqrt{\left(\frac{72}{35}\right)^2 - 4(0.12)(-33)}}{2(0.12)}$$

$$q = \frac{-\frac{72}{35} \pm \sqrt{4.232 + 15.84}}{0.24}$$

$$q = \frac{-2.057 \pm 4.480}{0.24}$$

$$q = \frac{2.423}{0.24}$$

$$q = 10.1$$

Los precios de cada producto:

$$P_g^d = 12 - \frac{6}{7}(10.1)$$

$$P_g^d = 12 - 8.657$$

$$P_g^d = 3.343$$

$$P_{pc}^d = 24 - \frac{6}{5}(10.1)$$

$$P_{pc}^d = 24 - 12.12$$

$$P_{pc}^d = 11.88$$

El precio recibido por los productos por cada barril de petróleo extraído:

$$P^d = 36 - \frac{72}{35}(10.1)$$

$$P^d = 36 - 20.78$$

$$P^d = 15.223$$

Los beneficios:

$$\pi = IT - CT$$

$$\pi = [(15.223)(10.1)] - [0.04(10.1)^3 + 3(10.1) + 20]$$

$$\pi = 153.7523 - 91.51204$$

$$\pi = 62.24$$

Si el Gobierno decide ponerle un precio tope al gas natural $P_g^0 = 27$, entonces la demanda conjunta habrá de modificarse de la siguiente manera:

$$P^{d_1} = P_g^d + P_p^d$$

$$P^{d_1} = 2.7 + \left(24 - \frac{6}{5}q\right)$$

$$P^{d_1} = 26.7 - \frac{6}{5}q$$

El nuevo equilibrio:

$$26.7 - \frac{6}{5}q = 0.12q^2 + 3$$

$$0.12q^2 + \frac{6}{5}q - 23.7 = 0$$

$$q = \frac{-\frac{6}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 - 4(0.12)(-23.7)}}{2(0.12)}$$

$$q = \frac{-\frac{6}{5} \pm \sqrt{1.44 + 11.376}}{0.24}$$

$$q = \frac{-1.2 \pm \sqrt{12.816}}{0.24}$$

$$q' = 9.916$$

Es decir, la extracción global de petróleo se reduce. Los nuevos precios y beneficios serán:

$$P_g^0 = 2.7$$

$$P_{pc} = 24 - \frac{6}{5}(9.916)$$

$$P_{pc} = 12.1008$$

$$P^{d'} = 2.7 + 12.1008$$

$$P^{e'} = 14.8$$

El nuevo beneficio:

$$\pi' = [(14.8)(9.916)] - [0.04(9.916)^3 + 3(9.916) + 20]$$

$$\pi' = 146.7568 - 88.748$$

$$\pi' = 58.009$$

Aparentemente los mercados están nuevamente en equilibrio. Sin embargo, si bien la industria lo está y el mercado de petróleo crudo también, no lo está el mercado de gas natural, pues allí se ha desarrollado un exceso de demanda.

Al precio $P_g^0 = 27$, los consumidores desearían adquirir:

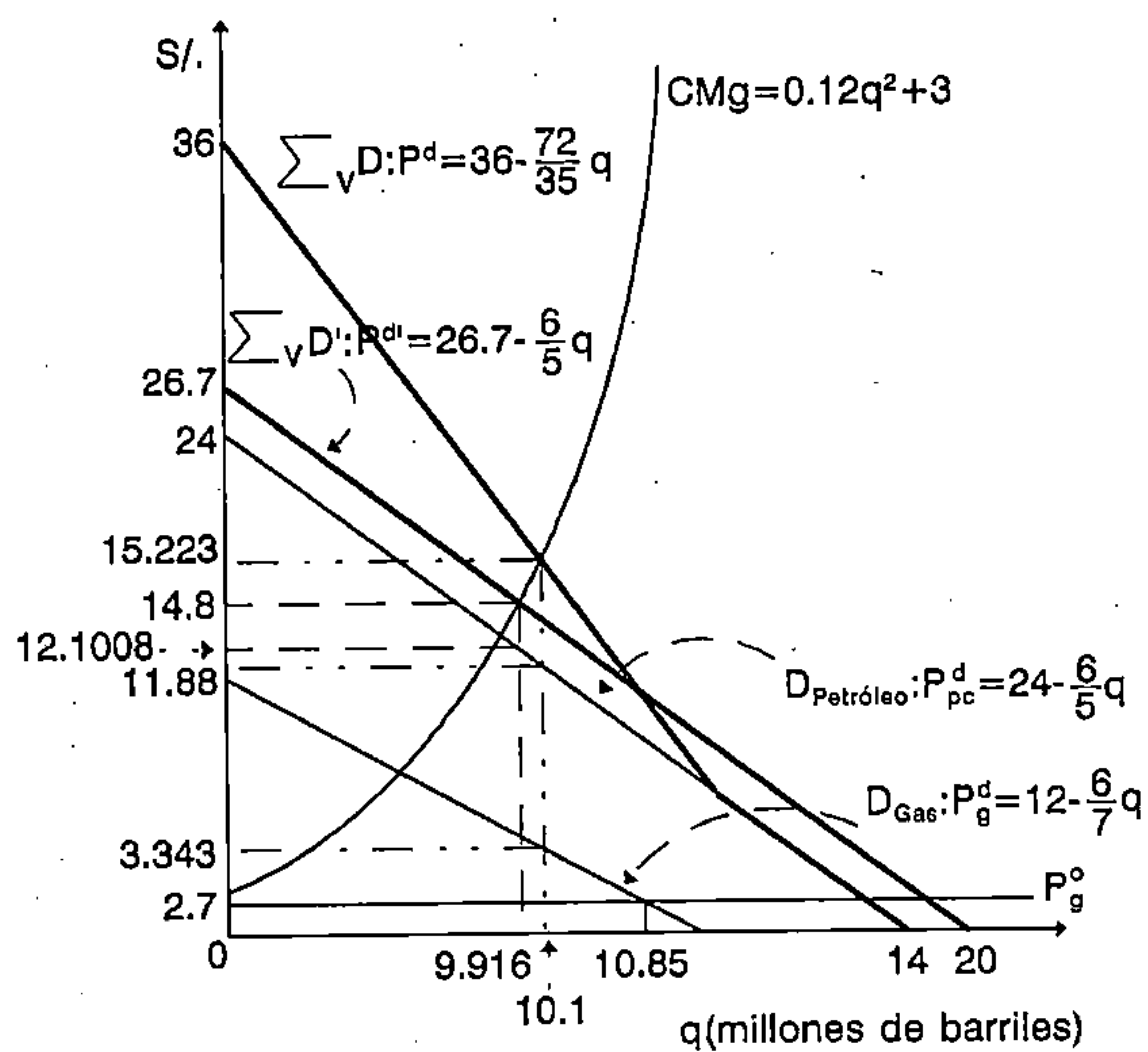
$$q_g^d = 14 - \frac{7}{6}(2.7)$$

$$q_g^d = 14 - 3.15$$

$$q_g^d = 10.85$$

Pero a dicho precio tope, la industria sólo ofrece el equivalente a $q_g^e = 9.916$. Por lo tanto en el mercado de gas natural existe un déficit de oferta.

Gráfico Nº V.5.2



VI

Teoría del monopolio

VI.1 Monopolio puro

1. “La empresa competitiva logra menos beneficios que una empresa monopolística”. ¿Es verdadera o falsa esta afirmación?

Respuesta:

En el corto plazo no es necesariamente cierto. Pero en el largo plazo, los beneficios puros de las empresas competitivas tienden a desaparecer. El monopolio en cambio, en el largo plazo, puede mantener sus beneficios puros ya sea porque produce un bien sin sustitutos cercanos, por existencia de alguna barrera legal, ventajas tecnológicas o de disponibilidad de factores.

2. La demanda de un monopolista está dada por la ecuación:

$$P = 80 - 2Q$$

Mientras que sus costos totales por:

$$CT = 30 + 10Q$$

Determine el precio y la cantidad de equilibrio así como los beneficios.

Respuesta:

En equilibrio debe cumplirse: $IMg = CMg$

Cálculo del IMg:

$$IT = Pq$$

$$IT = (80 - 2q)(q)$$

$$IT = 80q - q^2$$

$$IMg = \frac{dIT}{dq} = 80 - 4q \quad y \quad \frac{dIMg}{dq} = -4$$

Cálculo del CMg:

$$CT = 30 + 10q$$

$$CMg = \frac{dCT}{dq} = 10 \quad y \quad \frac{dCMg}{dq} = 0$$

Igualando IMg y CMg:

$$80 - 4q = 10$$

$$-4q = -70$$

$$q = 17.5$$

Reemplazando en la función de demanda:

$$P = 80 - 2(17.5)$$

$$P = 80 - 35$$

$$P = 45$$

Los beneficios:

$$\pi_e = [(45)(17.5)] - [30 + 10(17.5)]$$

$$\pi_e = 787.5 - 205$$

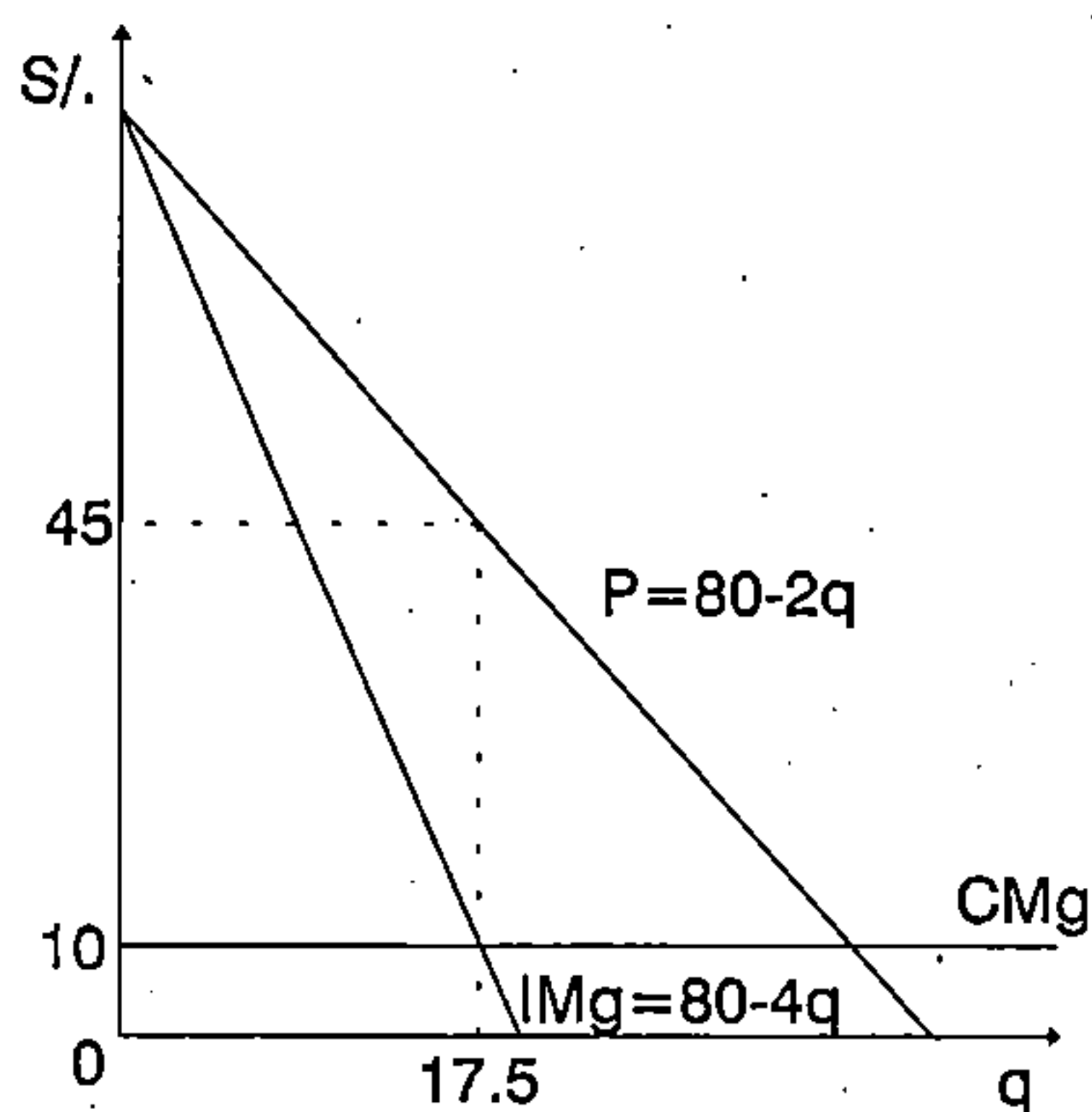
$$\pi_e = 582.5$$

Condición de segundo orden que garantiza un máximo:

$$CMg' > IMg'$$

$$0 > -4$$

Gráfico N° VI.1.1



3. Una empresa monopolista alcanza beneficios normales cuando vende 4 u 8 unidades. Si sus costos medios son:

$$CMe = \frac{1}{32} q^2 - \frac{1}{4} q + \frac{16}{q} + 100$$

Determine para una demanda lineal:

- a) El punto mínimo del CVMe.
- b) El punto mínimo del CMe.
- c) La curva de demanda que confronta.
- d) El beneficio para la empresa cuando vende 5 unidades.
- e) Precio y cantidad de equilibrio.

Respuesta:

a) **CVMe mínimo:**

$$CV = CT - CF$$

$$CT = (CMe)(q)$$

$$CT = \frac{1}{32}q^3 - \frac{1}{4}q^2 + 16 + 100q$$

$$CV = \frac{1}{32}q^3 - \frac{1}{4}q^2 + 100q$$

$$CVMe = \frac{1}{32}q^2 - \frac{1}{4}q + 100$$

$$\frac{d[CVMe]}{dq} = \frac{1}{16}q - \frac{1}{4} = 0$$

Para un mínimo del CVMe ya que

$$\frac{d^2[\text{CMe}]}{dq^2} > 0$$

$$q = 4$$

b) CMe mínimo:

$$\frac{d\text{CMe}}{dq} = \frac{1}{16}q - \frac{1}{4} - \frac{16}{q^2} = 0$$

Para un mínimo del CMe:

$$\frac{1}{16}q - \frac{1}{4} - \frac{16}{q^2} = 0$$

$$\frac{q^3}{16} - \frac{q^2}{4} - 16 = 0$$

$$q^3 - 4q^2 - 256 = 0$$

$$(q^2 + 4q + 32)(q - 8) = 0$$

$$q = 8$$

Ya que las raíces imaginarias no cuentan y:

$$\frac{d^2[\text{CMe}]}{dq^2} > 0$$

Para $q \geq 0$

c) Curva de demanda de acuerdo a los datos del problema: Beneficios normales o $\pi = 0$, ocurren cuando la curva de demanda cruza la de CMe. La curva de demanda es la de lMe o P.

Luego,

para $q = 4$

$$I\text{Me} = C\text{Me} = \frac{1}{32}(4)^2 - \frac{1}{4}(4) + \frac{16}{4} + 100$$

$$I\text{Me} = C\text{Me} = 103.5 = P$$

para $q = 8$

$$I\text{Me} = C\text{Me} = \frac{1}{32}(8)^2 - \frac{1}{4}(8) + \frac{16}{8} + 100$$

$$I\text{Me} = C\text{Me} = 102.0 = P$$

Se conocen entonces dos puntos A (4,103.5) y B (8,102.0), por lo que se puede derivar geométricamente la recta de demanda:

$$m' = \frac{103.5 - 102}{4 - 8} \quad \text{y} \quad m'' = \frac{102 - P}{8 - q}$$

Igualando:

$$-\frac{1.5}{4} = \frac{102 - P}{8 - q}$$

$$-12 + 1.5q = 408 - 4P$$

$$4P = -1.5q + 420$$

$$P = -\frac{1.5}{4}q + 105$$

$$P = -\frac{3}{8}q + 105$$

d) BMe para $q = 5$:

El IMe para $q = 5$:

$$\text{IMe} = P = -\frac{3}{8}(5) + 105$$

$$P = 103.125$$

El CMe para $q = 5$

$$\text{CMe} = \frac{1}{32}(5)^2 - \frac{1}{4}(5) + \frac{16}{5} + 100$$

$$\text{CMe} = 102.73125$$

El beneficio de $q = 5$

$$\text{BMe} = \text{IMe} - \text{CMe}:$$

$$\text{BMe} = 0.39375$$

El beneficio total:

$$\pi = (\text{BMe})(q)$$

$$\pi = (0.39375)(5)$$

$$\pi = 1.96875$$

e) Los valores de equilibrio:

$$BMe = P - CMe$$

$$BMe = -\frac{3}{8}q + 105 - \left[\frac{1}{32}q^2 - \frac{1}{4}q + \frac{16}{q} + 100 \right]$$

$$BMe = -\frac{1}{32}q^2 - \frac{1}{8}q - \frac{16}{q} + 5$$

Beneficio total:

$$\pi = (BMe)(q)$$

$$\pi = -\frac{1}{32}q^3 - \frac{1}{8}q^2 - 16 + 5q$$

Máximo beneficio total:

$$\text{Máx}\pi = \frac{d\pi}{dq} = -\frac{3}{32}q^2 - \frac{1}{4}q + 5 = 0$$

$$\frac{3}{32}q^2 + \frac{1}{4}q - 5 = 0$$

$$q = \frac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - 4\left(\frac{3}{32}\right)(-5)}}{2\left(\frac{3}{32}\right)} = \frac{-0.25 + 1.391941}{0.1875}$$

$$q = \frac{1.141941}{0.1875} = 6.09$$

El precio de mercado:

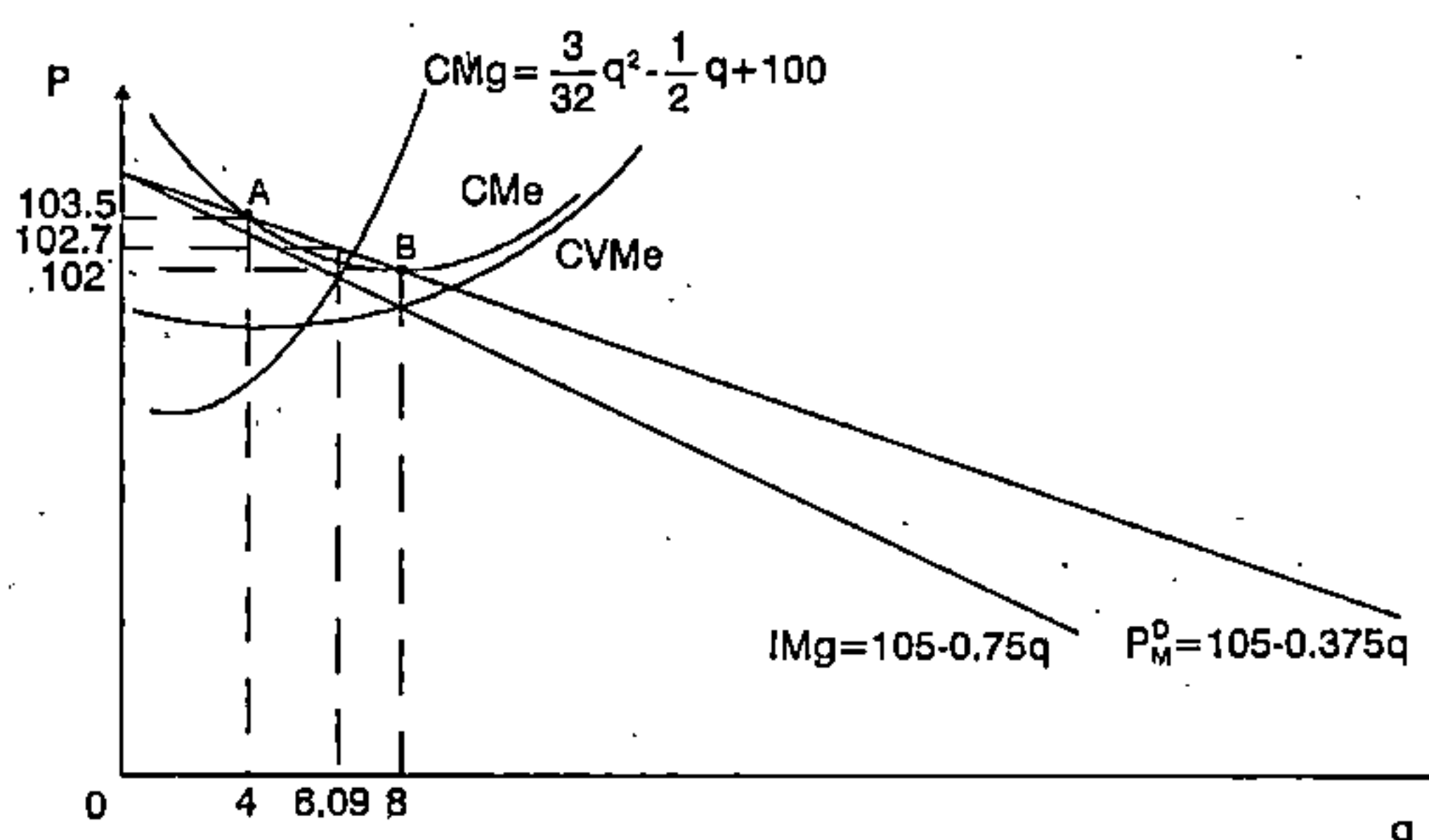
$$P = -\frac{3}{8}q + 105$$

$$P = -\frac{3}{8}(6.09) + 105$$

$$P = 102.71625$$

Precio que maximiza su beneficio

Gráfico N° VI.1.2



4. El departamento de investigaciones de mercado de una firma monopólica ha determinado que la presentación del producto tiene efectos importantes sobre su demanda. Si se utiliza un envase de metal, la demanda queda representada por la ecuación

$$q_1 = 450 - 9P_1 + 5P_2$$

En cambio, si se emplea un envase de vidrio, la respectiva ecuación de demanda es:

$$q_2 = 900 + 4P_1 - 7P_2$$

Adicionalmente se ha establecido que los costos unitarios en cada caso son 65 y 100, respectivamente. Se pide determinar el número total de unidades vendidas,

la combinación de envases utilizados, los precios respectivos y el beneficio máximo, si no existe límite a la capacidad de producción de cada tipo de presentación.

Respuesta:

El ingreso total del monopolista:

$$IT = P_1 q_1 + P_2 q_2$$

$$IT = P_1 [450 - 9P_1 + 5P_2] + P_2 [900 + 4P_1 - 7P_2]$$

$$IT = 450P_1 - 9P_1^2 + 5P_1P_2 + 900P_2 + 4P_1P_2 - 7P_2^2$$

$$IT = 450P_1 - 9P_1^2 + 9P_1P_2 + 900P_2 - 7P_2^2$$

El costo total:

$$CT = 65q_1 + 100q_2$$

El beneficio:

$$\pi = [450P_1 - 9P_1^2 + 9P_1P_2 + 900P_2 - 7P_2^2] - [65q_1 + 100q_2]$$

Para un máximo de beneficio:

$$\frac{\partial \pi}{\partial P_1} = 450 - 18P_1 + 9P_2 - \left[65 \frac{\partial q_1}{\partial P_1} + 100 \frac{\partial q_2}{\partial P_1} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial P_2} = 9P_1 + 900 - 14P_2 - \left[65 \frac{\partial q_1}{\partial P_2} + 100 \frac{\partial q_2}{\partial P_2} \right] = 0$$

Las derivadas de las cantidades respecto de los precios se obtienen de las ecuaciones de demanda.

$$q_1 = 450 - 9P_1 + 5P_2$$

$$q_2 = 900 + 4P_1 - 7P_2$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial q_1}{\partial P_1} = -9 \quad \frac{\partial q_1}{\partial P_2} = 5$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial P_1} = 4 \quad \frac{\partial q_2}{\partial P_2} = -7$$

Reemplazando en la condición de primer orden:

$$450 - 18P_1 + 9P_2 - 65(-9) - 100(4) = 0$$

$$9P_1 + 900 - 14P_2 - 65(5) - 100(-7) = 0$$

$$-18P_1 + 9P_2 + 635 = 0$$

$$9P_1 - 14P_2 + 1,275 = 0$$

$$-18P_1 + 9P_2 = -635$$

$$18P_1 - 28P_2 = -2,550$$

$$-19P_2 = -3,185$$

$$P_2 = 167.63$$

Reemplazando dicho valor en la segunda ecuación:

$$9P_1 - 14(167.63) = -1,275$$

$$9P_1 = 1,071.82$$

$$P_1 = 119.09$$

Las cantidades demandadas a los precios de equilibrio:

$$q_1 = 450 - 9P_1 + 5P_2$$

$$q_1 = 450 - 9[119.09] + 5[167.63]$$

$$q_1 = 216.34$$

$$q_2 = 900 + 4P_1 - 7P_2$$

$$q_2 = 900 + 4[119.09] - 7[167.63]$$

$$q_2 = 202.95$$

El ingreso total:

$$IT = [119.09][216.34] + [167.63][202.95]$$

$$IT = 25,763 + 34,020.51$$

$$IT = 59,784.44$$

El costo total:

$$CT = 65[216.34] + 100[202.95]$$

$$CT = 14,062.1 + 20,295.0$$

$$CT = 34,357.1$$

El beneficio:

$$\pi = 59,784.44 - 34,357.1$$

$$\pi = 25,427.34$$

VI.2 Monopolio discriminador de precios de tercer grado

1. ¿Podrá un monopolista discriminar entre dos mercados si las ecuaciones de demanda fuesen?:

$$Q_1 = 72,000 - 1'000,000P$$

- 1'000,000 (

$$Q_2 = 108,000 - 1'500,000P$$

Explique.

Respuesta:

No se puede, ambas funciones son equivalentes. La primera es una transformación monotónica de la segunda.

2. Un monopolista ha identificado dos segmentos de mercado para su producto.

$$P_1 = 70 - 5q_1$$

$$P_2 = 170 - 18q_2$$

Su función de costos es: $CT = 15 + 5Q$

- a) Determine las cantidades y precios de equilibrio de cada mercado.

b) La elasticidad precio de la demanda en cada mercado.

Respuesta:

a) Equilibrio:

$$IT_1 = P_1 q_1$$

$$IT_1 = (70 - 5q_1)q_1$$

$$IT_1 = 70q_1 - 5q_1^2$$

$$IMg_1 = 70 - 10q_1$$

$$IT_2 = P_2 q_2$$

$$IT_2 = (170 - 18q_2)q_2$$

$$IT_2 = 170q_2 - 18q_2^2$$

$$IMg_2 = 170 - 36q_2$$

$$CMg = 5$$

En equilibrio: $IMg_1 = IMg_2 = CMg$

$$IMg_1 = CMg$$

$$70 - 10q_1 = 5$$

$$q_1 = \frac{65}{10} = 6.5$$

$$IMg_2 = CMg$$

$$170 - 36q_2 = 5$$

$$q_2 = \frac{165}{36} = 4.58$$

Se sabe que:

$$Q = q_1 + q_2$$

$$Q = 6.5 + 4.58 = 11.08$$

Entonces, los precios:

$$P_1 = 70 - 5(6.5) = 37.50$$

$$P_2 = 170 - 18(4.58) = 87.56$$

Los beneficios:

$$\pi = IT_1 + IT_2 - CT$$

$$\pi = [(37.5)(6.5) + (87.56)(4.58)] - [15 + 5(11.08)]$$

$$\pi = [243.8 + 401] - [15 + 55.4]$$

$$\pi = 644.8 - 70.4$$

$$\pi = 574.4$$

b) Elasticidad-precio de la demanda:

Como los precios son diferentes, las elasticidades también lo serán:

$$IMg_1 = P_1 \left[1 - \frac{1}{|\epsilon_{11}|} \right]$$

$$70 - 10q_1 = P_1 \left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_{11}|} \right]$$

$$70 - 10(6.5) = 37.5 \left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_{11}|} \right]$$

$$5 = 37.5 \left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_{11}|} \right]$$

$$|\varepsilon_{11}| = \frac{37.5}{32.5} = 1.154$$

$$1Mg_2 = P_2 \left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_{22}|} \right]$$

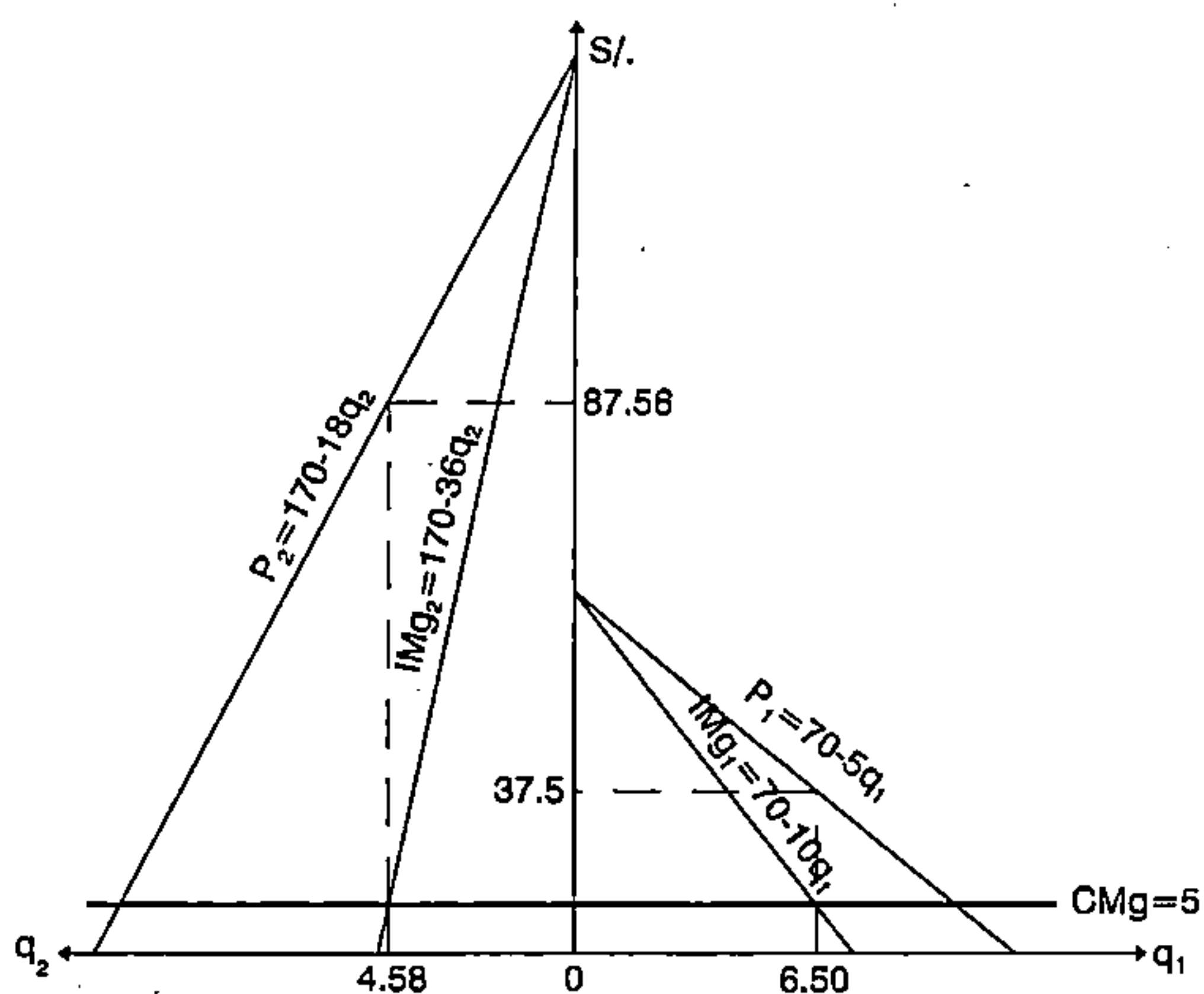
$$170 - 18(4.58) = 87.5 \left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_{22}|} \right]$$

$$5 = 87.5 \left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_{22}|} \right]$$

$$|\varepsilon_{22}| = \frac{87.5}{82.5} = 1.061$$

La elasticidad es menor en el mercado con el precio más alto. El equilibrio se observa en el siguiente gráfico:

Gráfico N° VI.2.1



Otra forma de resolver el problema:

$$\sum_h \text{IMG} = \text{CMg}$$

Se encuentra primero la suma horizontal de ingresos marginales,

$$\text{IMG}_1 = 70 - 10q_1 \quad \rightarrow \quad q_1 = 7 - \frac{1}{10}\text{IMG}_1$$

$$\text{IMG}_2 = 170 - 36q_2 \quad \rightarrow \quad q_2 = \frac{170}{36} - \frac{1}{36}\text{IMG}_2$$

$$Q = \frac{170}{36} + 7 - \frac{1}{10}\text{IMG}_1 - \frac{1}{36}\text{IMG}_2$$

$$\sum_h \text{IMG} = -\frac{360}{46}Q + \frac{4,220}{46}$$

$$4.72 + 7 - 0.1x - 2.7x = 0$$

$$11.72 - 2.8x = 0$$

$$11.72 - 2.8x = 0$$

y el resultado se iguala al costo marginal:

$$-\frac{360}{46}Q + \frac{4,220}{46} = 5$$

$$Q = 11.08$$

La cantidad total de equilibrio se reemplaza en la sumatoria horizontal de ingresos marginales:

$$\sum_h IMg = -\frac{360}{46}(11.08) + \frac{4,220}{46} \cong 5.0$$

y este valor se iguala al ingreso marginal de cada mercado, y así se obtiene la cantidad vendida en cada uno de éstos.

$$\sum_h IMg = IMg_1 = IMg_2 = 5.0$$

$$IMg_1 = \sum_h IMg$$

$$70 - 10q_1 = 5.0$$

$$q_1 = 6.5$$

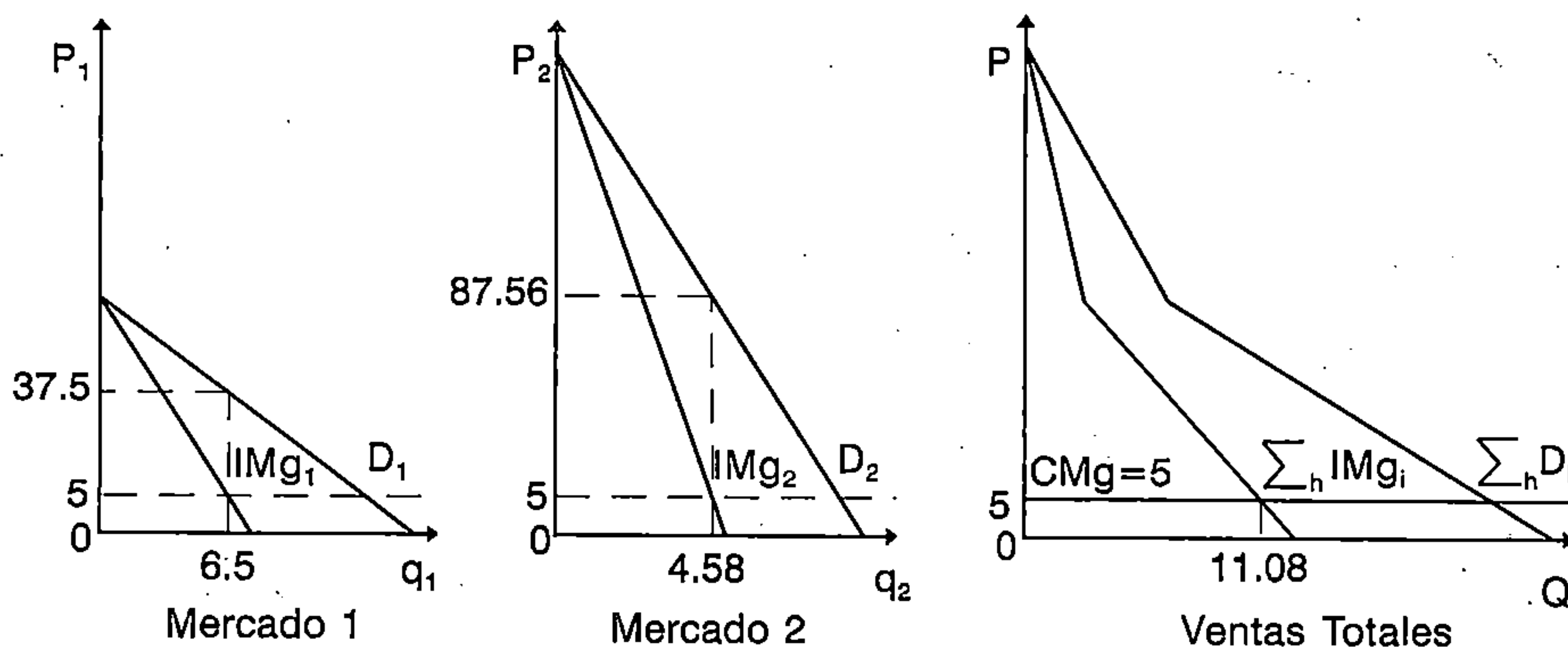
$$IMg_2 = \sum_h IMg$$

$$170 - 36q_2 = 5.0$$

$$q_2 = 4.58$$

Los precios se obtienen reemplazando las cantidades vendidas en cada mercado, en su respectiva función de demanda. El equilibrio se aprecia en el gráfico N° VI.2.2.

Gráfico N° VI.2.2



3. Un monopolista ha identificado dos mercados:

$$D_1: q_1 = 16 - 0.2P_1$$

$$D_2: q_2 = 9 - 0.05P_2$$

Dado que su función de costos es: $CT = 30 + 10Q$

- Se pide determinar los precios y cantidades de equilibrio en cada mercado, así como su beneficio total y las elasticidades-precio de las demandas.
- Si el monopolista no pudiera separar los mercados y tuviera que establecer un solo precio, ¿cuál será la nueva cantidad de equilibrio y su beneficio?

Respuesta:

a) **Discriminación de precios:** En equilibrio,

$$IMg_1 = IMg_2 = CMg \quad \text{ó} \quad \sum_h IMg = CMg$$

Se hallan los ingresos marginales,

$$P_1 = 80 - 5q_1$$

$$IT_1 = P_1 q_1$$

$$IT_1 = (80 - 5q_1)q_1$$

$$IT_1 = 80q_1 - 5q_1^2$$

$$\frac{dIT_1}{dq_1} = IMg_1 = 80 - 10q_1$$

$$P_2 = 180 - 20q_2$$

$$IT_2 = P_2 q_2$$

$$IT_2 = (180 - 20q_2)q_2$$

$$IT_2 = 180q_2 - 20q_2^2$$

$$\frac{dIT_2}{dq_2} = IMg_2 = 180 - 40q_2$$

y el costo marginal:

$$CT = 30 + 10Q$$

$$\frac{dCT}{dq} = 10$$

Primer método de resolución:

$$IMg_1 = CMg$$

$$80 - 10q_1 = 10$$

$$q_1 = 7$$

$$IMg_2 = CMg$$

$$180 - 40q_2 = 10$$

$$q_2 = 4.25$$

$$Q = q_1 + q_2 = 11.25$$

Entonces:

$$P_1 = 80 - 5(7)$$

$$P_1 = 45$$

$$P_2 = 180 - 20(4.25)$$

$$P_2 = 95$$

Los beneficios:

$$\pi = IT_1 + IT_2 - CT$$

$$\pi = [(45)(7) + (95)(4.25)] - [30 + 10(11.25)]$$

$$\pi = 718.75 - 142.5$$

$$\pi = 576.25$$

Como los precios son diferentes, las elasticidades también lo serán:

$$IMg_1 = P_1 \left[1 - \frac{1}{|\epsilon_{11}|} \right]$$

$$80 - 10(7) = 45 \left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_{11}|} \right]$$

$$10 = 45 - \frac{45}{|\varepsilon_{11}|}$$

$$|\varepsilon_{11}| = \frac{45}{35} = 1.2857$$

$$IMg_2 = P_2 \left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_{22}|} \right]$$

$$180 - 40(4.25) = 95 \left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_{22}|} \right]$$

$$180 - 170 = 95 - \frac{95}{|\varepsilon_{22}|}$$

$$|\varepsilon_{22}| = \frac{95}{85} = 1.1176$$

La elasticidad es más alta en el primer mercado donde el precio es más bajo.

Segundo método de resolución:

$$\sum_h IMg = CMg$$

La suma horizontal de ingresos marginales:

$$IMg_1 = 80 - 10q_1$$

$$\frac{1}{10} IMg_1 = \frac{80}{10} - \frac{10}{10} q_1$$

$$q_1 = 8 - \frac{1}{10} \text{IMg}_1$$

$$\text{IMg}_2 = 180 - 40q_2$$

$$\frac{1}{40} \text{IMg}_2 = \frac{180}{40} - \frac{40}{40} q_2$$

$$q_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{40} \text{IMg}_2$$

$$Q = q_1 + q_2 = \left[8 - \frac{1}{10} \text{IMg}_1 \right] + \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{40} \text{IMg}_2 \right]$$

$$Q = \frac{25}{2} - \frac{50}{400} \sum_h \text{IMg}$$

$$Q = \frac{25}{2} - \frac{1}{8} \sum_h \text{IMg}$$

$$8Q = 100 - \sum_h \text{IMg}$$

$$\sum_h \text{IMg} = 100 - 8Q$$

Y el costo marginal:

$$\text{CMg} = 10$$

Se igualan:

$$100 - 8Q = 10$$

$$-8Q = -90$$

$$Q = 11.25$$

Reemplazando en la sumatoria horizontal de los ingresos marginales:

$$\sum_h \text{IMg} = 100 - 8(11.25)$$

$$\sum_h IMg = 100 - 90$$

$$\sum_h IMg = 10$$

Como:

$$\sum_h IMg = IMg_1 = IMg_2 = 10$$

Entonces se pueden obtener las cantidades para cada mercado porque:

$$\sum_h IMg = IMg_1 = IMg_2$$

$$80 - 10q_1 = 10$$

$$q_1 = 7$$

$$180 - 40q_2 = 10$$

$$q_2 = 4.25$$

Y los precios:

$$q_1 = 16 - 0.2P_1$$

$$P_1 = 45$$

$$q_2 = 9 - 0.05P_2$$

$$P_2 = 95$$

b) Si los dos mercados no se pueden separar:

$$q_1 = 16 - 0.2P_1$$

$$q_2 = 9 - 0.05P_2$$

Las demandas se suman horizontalmente:

$$Q = q_1 + q_2$$

$$Q = [16 - 0.2P_1] + [9 - 0.05P_2]$$

Como:

$$P_1 = P_2 = P$$

Entonces:

$$Q = 25 - 0.25P$$

$$P = 100 - 4Q$$

El beneficio:

$$\pi = [100 - 4Q]Q - [30 + 10Q]$$

$$\pi = 100Q - 4Q^2 - 30 - 10Q$$

$$\pi = 90Q - 4Q^2 - 30$$

$$\frac{d\pi}{dQ} = 90 - 8Q = 0$$

$$Q = 11.25$$

La cantidad de equilibrio es la misma que ofrecerá el monopolista cuando discrimina entre los mercados.

El precio único de mercado:

$$P = [100 - 4(11.25)]$$

$$P = 55$$



Por lo tanto:

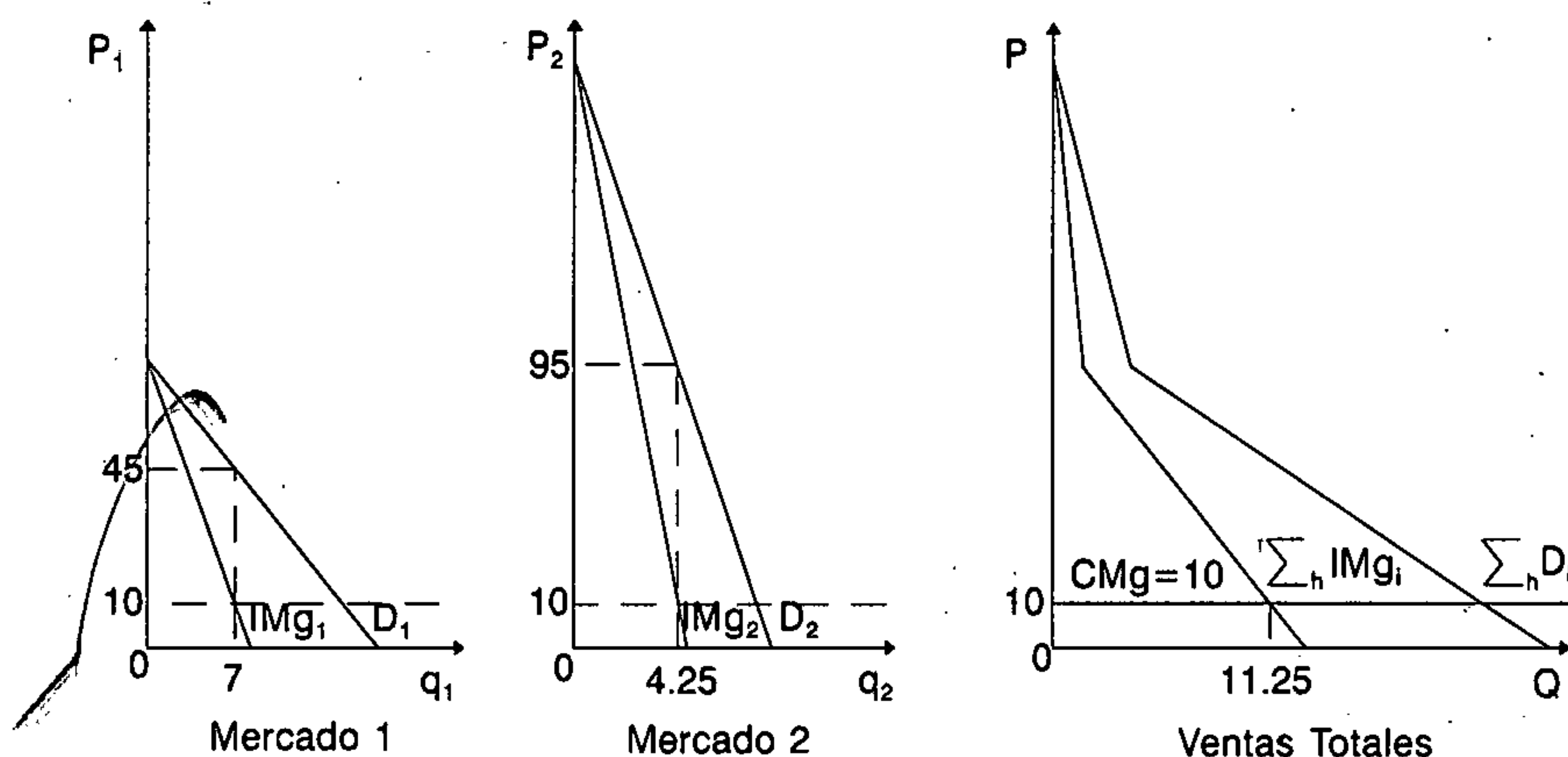
$$\pi = [(55)(11.25)] - [30 + 10(11.25)]$$

$$\pi = 618.75 - 142.5$$

$$\pi = 476.25$$

Sin discriminación de precios el beneficio es menor como se observa en el gráfico N° VI.2.3.

Gráfico N° VI.2.3



4. Un monopolista vende su producto en dos mercados diferentes que logra mantener aislados. Sus funciones de demanda y de costo total son:

$$P_1 = 140 - q_1$$

$$P_2 = 90 - \frac{1}{3}q_2$$

$$CT = \frac{1}{300}Q^3 - \frac{2}{3}Q^2 + 30Q + 1,500$$

Determine:

- Precio y cantidad de equilibrio en cada mercado.
- Las condiciones de segundo orden.
- La elasticidad precio de la demanda en cada mercado.
- La relación existente entre los precios de ambos mercados.

Respuesta:

a) Valores de equilibrio:

$$IT_1 = P_1q_1 = 140q_1 - q_1^2$$

$$\rightarrow IMg_1 = 140 - 2q_1$$

$$IT_2 = P_2q_2 = 90q_2 - \frac{1}{3}q_2^2$$

$$\rightarrow IMg_2 = 90 - \frac{2}{3}q_2$$

Igualando ambos ingresos marginales:

$$140 - 2q_1 = 90 - \frac{2}{3}q_2$$

$$2q_1 = 50 + \frac{2}{3}q_2$$

$$q_1 = 25 + \frac{1}{3}q_2$$

Como:

$$Q = q_1 + q_2$$

$$Q = \left[25 + \frac{1}{3}q_2 \right] + q_2$$

$$Q = 25 + \frac{4}{3}q_2$$

$$q_2 = \frac{3}{4}Q - \frac{75}{4} \quad (4)$$

y,

$$q_1 = Q - q_2$$

$$q_1 = Q - \left[\frac{3}{4}Q - \frac{75}{4} \right]$$

$$q_1 = \frac{75}{4} + \frac{1}{4}Q \quad (2)$$

El costo marginal:

$$CMg = \frac{1}{100}Q^2 - \frac{4}{3}Q + 30$$

Igualando:

$$IMg_1 = CMg$$

$$140 - 2q_1 = \frac{1}{100}Q^2 - \frac{4}{3}Q + 30$$

$$140 - 2\left[\frac{75}{4} + \frac{1}{4}Q\right] = \frac{1}{100}Q^2 - \frac{4}{3}Q + 30$$

$$\frac{1}{100}Q^2 - \frac{5}{6}Q - 72.5 = 0$$

$$Q = \frac{5/6 \pm \sqrt{(-5/6)^2 - 4(1/100)(-72.5)}}{2/100}$$

$$Q = \frac{5/6 \pm \sqrt{3.594}}{1/100}$$

$$Q = 136.4$$

Reemplazando:

$$q_1 = \frac{75}{4} + \frac{1}{4}(136.4)$$

$$q_1 = 52.85$$

y,

$$q_2 = Q - 52.85$$

$$q_2 = 136.4 - 52.85$$

$$q_2 = 83.55$$

Luego:

$$P_1 = 140 - 52.85$$

$$P_1 = 87.15$$

y,

$$P_2 = 90 - \frac{1}{3}(83.55)$$

$$P_2 = 62.15$$

El beneficio:

$$\pi = [(87.15)(52.85) + (62.15)(83.55)] -$$

$$\left[\frac{1}{300}(136.4)^3 - \frac{2}{3}(136.4)^2 + 30(136.4) + 1,500 \right]$$

$$\pi = [4,605.88 + 5,192.63] - [1,647.75]$$

$$\pi = 9,798.51 - 1,647.75$$

$$\pi = 8,150.76$$

b) Condiciones de segundo orden:

$$l_1'' - C'' < 0$$

Donde:

$$l_1'' = -2 \quad y \quad C'' = \frac{1}{50}Q - \frac{4}{3} = \frac{1}{50}(136.4) - \frac{4}{3} = 1.3947$$

Por lo tanto:

$$l_1'' - C'' < 0$$

$$-2 - 1.3947 = -3.3947 < 0$$

El costo marginal crece más rápidamente que el IMg del primer mercado.

$$l_2'' - C'' < 0$$

Donde:

$$I_2'' = -\frac{2}{3} \quad y \quad C'' = \frac{1}{500}Q - \frac{4}{3} = \frac{1}{500}(136.4) - \frac{4}{3} = 1.3947$$

Por lo tanto:

$$I_2'' - C'' < 0$$

$$-\frac{2}{3} - 1.3947 = -2.06 < 0$$

El costo marginal crece más rápidamente que el IMg del segundo mercado, y

$$\begin{vmatrix} -3.395 & -1.395 \\ -1.395 & -2.06 \end{vmatrix} = 5.01 > 0$$

c) Las elasticidades:

$$\varepsilon_{11} = \frac{87.15}{52.85}(-1) = -1.649 \quad \text{ya que} \quad \frac{dq_1}{dP_1} = -1$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{62.15}{83.55}(-3) = -2.231 \quad \text{ya que} \quad \frac{dq_2}{dP_2} = -3$$

d) Relación de precios:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1 - \frac{1}{2.231}}{1 - \frac{1}{1.649}} = 1.4$$

Por lo tanto:

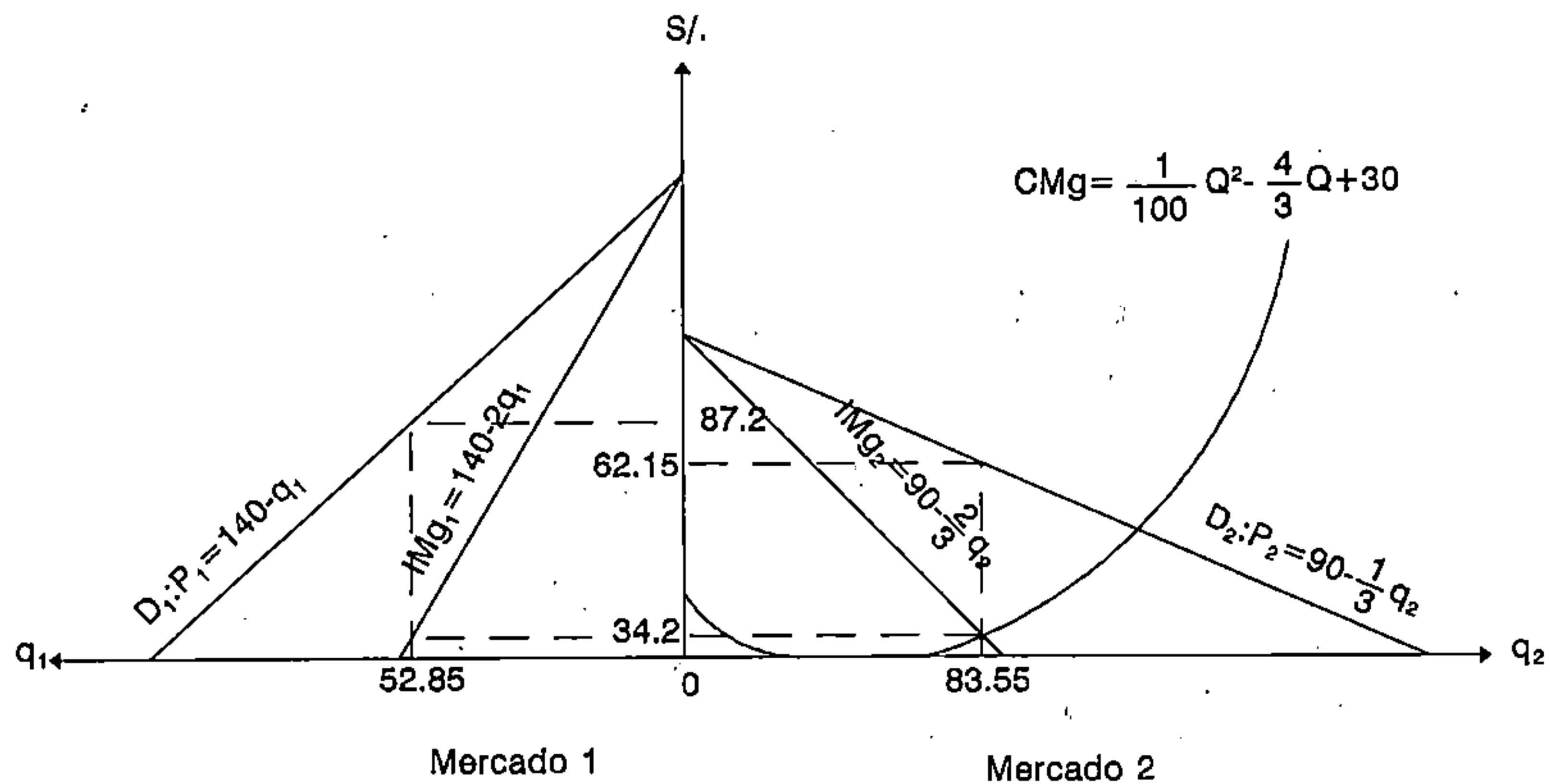
$$P_1 > P_2$$

Porque:

$$\varepsilon_{22} > \varepsilon_{11}$$

El equilibrio se puede observar en el siguiente gráfico:

Gráfico N° VI.2.4



5. Considere ahora que el monopolista del problema anterior abastece dos mercados que mantiene separados, y cuyas demandas son:

$$P_1 = 90 - q_1$$

$$P_2 = 90 - \frac{1}{3}q_2$$

Mientras que su función de costos continúa siendo:

$$CT = \frac{1}{300}Q^3 - \frac{2}{3}Q^2 + 30Q + 1,500$$

¿Cuáles serán los precios y cantidades que maximizan esta vez el beneficio del monopolista en cada mercado?

Respuesta:

Del ingreso marginal de la primera demanda:

$$P_1 = 90 - q_1$$

$$IT_1 = P_1 q_1 = (90 - q_1)q_1$$

$$IT_1 = 90q_1 - q_1^2$$

$$IMg_1 = 90 - 2q_1$$

se despeja la cantidad demandada

$$\frac{1}{2}IMg_1 = 45 - q_1$$

$$-\frac{1}{2}IMg_1 = -45 + q_1$$

$$q_1 = 45 - \frac{1}{2}IMg_1$$

Del ingreso marginal de la segunda demanda:

$$P_2 = 90 - \frac{1}{3}q_2$$

$$IT_2 = P_2 q_2 = \left(90 - \frac{1}{3} q_2 \right) q_2$$

$$IT_2 = 90 q_2 - \frac{1}{3} q_2^2$$

$$IMg_2 = 90 - \frac{2}{3} q_2$$

se despeja la cantidad demandada

$$\frac{3}{2} IMg_2 = \frac{3}{2} 90 - q_2$$

$$-\frac{3}{2} IMg_2 = -\frac{270}{2} + q_2$$

$$q_2 = 135 - \frac{3}{2} IMg_2$$

y se suma horizontalmente para hallar el ingreso marginal total.

$$Q = q_1 + q_2 = 45 + 135 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) \sum_h IMg$$

$$Q = 180 - 2 \sum_h IMg$$

$$-Q = -180 + 2 \sum_h IMg$$

$$\sum_h IMg = 90 - \frac{1}{2} Q$$

El CMg:

$$\frac{dCT}{dq} = CMg = \frac{1}{100}Q^2 - \frac{4}{3}Q + 30$$

se iguala al ingreso marginal total:

$$\frac{1}{100}Q^2 - \frac{4}{3}Q + 30 = 90 - \frac{1}{2}Q$$

$$\frac{1}{100}Q^2 - \frac{5}{6}Q - 60 = 0$$

$$Q = \frac{\frac{5}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{100}\right)(-60)}}{2\left(\frac{1}{100}\right)}$$

$$Q = \frac{\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{240}{100}}}{\frac{1}{50}}$$

$$Q = \frac{\frac{5}{6} \pm \sqrt{3.0944}}{\frac{1}{50}} = \frac{0.8333 + 1.7591}{\frac{1}{50}} = \frac{2.5924}{\frac{1}{50}}$$

$$Q = 129.62$$

Reemplazando en la suma de ingresos marginales:

$$\sum_h IMg = 90 - \frac{1}{2}q$$

$$\sum_h IMg = 90 - \frac{1}{2}(129.62)$$

$$\sum_h IMg = 90 - 64.81$$

$$\sum_h IMg = 25.19$$

Igualando el resultado al ingreso marginal de cada mercado (por la condición de maximización):

$$\sum_h IMg = IMg_1 = IMg_2 = CMg$$

$$\sum_h IMg = IMg_1$$

$$25.19 = 90 - 2q_1$$

$$q_1 = 32.41$$

$$\sum_h IMg = IMg_2$$

$$25.19 = 90 - \frac{2}{3}q_2$$

$$q_2 = 97.22$$

Comprobación:

$$Q = q_1 + q_2 = 32.41 + 97.22$$

$$Q = 129.63$$

Los precios:

$$P_1 = 90 - q_1$$

$$P_1 = 90 - (32.41)$$

$$P_1 = 57.59$$

$$P_2 = 90 - \frac{1}{3}q_2$$

$$P_2 = 90 - \frac{1}{3}(97.22)$$

$$P_2 = 57.59$$

Los precios son iguales. Por lo tanto, el monopolista no obtiene beneficio adicional. Ello se debe a que las elasticidades-precio de las demandas son las mismas en los puntos de equilibrio. Ver gráfico N° VI.2.5.

$$\varepsilon_{11} = -\left(\frac{P_1}{q_1}\right)\left(\frac{dq_1}{dP_1}\right)$$

$$\varepsilon_{11} = -\left(\frac{59.57}{32.41}\right)(1)$$

$$\varepsilon_{11} = -1.777$$

$$\varepsilon_{22} = -\left(\frac{P_2}{q_2}\right)\left(\frac{dq_2}{dP_2}\right)$$

$$\varepsilon_{22} = -\left(\frac{57.59}{97.22}\right)\left(\frac{3}{1}\right)$$

$$\varepsilon_{22} = -1.777$$

El beneficio:

$$\pi = IT - CT$$

$$\pi = [(57.59)(32.41) + (57.59)(97.22)] -$$

$$\left[\frac{1}{300}(129.62)^3 - \frac{2}{3}(129.62)^2 + 30(129.62) + 1,500 \right]$$

$$\pi = 7,465.39 - 1,447.004$$

$$\pi = 6,018.39$$

Condiciones de segundo orden:

$$l_1'' - C'' < 0$$

Donde:

$$l_1'' = -2 \quad y \quad C'' = \frac{1}{50}Q - \frac{4}{3} = \frac{1}{50}(129.62) - \frac{4}{3} = 1.2591$$

Por lo tanto:

$$l_1'' - C'' < 0$$

$$-2 - 1.2591 = -3.2591 < 0$$

Luego:

$$l_2'' - C'' < 0$$

Donde:

$$l_2'' = -\frac{2}{3} \quad y \quad C'' = \frac{1}{50}Q - \frac{4}{3} = \frac{1}{50}(129.6) - \frac{4}{3} = 1.2591$$

Por lo tanto:

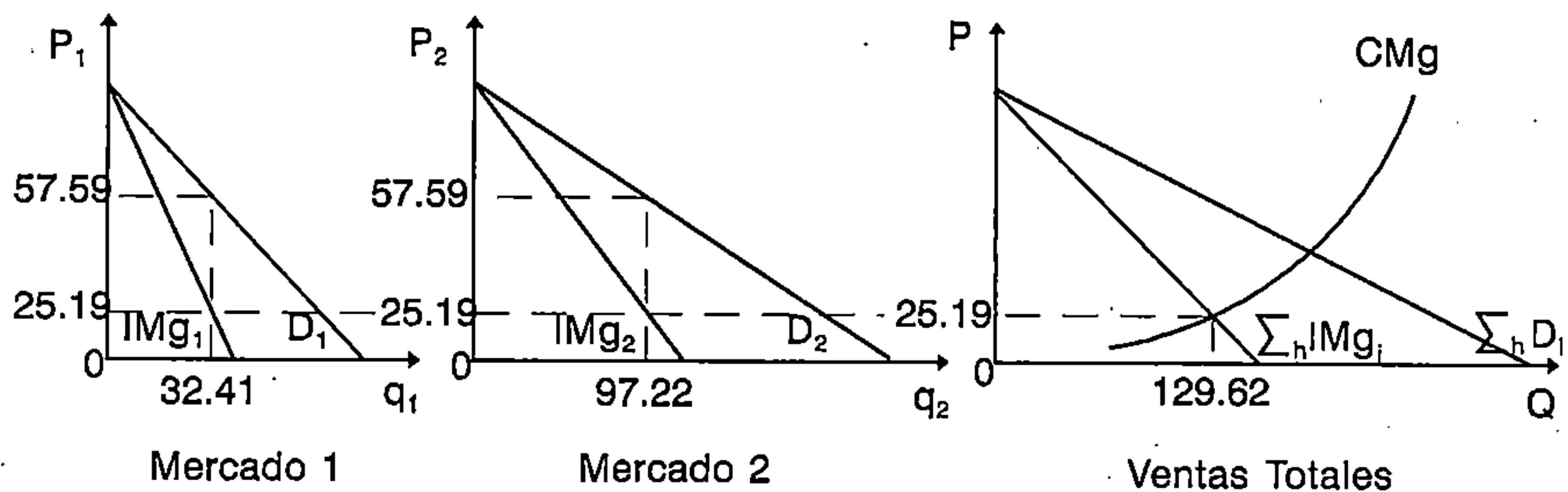
$$l_2'' - C'' < 0$$

$$-\frac{2}{3} - 1.2591 = -1.9258 < 0$$

y

$$\begin{vmatrix} -3.259 & -1.259 \\ -1.259 & -1.925 \end{vmatrix} = 4.688 > 0$$

Gráfico N° VI.2.5



6. En el problema anterior, la autoridad económica decide establecer un precio máximo para $P_2 = 40$. ¿Cómo se modifican los resultados?

Respuesta:

$$IT_2 = P_2 q_2$$

$$IT_2 = (40) q_2$$

$$IMg_2 = 40$$

$$IT_1 = (90 - q_1)q_1$$

$$IT_1 = 90q_1 - q_1^2$$

$$IMg_1 = 90 - 2q_1$$

En equilibrio deben ser iguales:

$$IMg_1 = IMg_2$$

$$90 - 2q_1 = 40$$

$$q_1 = 25$$

También:

$$IMg = CMg$$

$$CMg = 30 - \frac{4}{3}q + \frac{1}{100}q^2$$

$$30 - \frac{4}{3}q + \frac{1}{100}q^2 = 40$$

$$\frac{1}{100}q^2 - \frac{4}{3}q - 10 = 0$$

$$q = \frac{\frac{4}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - (4)\left(\frac{1}{100}\right)(-10)}}{\frac{2}{100}}$$

$$q = \frac{\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{40}{100}}}{\frac{1}{50}}$$

$$q = \frac{1.33 + \sqrt{2.178}}{1/50} = \frac{2.809}{1/50} = 140.45$$

Si: $q_1 = 25$ y $Q = 140.45$, entonces: $q_2 = 115.45$

Los precios serán:

$$P_2 = 40$$

$$P_1 = 90 - q_1$$

$$P_1 = 90 - (25)$$

$$P_1 = 65$$

Los beneficios:

$$\pi = [(65)(25) + 40(115.45)] -$$

$$\left[\frac{1}{300}(140.45)^3 - \frac{2}{3}(140.45)^2 + 30(140.45) + 1,500 \right]$$

$$\pi = 6,243 - 1,797.8$$

$$\pi = 4,445.2$$

Condiciones de segundo orden:

Primera:

$$l_1'' - C'' < 0$$

Donde:

$$l_1'' = -2 \quad y \quad C'' = \frac{1}{50}Q - \frac{4}{3} = \frac{1}{50}(140.45) - \frac{4}{3} = 1.4757$$

Por lo tanto:

$$I_1'' - C'' < 0$$

$$-2 - 1.4757 = -3.4757 < 0$$

Segunda:

$$I_2'' - C'' < 0$$

Donde:

$$I_2'' = 0 \quad y \quad C'' = \frac{1}{50}Q - \frac{4}{3} = \frac{1}{50}(140.45) - \frac{4}{3} = 1.4757$$

Por lo tanto:

$$I_2'' - C'' < 0$$

$$0 - 1.4757 = -1.4757 < 0$$

Tercera:

$$\begin{vmatrix} -3.4757 & -1.4757 \\ -1.4757 & -1.4757 \end{vmatrix} = 2.9514 > 0$$

El establecimiento del precio máximo modifica los valores de equilibrio. Cuando se establece un precio máximo, debe tenerse en cuenta:

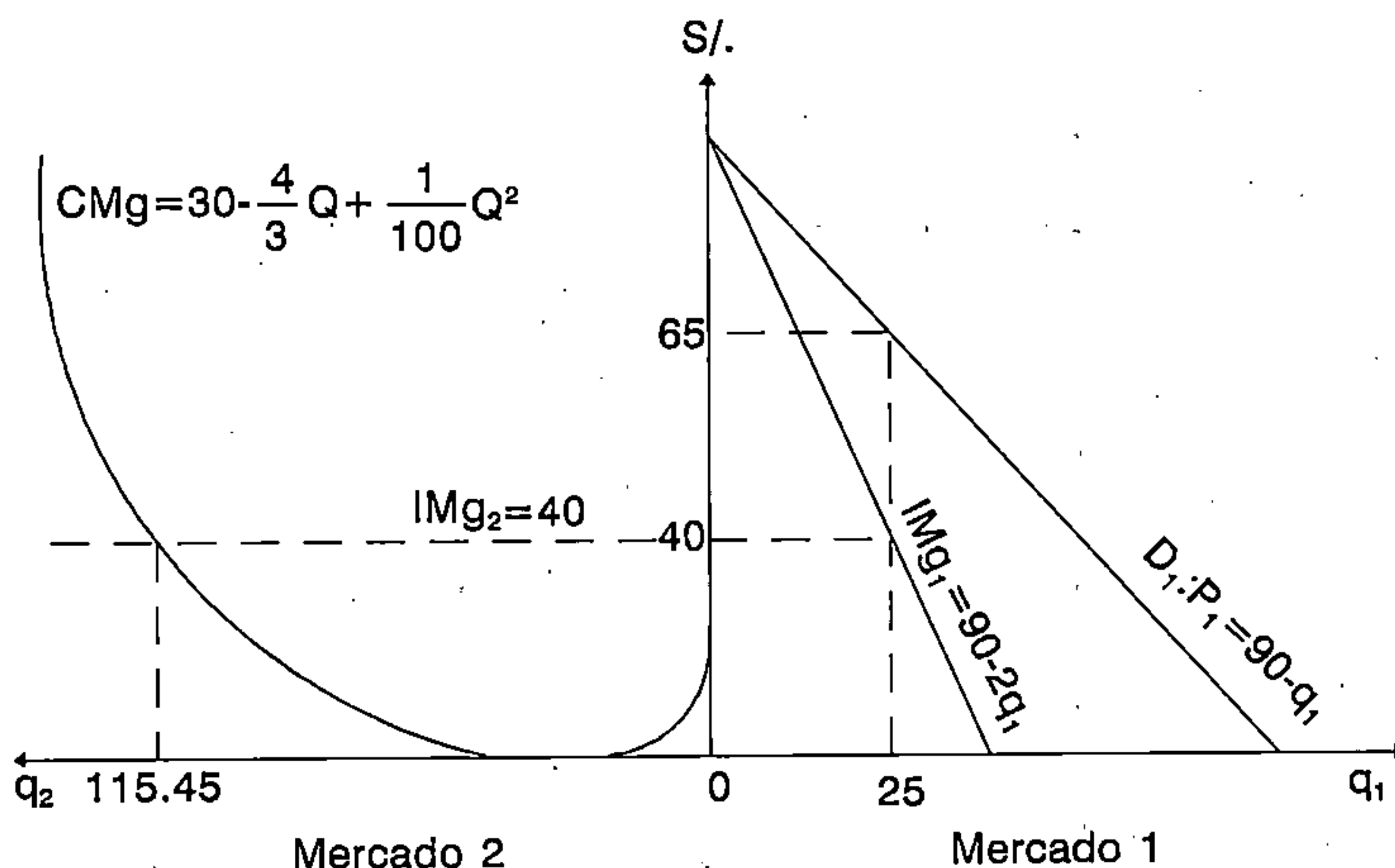
- 1) Si $P_{\text{máx}} \geq$ que el precio fijado por el monopolista, este último no se modifica, ni la cantidad ($\pi = \pi^0$)
- 2) Si el $P_{\text{máx}} <$ que el precio de equilibrio, pero superior al IMg de equilibrio, aumenta la cantidad y se reduce el beneficio (caso anterior: $IMg_2 = 25.2 < 40 < 57.59$)

3) Si $P_{\text{máx}} < \text{al IMg de equilibrio}$, disminuyen la cantidad vendida y el beneficio.

Ahora, si el monopolista vende en dos mercados –caso del problema– lo que suceda en el mercado libre, depende de las anteriores opciones. En el primer caso, no modificará su posición. En el segundo, contraerá la oferta y aumentará el precio en el mercado libre y en el tercero, aumentará la cantidad y reducirá el precio.

	P_1	P_2	q_1	q_2	q	π
Antes	57.59	57.59	32.41	97.22	129.63	6,018.39
Después	65.00	40.00	25.00	115.45	140.45	4,445.20

Gráfico N° VI.2.6



7. Un monopolista abastece al mercado local en forma exclusiva gracias a la existencia de un arancel de importaciones prohibitivo. Por otro lado, también participa en el mercado internacional, colocando su producto al precio internacional que es $P_i^0 = 8$.

Si localmente enfrenta un mercado cuya ecuación de demanda es:

$$P^d = 15 - \frac{3}{4}q$$

y tiene la siguiente ecuación de costos:

$$CT = 0.05q^3 - 0.9q^2 + 8q + 6$$

Se pide determinar:

- a) Las cantidades que ofrecerá en ambos mercados,
- b) Los precios que cobrará y
- c) El beneficio máximo correspondiente

Respuesta:

a) Determinación de las cantidades vendidas

Se trata de un monopolista que tiene la opción de practicar una discriminación de precios de tercer grado, gracias a la protección arancelaria de la que goza. Consecuentemente, a fin de maximizar sus beneficios, deberá igualar el ingreso marginal de ambos mercados con el respectivo costo marginal.

Cálculo del costo marginal:

$$CT = 0.05q^3 - 0.9q^2 + 8q + 6$$

$$CMg \equiv \frac{dCT}{dq} = 0.15q^2 - 1.8q + 8$$

Pero dado que el monopolista es una firma competitiva en el mercado internacional, el precio es el ingreso marginal. Es decir:

$$P_i^0 = IMg_i = CMg$$

$$8 = 0.15q^2 - 1.8q + 8$$

$$0.15q^2 - 1.8q = 0$$

$$q(0.15q - 1.8) = 0$$

De donde:

$$q = 12$$

Por otra parte, en el mercado local el ingreso marginal debe ser el mismo.

$$IT_L = Pq$$

$$IT_L = (15 - 0.75q)(q)$$

$$IT_L = 15q - 0.75q^2$$

$$IMg_L \equiv \frac{dIT_L}{dL} = 15 - 1.5q$$

Por lo tanto:

$$15 - 1.5q = 8$$

$$-1.5q = 7$$

$$q_L = 4.67$$

Por consiguiente, en el mercado internacional el monopolista deberá vender la diferencia respecto del total $q = 12$.

$$q_i = 12 - 4.67$$

$$q_i = 7.33$$

b) Determinación del precio local:

Dada la ecuación de demanda el precio local será:

$$P_L = 15 - 0.75q.$$

$$P_L = 15 - 0.75(4.67)$$

$$P_L \cong 11.50$$

Mientras que el precio internacional es $P_i^0 = 8$.

c) Determinación del beneficio máximo:

El ingreso total:

$$IT = IT_L + IT_i$$

$$IT = (11.5)(4.67) + (8)(7.33)$$

$$IT = 53.705 + 58.64$$

$$IT = 112.345$$

El costo total:

$$CT = 0.05(12)^3 - 0.9(12)^2 + 8(12) + 6$$

$$CT = 0.05(1,728) - 0.9(144) + 96 + 6$$

$$CT = 58.80$$

El beneficio máximo:

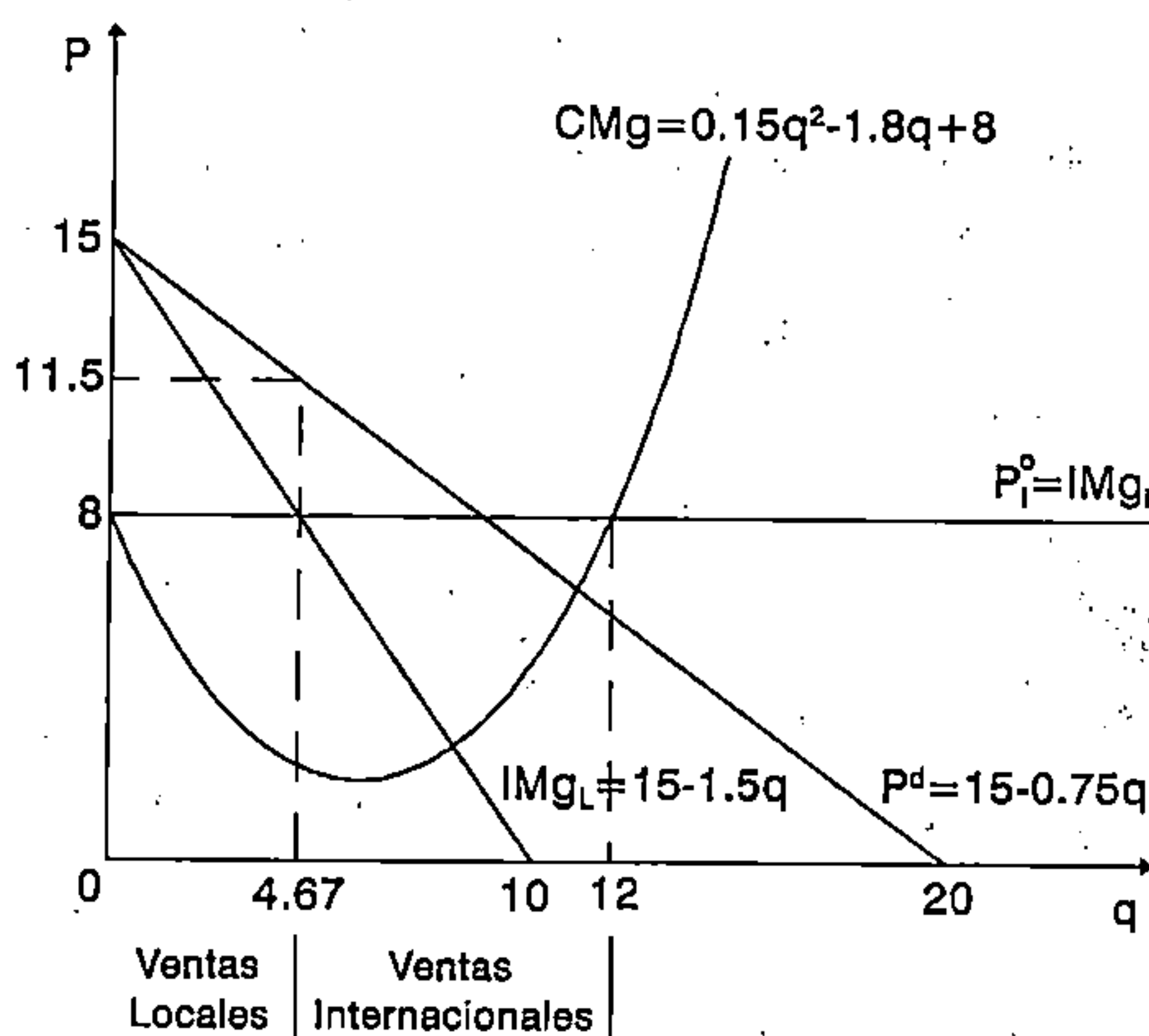
$$\pi = IT - CT$$

$$\pi = (112.345) - (58.80)$$

$$\pi \cong 53.55$$

No existe otra combinación de ventas en el mercado local e internacional que permita al monopolista incrementar sus beneficios, dada la demanda local que confronta su función de costos y el precio internacional del producto. Obviamente, para que la discriminación de precios sea posible, debe existir alguna medida o factor que impida la importación del bien, tal como se ha supuesto en el ejercicio.

Gráfico N° VI.2.7



VI.3 Monopolio discriminador de precios de primer grado (discriminación perfecta)

1. Un monopolista posee la siguiente función de demanda:

$$P = 105 - \frac{3}{8}q$$

Su curva de costos totales:

$$CT = \frac{1}{32}q^3 - \frac{1}{4}q^2 + 100q + 16$$

Si el monopolista en cuestión puede discriminar perfectamente entre sus clientes, ¿cuál será la cantidad vendida, el rango de precios y su utilidad? Comparar la solución con la del monopolio simple.

Respuesta:

Como es monopolista perfectamente discriminador incrementará la producción hasta el nivel de competencia perfecta, ya que la curva de demanda se convierte en una suerte de curva de IMg' .

El CMg :

$$CMg = \frac{dCT}{dq} = \frac{3}{32}q^2 - \frac{1}{2}q + 100$$

En equilibrio:

$$P = CMg$$

$$105 - \frac{3}{8}q = \frac{3}{32}q^2 - \frac{1}{2}q + 100$$

$$\frac{3}{32}q^2 - \frac{1}{8}q - 5 = 0$$

$$q = \frac{\frac{1}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{32}\right)(-5)}}{2\left(\frac{3}{32}\right)}$$

$$q = \frac{\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{60}{32}}}{\frac{3}{16}}$$

$$q = \frac{\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{121}{64}}}{0.1875} = \frac{0.125 + 1.375}{0.1875} = \frac{1.5}{0.1875}$$

$$q = 8$$

$$P = 105 - \frac{3}{8}(8)$$

$$P = 102$$

Venderá hasta 8 unidades que es la solución de competencia. Los precios variarán desde 105, cuando $q = 0$, hasta 102, cuando $q = 8$.

El ingreso monopolista en total será:

q	P
0	105.000
1	104.625
2	104.250
3	103.875
4	103.500
5	103.125
6	102.750
7	102.375
8	102.000
ΣIT	826.500

El CMg ($q = 8$)

$$CMg = \frac{3}{32}(8)^2 - \frac{1}{2}(8) + 100$$

$$CMg = 102$$

Por lo tanto:

$$P = CMg \text{ en } q = 8$$

El IT se puede aproximar por medio de la siguiente fórmula:

$$s = \frac{ar^0 - ar^n}{1 - r}$$

$$s = \frac{104.625(1) - 104.625(0.9964)^8}{1 - 0.9964}$$

$$s = 826.54$$

El beneficio del monopolista discriminador perfecto será:

$$\pi = IT - CT$$

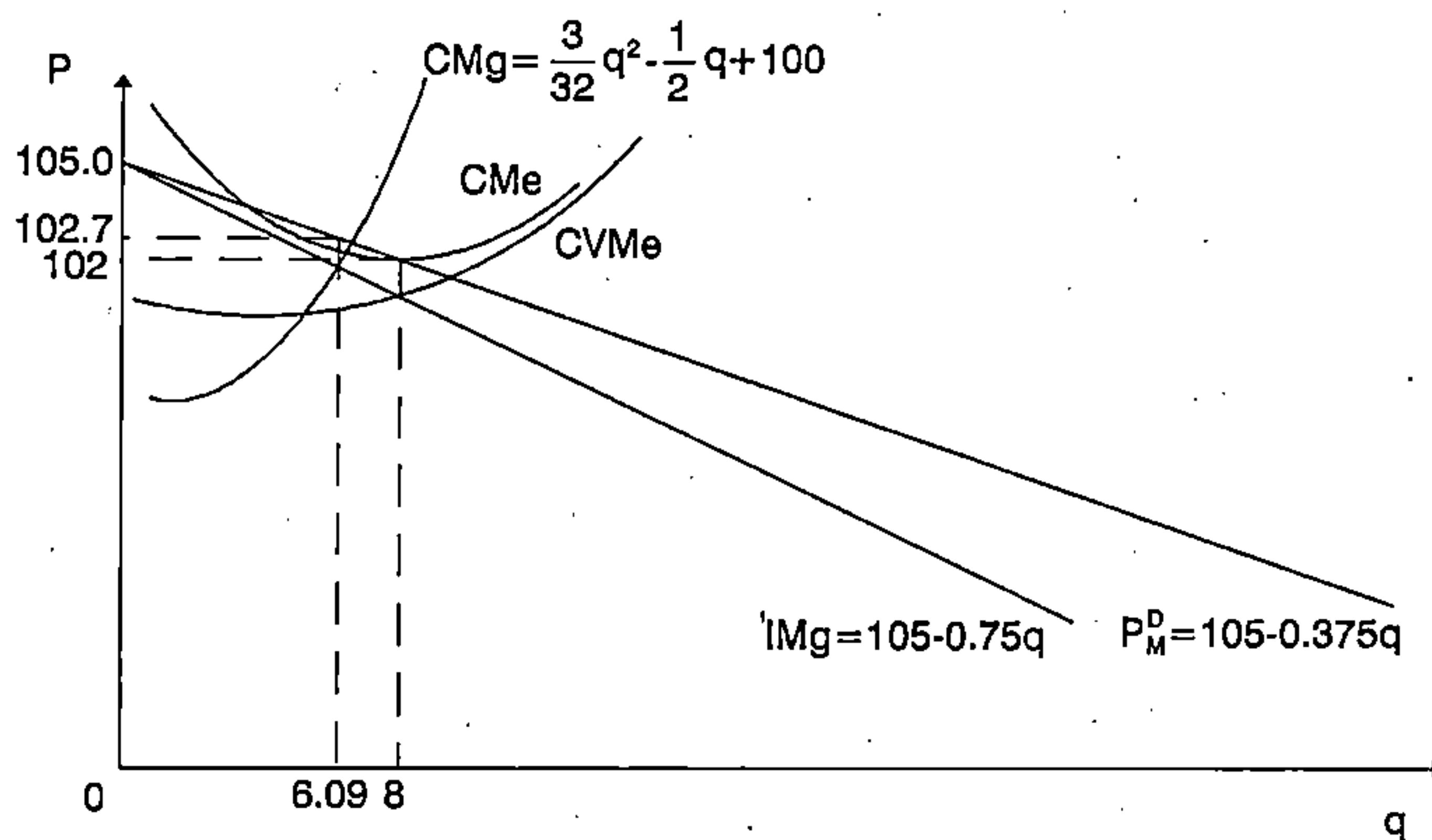
$$\pi = 826.500 - \left[\frac{1}{32}(8)^3 - \frac{1}{4}(8)^2 + 100(8) + 16 \right]$$

$$\pi = 826.50 - 816.00$$

$$\pi = 10.50$$



Gráfico N° VI.3.1



Resumen:

	Monopolio simple	Discriminación perfecta
P	102.72	104.625 – 102.000
q	6.09	8.0
IT	625.56	826.5
π	2.756	10.5
CT	622.79	816.0

El monopolista perfectamente discriminador vende una cantidad que corresponde a la de competencia, pero con la diferencia que se apropia del excedente del consumidor.

Otra solución:

$IT = \int_0^q P dq$, porque vende cada unidad de q al máximo precio que el consumidor está dispuesto a pagar.

$$\pi = \int_0^q P dq - CT$$

$$\pi = \int_0^q \left(105 - \frac{3}{8}q \right) dq - \left[\frac{1}{32}q^3 - \frac{1}{4}q^2 + 100q + 16 \right]$$

$$\frac{d\pi}{dq} = 105 - \frac{3}{8}q - \frac{3}{32}q^2 + \frac{1}{2}q + 100 = 0$$

$$-\frac{3}{32}q^2 + \frac{1}{8}q + 5 = 0$$

$$\frac{3}{32}q^2 - \frac{1}{8}q - 5 = 0$$

$$q = 8$$

Por ello el beneficio será:

$$\pi = \left[\int_0^8 \left(105 - \frac{3}{8}q \right) dq \right] - \left[\frac{1}{32}q^3 - \frac{1}{4}q^2 + 100q + 16 \right]$$

$$\pi = \left[105q - \frac{3}{16}q^2 \right]_0^8 - \left[\frac{1}{32}(8)^3 - \frac{1}{4}(8)^2 + 100(8) + 16 \right]$$

$$\pi = [840 - 12] - [16 - 16 + 800 + 16]$$

$$\pi = 828 - 816$$

$$\pi = 12$$

La discrepancia en el resultado se debe a las diferencias en la magnitud de los ingresos totales determinados según ambos métodos. El primero por ser un método de cálculo discreto no considera la extracción total del excedente del consumidor.

2. Un monopolista confronta dos mercados que puede mantener separados:

$$P_1 = 151 - q_1$$

$$P_2 = 120 - q_2$$

Su función de costos totales es: $CT = 100 + 8q + q^2$

Se pide determinar:

a) La solución de equilibrio inicial si practica una discriminación de precios de tercer grado.

b) La solución cuando discrimina en primer grado en el primer mercado.

Respuesta:

a) Solución inicial: discriminación de precios de tercer grado.

$$IT_1 = P_1 q_1 = (151 - q_1) q_1 = 151q_1 - q_1^2$$

$$IMg_1 = \frac{dIT_1}{dq_1} = 151 - 2q_1$$

$$IT_2 = P_2 q_2 = (120 - q_2) q_2 = 120q_2 - q_2^2$$

$$IMg_2 = \frac{dIT_2}{dq_2} = 120 - 2q_2$$

Igualando:

$$IMg_1 = IMg_2$$

$$151 - q_1 = 120 - q_2$$

$$2q_1 = 31 + 2q_2$$

$$q_1 = \frac{31}{2} + q_2$$

$$q_2 = -\frac{31}{2} + q_1$$

Como $q = q_1 + q_2$:

$$q = \left[\frac{31}{2} + q_2 \right] + q_2$$

$$q = \frac{31}{2} + 2q_2$$

Igualando IMg_2 y CMg :

$$IMg_2 = CMg:$$

$$120 - 2q_2 = 8 + 2q$$

$$120 - 2q_2 = 8 + 2\left[\frac{31}{2} + 2q_2\right]$$

$$6q_2 = 81$$

$$q_2 = 13.5$$

Reemplazando dicho valor en q se obtiene la cantidad total vendida, luego la cantidad en el primer mercado, los precios y el beneficio:

$$q = 42.5$$

$$q_1 = 29$$

$$q_2 = 13.5$$

$$P_1 = 122$$

$$P_2 = 106.5$$

$$\pi = 2,729.5$$

Otro método de resolución:

A partir de los ingresos marginales de cada mercado, se realiza una sumatoria horizontal.

$$IMg_1 = 151 - 2q_1$$

$$IMg_2 = 120 - 2q_2$$

$$\frac{1}{2}IMg_1 - \frac{151}{2} = -\frac{2}{2}q_1$$

$$\frac{1}{2}IMg_2 - \frac{120}{2} = -\frac{2}{2}q_2$$

$$\sum_h IMg_i - \frac{271}{2} = -q$$

$$\sum_h IMg_i = \frac{271}{2} - q$$

Suma horizontal de los ingresos marginales

Igualando al CMg:

$$\sum_h IMg_i = CMg$$

$$\frac{271}{2} - q = 8 + 2q$$

$$135.5 - 8 = 3q$$

$$q = 42.5$$

Como:

$$IMg_1 = IMg_2 \text{ y } q_1 = f(q_2)$$

Sustituyendo en Q total:

$$q = q_1 + q_2$$

$$q = \frac{31}{2} + 2q_2$$

$$42.5 - \frac{31}{2} = 2q_2$$

$$27 = 2q_2$$

$$q_2 = 13.5 \quad \text{y} \quad q_1 = 29$$

Luego se obtiene los demás valores para los precios y beneficios.

b) Discriminación de primer grado en el primer mercado:

$$\pi = \left[\int_0^{q_1} P_1 dq_1 + IT_2 \right] - CT$$

$$\pi = \left[\int_0^{q_1} P_1 dq_1 + P_2 q_2 \right] - [100 + 8q + q^2]$$

$$\pi = \left[\int_0^{q_1} (151 - q_1) dq_1 + (120 - q_2) q_2 \right] - [100 + 8q + q^2]$$

Como $q = q_1 + q_2$

$$\pi = \left[\int_0^{q_1} (151 - q_1) dq_1 + (120 - q_2) q_2 \right] - [100 + 8q_1 + 8q_2 + q_1^2 + 2q_1 q_2 + q_2^2]$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 151 - q_1 - 8 - 2q_1 - 2q_2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 120 - 2q_2 - 8 - 2q_1 - 2q_2 = 0$$

$$143 = 3q_1 + 2q_2$$

$$112 = 2q_1 + 4q_2$$

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución es:

$$q_1 = 43.5 \quad \text{y} \quad q_2 = 6.25$$

Por lo tanto: $q = 49.75$

Los precios:

$$P_1 = 151, \dots, 107.5$$

$$P_2 = 113.75$$

El beneficio:

$$\pi = 3,360.26$$

Otra solución:

Como discrimina perfectamente en el mercado 1:

$$P_1 = CMg$$

$$151 - q_1 = 8 + 2Q$$

En el mercado 2:

$$IMg_2 = CMg$$

$$120 - 2q_2 = 8 + 2q$$

Pero: $q = q_1 + q_2$

Así:

$$151 - q_1 = 8 + 2q_1 + 2q_2$$

$$120 - 2q_2 = 8 + 2q_1 + 2q_2$$

$$143 = 3q_1 + 2q_2$$

$$112 = 2q_1 + 4q_2$$

de donde se obtienen los valores buscados de cantidades, precios y beneficios.
Luego en el primer mercado donde discrimina perfectamente:

$$P_1 = 151 - q_1$$

Desde $q_1 = 0$ hasta $q_1 = 43.5$

Cobrando desde $P_1 = 151$ hasta $P_1 = 107.5$

Cálculo del IT:

$$IT_2 = P_2 q_2$$

$$P_2 = 120 - (6.25)$$

$$IT_2 = P_2 q_2 = (113.75)(6.25)$$

$$IT_2 = 710.9375$$

$$IT_1 = \int_0^{43.5} (151 - q_1) dq_1$$

$$IT_1 = 151q_1 - \frac{1}{2}q_1^2$$

$$IT_1 = 151(43.5) - \frac{1}{2}(43.5)^2$$

$$IT_1 = 6,568.5 - 946.125$$

$$IT_1 = 5,622.375$$

Cálculo del CT:

$$CT = 100 + 8Q + Q^2$$

$$CT = 100 + 8(49.75) + (49.75)^2$$

$$CT = 100 + 398 + 2,475.0625$$

$$CT = 2,973.0625$$

El beneficio es:

$$IT = 6,333.3125$$

$$\underline{CT = 2,973.0625}$$

$$\pi = 3,360.25$$

$P_1 = 151 - q_1$ que es la curva de IMe_1 original, se transforma en curva de IMg_1 y se tiene que las condiciones de equilibrio no han variado.

$$IMe_1 = IMg_1 = CMg$$

$$IMg_2 = CMg$$

Cuadro resumen:

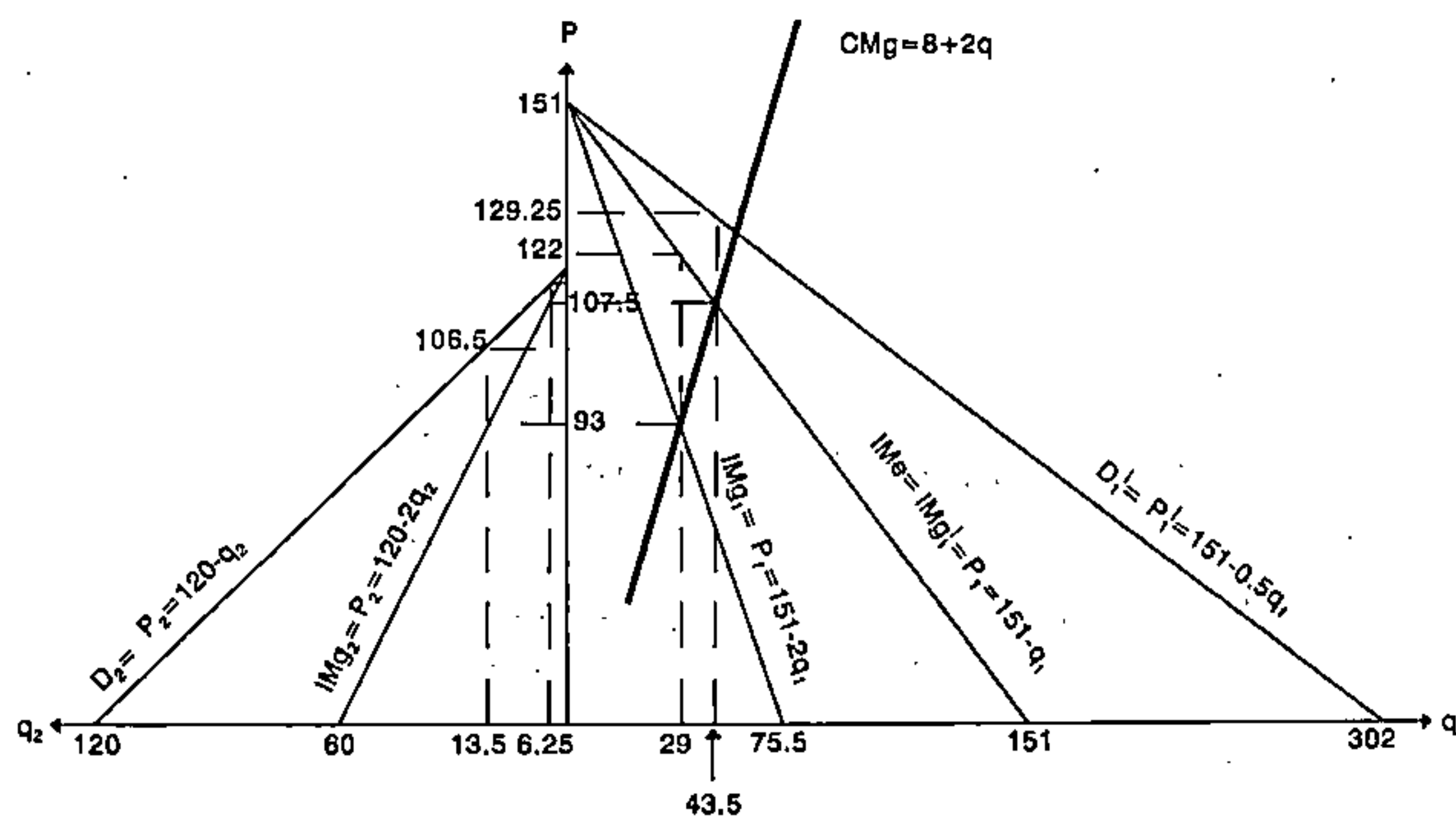
	Monopolio discriminador de 3er. grado	Perfecta discrimi- nación en mercado 1 y de 3er. grado en mercado 2
Q	42.5	49.75
q_1	29.0	43.50
P_1	122.0	151 – 107.5
q_2	13.5	6.25
P_2	106.5	113.75
π	2,729.5	3,360.25

Como resultado de la discriminación de primer grado y tercer grado, se tiene:

1. Aumento de Q y π .
2. Aumento de q_1 pero reducción de q_2 porque al subir Q el CMg ha crecido.
3. El precio en el mercado 1 desciende de 151 a 107.5 conforme se vende cada unidad de Q.
4. El precio en el mercado 2 sube porque se reduce q_2 .

Ver el siguiente gráfico:

Gráfico N° VI.3.2



VI.4 Monopolista con plantas múltiples

1. Un monopolista produce el mismo producto en dos fábricas. La función de demanda es:

$$P = 120 - 4q$$

y las funciones de costo respectivas:

$$C_1 = 2q_1^2 + 16q_1 + 18$$

$$C_2 = q_2^2 + 32q_2 + 70$$

Determine su beneficio máximo y las producciones de cada planta.

Respuesta:

Función de demanda:

$$P = [120 - 4(q_1 + q_2)]$$

Ingreso total:

$$IT = Pq = [120 - 4(q_1 + q_2)][q_1 + q_2]$$

$$IT = 120q_1 - 4q_1^2 - 4q_2q_1 + 120q_2 - 4q_1q_2 - 4q_2^2$$

El costo total:

$$CT = C_1 + C_2$$

$$CT = 2q_1^2 + 16q_1 + 18 + q_2^2 + 32q_2 + 70$$

Función de beneficios:

$$\pi = IT - CT$$

$$\pi = [120q_1 - 4q_1^2 - 8q_2q_1 + 120q_2 - 4q_2^2] - [2q_1^2 + 16q_1 + 18 + q_2^2 + 32q_2 + 70]$$

$$\pi = 104q_1 - 6q_1^2 - 8q_2q_1 + 88q_2 - 5q_2^2 - 88$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 104 - 12q_1 - 8q_2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = -8q_1 + 88 - 10q_2 = 0$$

$$12q_1 + 8q_2 = 104$$

$$8q_1 + 10q_2 = 88$$

La segunda ecuación: $q_1 = \frac{88 - 10q_2}{8}$ se reemplaza en la primera.

$$12 \left[\frac{88 - 10q_2}{8} \right] + 8q_2 = 104$$

$$\frac{264 - 30q_2}{2} + 8q_2 = 104$$

$$132 - 15q_2 + 8q_2 = 104$$

$$-7q_2 = -28$$

$$q_2 = 4$$

$$q_1 = \frac{88 - 10(4)}{8}$$

$$q_1 = 11 - 5$$

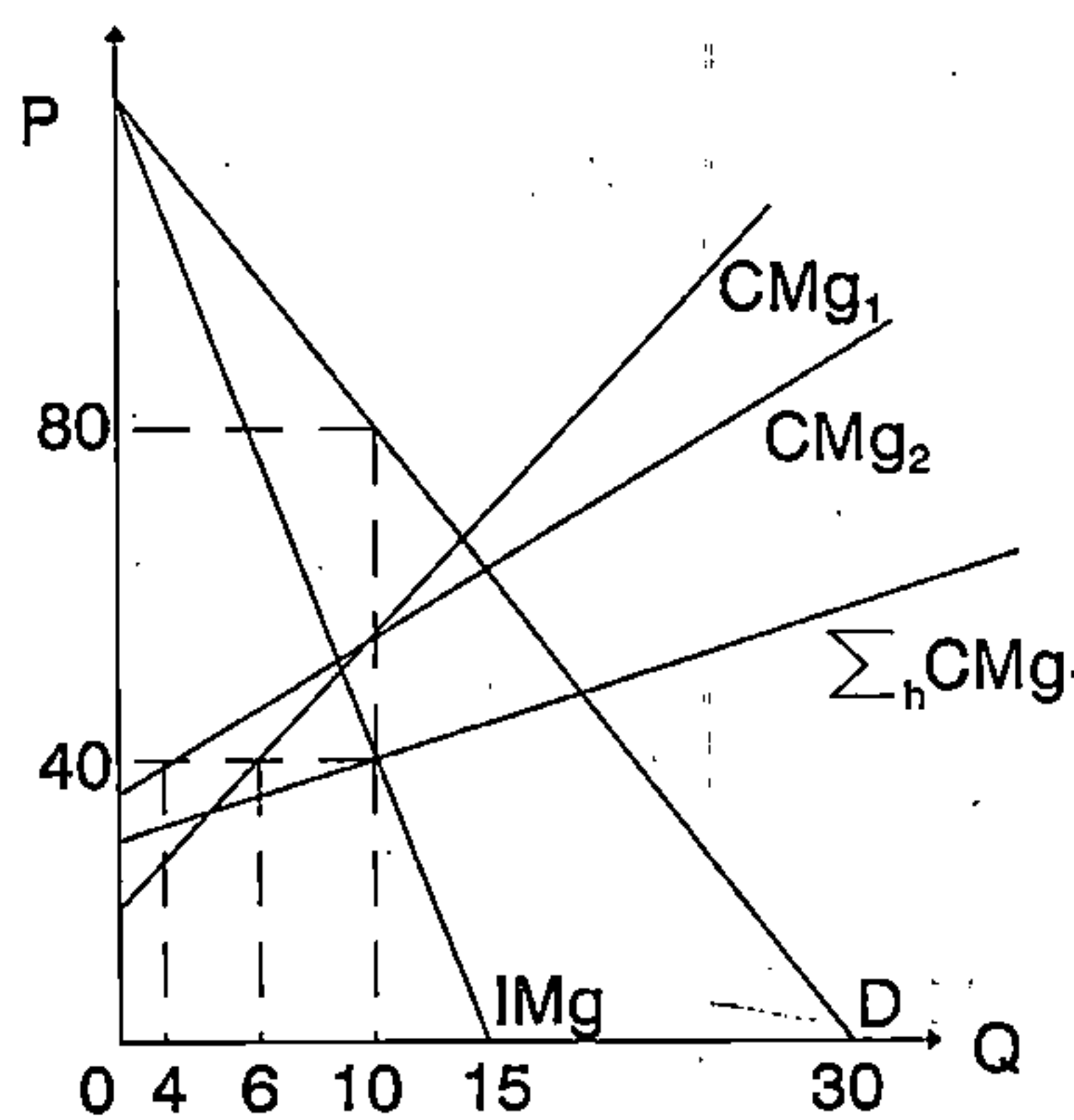
$$q_1 = 6$$

$$q = q_1 + q_2 = 10$$

Por lo tanto, reemplazando en la función de beneficio, se tiene:

$$\pi = 400$$

Gráfico N° VI.4.1



Otra forma de resolver el problema:

$$IMg = \sum_h CMg$$

Derivando el CMg del monopolio:

$$C_1 = 2q_1^2 + 16q_1 + 18$$

$$C_2 = q_2^2 + 32q_2 + 70$$

$$CMg_1 = 4q_1 + 16$$

$$CMg_2 = 2q_2 + 32$$

$$q_1 = 0.25CMg_1 - 4$$

$$q_2 = 0.50CMg_2 - 16$$

Como $q = q_1 + q_2$:

$$q = 0.75 \sum_h CMg - 20$$

$$\sum_h CMg = \frac{1}{0.75}q + \frac{20}{0.75}$$

Y el IMg:

$$IT = Pq$$

$$IT = (120 - 4q)q$$

$$IT = 120q - 4q^2$$

$$IMg = 120 - 8q$$

Igualando:

$$120 - 8q = \frac{1}{0.75}q + \frac{20}{0.75}$$

$$8q + \frac{1}{0.75}q = -\frac{20}{0.75} + 120$$

$$\frac{7}{0.75}q = \frac{70}{0.75}$$

$$q = 10$$

Reemplazando dicho valor en la $\sum_h CMg$:

$$\sum_h CMg = \frac{1}{0.75}(10) + \frac{20}{0.75}$$

$$\sum_h CMg = 40$$

El monopolista debe igualar el CMg de la planta con el costo marginal global ($\sum_h CMg$).

$$\sum_h CMg = CMg_1$$

$$40 = 4q_1 + 16$$

$$q_1 = 16$$

$$\sum_h CMg = CMg_2$$

$$40 = 2q_2 + 32$$

$$q_2 = 4$$

2. Un monopolista abastece dos mercados con dos plantas. Las curvas de demanda de los mercados son:

$$P_1 = \frac{280}{3} - \frac{20}{3}q_1$$

$$P_2 = 160 - 10q_2$$

Las plantas tienen las siguientes funciones de costos:

$$C_1 = 2q_1^2 + 16q_1 + 18$$

$$C_2 = q_2^2 + 32q_2 + 70$$

Se pide determinar la cantidad total vendida, la asignación por mercados y por plantas.

Respuesta:

Para determinar la cantidad total hay que hallar la $\sum_h \text{IMg}$ o ingreso marginal global

$$IT_1 = \frac{280}{3}q_1 - \frac{20}{3}q_1^2$$

$$\text{IMg}_1 = \frac{280}{3} - \frac{40}{3}q_1$$

$$IT_2 = 160q_2 - 10q_2^2$$

$$\text{IMg}_2 = 160 - 20q_2$$

$$q_1 = -\frac{3}{40}\text{IMg}_1 + 7$$

$$q_2 = -\frac{1}{20}IMg_2 + 8$$

$$q = -\frac{5}{40}\sum_h IMg + 15$$

$$\sum_h IMg = \frac{(15)(40)}{5} - 8q$$

$$\sum_h IMg = 120 - 8q$$

El CMg:

$$CMg_1 = 4q_1 + 16$$

$$CMg_2 = 2q_2 + 32$$

$$0.25CMg_1 = q_1 + 4$$

$$0.50CMg_2 = q_2 + 16$$

$$q_1 = -4 + 0.25CMg_1$$

$$q_2 = -16 + 0.50CMg_2$$

$$q = -20 + 0.75\sum_h CMg$$

$$\sum_h CMg = \frac{4}{3}q + \frac{80}{3}$$

En equilibrio:

$$\sum_h CMg = \sum_h IMg$$

$$120 - 8q = \frac{4}{3}q + \frac{80}{3}$$

$$-8q - \frac{4}{3}q = \frac{80}{3} - 120$$

$$-\frac{28}{3}q = -\frac{280}{3}$$

$$q = 10$$

Y por lo tanto:

$$\sum_h CMg = \sum_h IMg = 40$$

Los ingresos marginales en todos los mercados deben ser 40, así como los costos marginales en todas las plantas:

Luego, para definir las unidades vendidas en el primer mercado

$$IMg_1 = \sum_h IMg$$

$$\frac{280}{3} - \frac{40}{3}q_1 = 40$$

$$-\frac{40}{3}q_1 = 40 - \frac{280}{3}$$

$$\frac{40}{3}q_1 = \frac{280}{3} - \frac{120}{3}$$

$$q_1 = \left(\frac{160}{3}\right)\left(\frac{3}{40}\right)$$

$$q_1 = 4$$

$$IMg_2 = \sum_h IMg$$

$$160 - 20q_2 = 40$$

$$20q_2 = 120$$

$$q_2 = 6$$

Pero, la producción, ¿en qué plantas se llevará a cabo? Para determinar la producción de la primera planta:

$$\sum_h CMg = CMg_1$$

$$40 = 4q_1 + 16$$

$$40 - 16 = 4q_1$$

$$24 = 4q_1$$

$$q_1 = 6$$

De igual manera, en el caso de la segunda planta:

$$\sum_h CMg = CMg_2$$

$$40 = 2q_2 + 32$$

$$2q_2 = 40 - 32$$

$$q_2 = \frac{8}{2}$$

$$q_2 = 4$$

La planta 1 produce 6 unidades y la planta 2 produce 4 unidades.

Los precios a cobrarse en cada mercado se obtienen reemplazando las cantidades respectivas en las funciones de demanda.

$$P_1 = \frac{280}{3} - \frac{20}{3}q_1$$

$$P_1 = \frac{280}{3} - \frac{20}{3}(4)$$

$$P_1 = \frac{280}{3} - \frac{80}{3}$$

$$P_1 = \frac{200}{3}$$

$$P_1 = 66.67$$

$$P_2 = 160 - 10q_2$$

$$P_2 = 160 - 10(6)$$

$$P_2 = 160 - 60$$

$$P_2 = 100$$

Los ingresos totales:

$$IT_1 = (66.67)(4) = 266.68$$

$$IT_2 = (100)(6) = 600$$

$$IT = 866.68$$

Los costos totales:

$$C_1 = 2q_1^2 + 16q_1 + 18$$

$$C_1 = 2(6)^2 + 16(6) + 18$$

$$C_1 = 186$$

$$C_2 = 2q_2^2 + 32q_2 + 70$$

$$C_2 = 2(4)^2 + 32(4) + 70$$

$$C_2 = 230$$

$$CT = 416$$

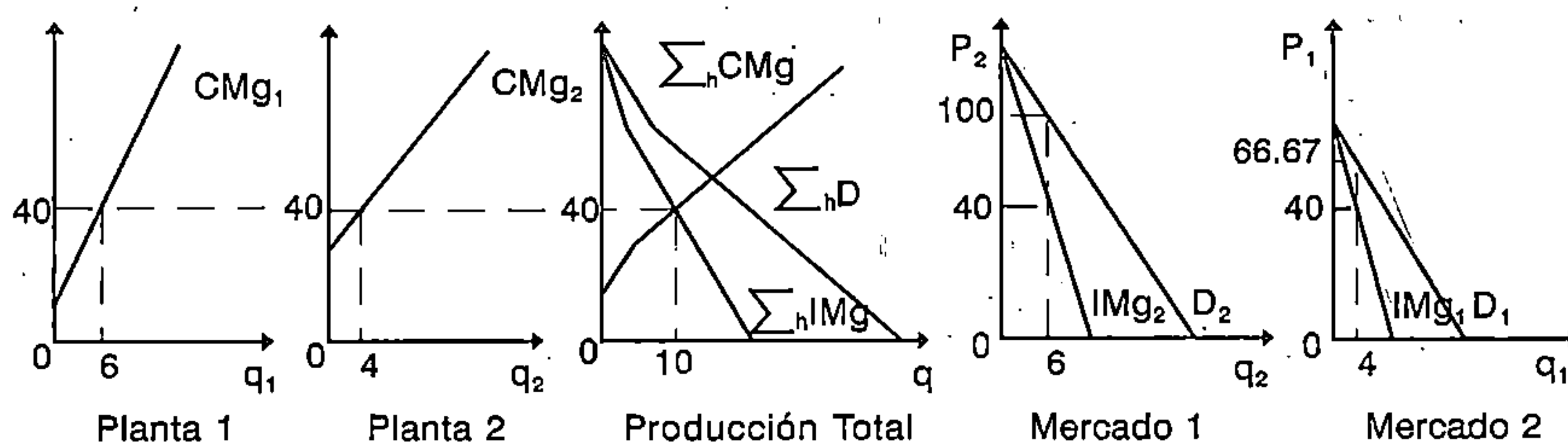
Por lo tanto, los beneficios serán:

$$\pi = 866.68 - 416$$

$$\pi = 450.68$$

La planta 2 es relativamente más ineficiente en el rango de las cantidades de solución. Por ello sólo produce 4 unidades.

Gráfico N° VI.4.2



VI.5 Monopolista que maximiza su ingreso

1. Dadas las siguientes funciones:

$$P = 100 - 4q$$

$$CT = 50 + 20q$$

- a) Determinar P y q que maximizan el ingreso total de un monopolista que debe alcanzar por lo menos un $\pi = 334$.
- b) ¿Cómo se alteran los resultados si se busca el beneficio máximo?

Respuesta:

Construimos la función de Lagrange:

$$L = IT + \lambda[\pi^0 = 0]$$

$$L = [(100 - 4q)(q)] + \lambda[(100 - 4q)(q) - (50 + 20q) - 334]$$

$$L = [100q - 4q^2] + \lambda[100q - 4q^2 - 50 - 20q - 334]$$

$$L = [100q - 4q^2] + \lambda[80q - 4q^2 - 384]$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 100 - 8q + \lambda 80 - \lambda 8q = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 80q - 4q^2 - 384 = 0$$

$$4q^2 - 80q - 384 = 0$$

$$q^2 - 20q + 96 = 0$$

$$q = \frac{20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4(1)(96)}}{2(1)}$$

$$q = 8 \quad \rightarrow \quad IT = 554$$

$$q = 12 \quad \rightarrow \quad IT = 624$$

Entonces:

$$P = 100 - 4(12)$$

$$P = 52 \quad y \quad \pi^0 = 334$$

$$IMg = 100 - 8q$$

$$IMg = 100 - 8(12) = 5$$

Mientras el CMg:

$$CMg = 20 > IMg$$

En este nivel de π y de ventas (q), el IMg es inferior al CMg, por lo que el monopolista incurre en pérdidas marginales.

b) Si se busca el beneficio máximo:

$$\pi = [(100 - 4q)(q)] - [50 + 20q]$$

$$\pi = 100q - 4q^2 - 50 - 20q$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = 100 - 8q - 20 = 0$$

$$q = 10$$

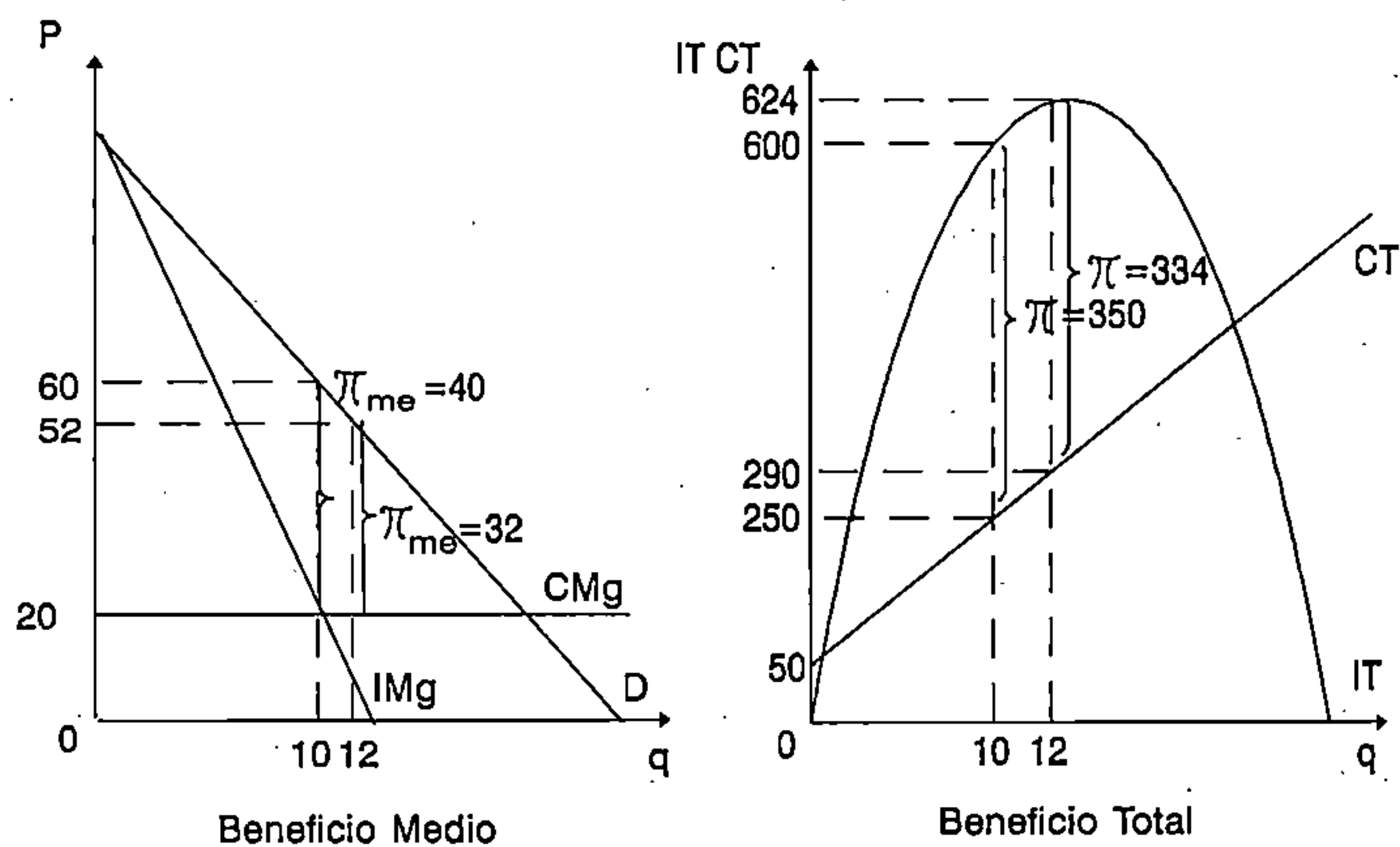
$$P = 60$$

$$IT = 600$$

$$\pi = 350$$

Los resultados se pueden observar en el siguiente gráfico.

Gráfico N° VI.5.1



VI.6 Regulación del monopolio

1. Un monopolista enfrenta una curva de demanda lineal

$$P = 80 - 3q$$

Y su curva de costos: $CT = 40 + 15q$

- a) Determinar la solución que maximiza la utilidad.
- b) Considerar la imposición de un tributo de S/. 8 por unidad producida.

Respuesta:

- a) **Solución inicial:**

$$P = 80 - 3q$$

$$IT = Pq = 80q - 3q^2$$

$$IMg = 80 - 6q$$

$$CT = 40 + 15q$$

$$CMg = 15$$

En equilibrio:

$$IMg = CMg$$

$$80 - 6q = 15$$

$$-6q = -65$$

$$q = \frac{65}{6} = 10.8\bar{3}$$

$$P = 80 - 3\left(\frac{65}{6}\right)$$

$$P = 80 - \frac{65}{2}$$

$$P = 47.5$$

El beneficio:

$$\pi = Pq - CT$$

$$\pi = [(47.5)(10.83)] - [40 + 15(10.83)]$$

$$\pi = 514.425 - 202.45$$

$$\pi = 311.975$$

b) Aplicación del impuesto:

$$\pi = [Pq] - [CT + xq]$$

$$\pi = [80q - 3q^2] - [40 + 15q + 8q]$$

$$\pi = 80q - 3q^2 - 40 - 23q$$

$$\pi = 57q - 3q^2 - 40$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = 57 - 6q = 0$$

$$q = \frac{57}{6} = 9.5$$

$$P = 80 - 3(9.5)$$

$$P = 80 - 28.5$$

$$P = 51.5$$

$$\pi = Pq - CT$$

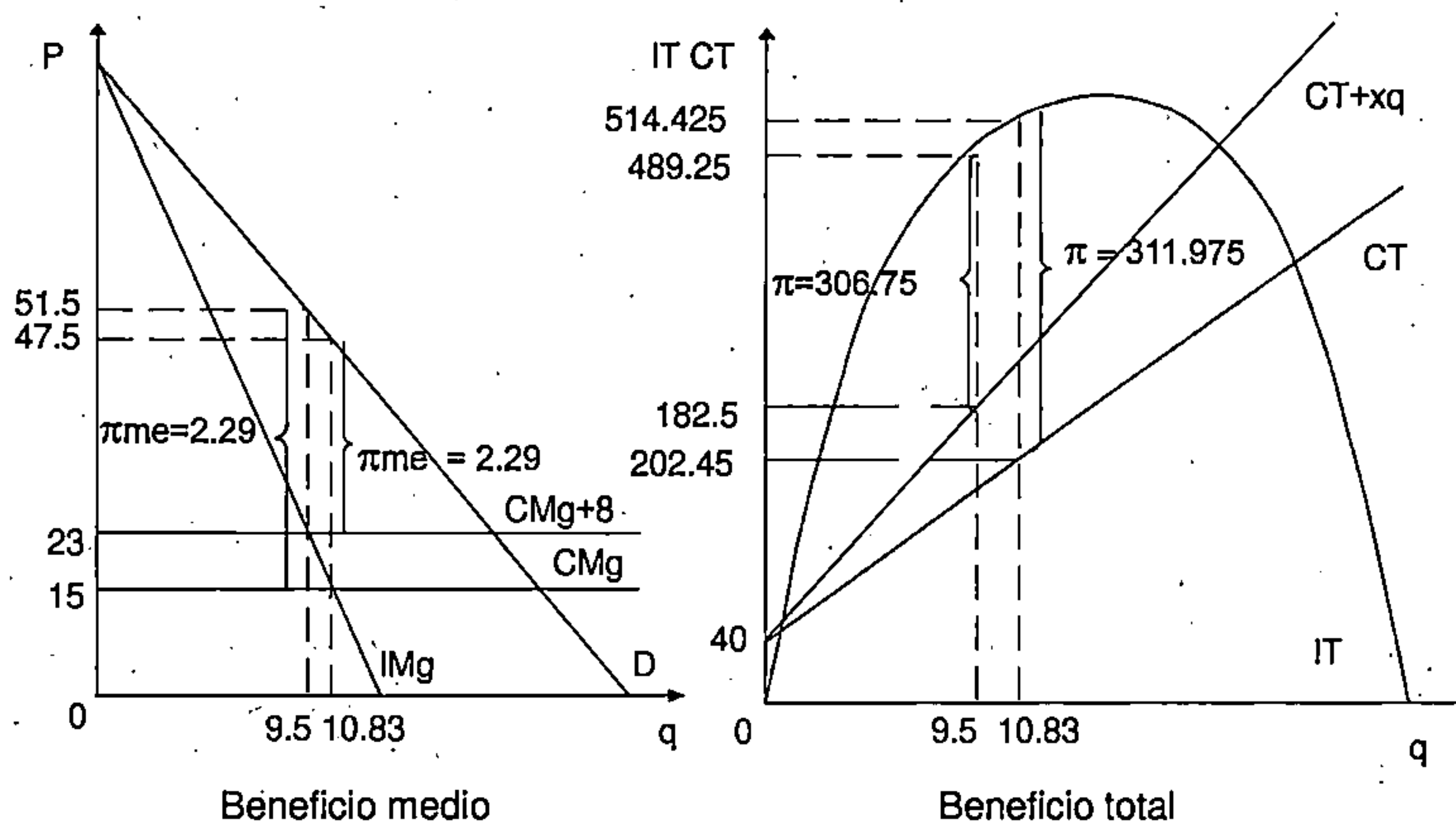
$$\pi = [(51.5)(9.5)] - [40 + 142.5]$$

$$\pi = 489.25 - 182.5$$

$$\pi = 306.75$$

La cantidad se reduce en 1.33, el precio sube 4. Los beneficios caen en 5.225. Obsérvese que el precio no se incrementa en el total del impuesto unitario (8) sino en 4. Es decir, el monopolista será incapaz de preservar sus beneficios al reducirse la cantidad vendida en un porcentaje mayor que el alza del precio (12.31% vs. 8.42%). Ver gráfico N° VI.6.1.

Gráfico Nº VI.6.1



2. Un monopolista tiene la siguiente ecuación de costos totales:

$$CT = 5q^2 + 20q + 180$$

Y abastece un mercado cuya ecuación de demanda es:

$$D: q = 240 - \frac{1}{3}P$$

La autoridad económica decide que la solución monopólica no es aceptable socialmente y decide regular el mercado, obligando al monopolista a comportarse como si fuese una empresa competitiva. Determine los precios, cantidades y beneficios de equilibrio antes y después de la regulación.

Respuesta:**a) Equilibrio del monopolio no regulado:**

$$\pi = IT - CT$$

$$IT = Pq$$

$$P = 720 - 3q$$

$$IT = (720 - 3q)q$$

$$IT = 720q - 3q^2$$

$$\pi = (720q - 3q^2) - (5q^2 + 20q + 180)$$

$$\pi = -8q^2 - 700q - 180$$

$$\frac{d\pi}{dq} = -16q - 700 = 0$$

$$q = 43.75$$

El beneficio máximo:

$$\pi = IT - CT$$

$$\pi = 25,757.812 - 10,625.312$$

$$\pi = 15,132.5$$

b) Equilibrio del monopolio regulado:

El criterio aplicado al monopolista es de aproximarle a la solución de competencia. En ésta, la firma produce una cantidad hasta donde se cumple que el $P = CMg$.

Por lo tanto, el CMg:

$$CT = 5q^2 + 20q + 180$$

$$CMg \equiv \frac{dCT}{dq} = 10q + 20$$

Luego:

$$720 - 3q = 20 + 10q$$

$$700 = 13q$$

$$q' = 53.85$$

El precio:

$$P' = 720 - 3(53.85)$$

$$P' = 720 - 161.55$$

$$P' = 558.45$$

El beneficio:

$$\pi' = P'q' - CT$$

$$\pi' = [(558.45)(53.85)] - [5(53.85)^2 + 20(53.85) + 180]$$

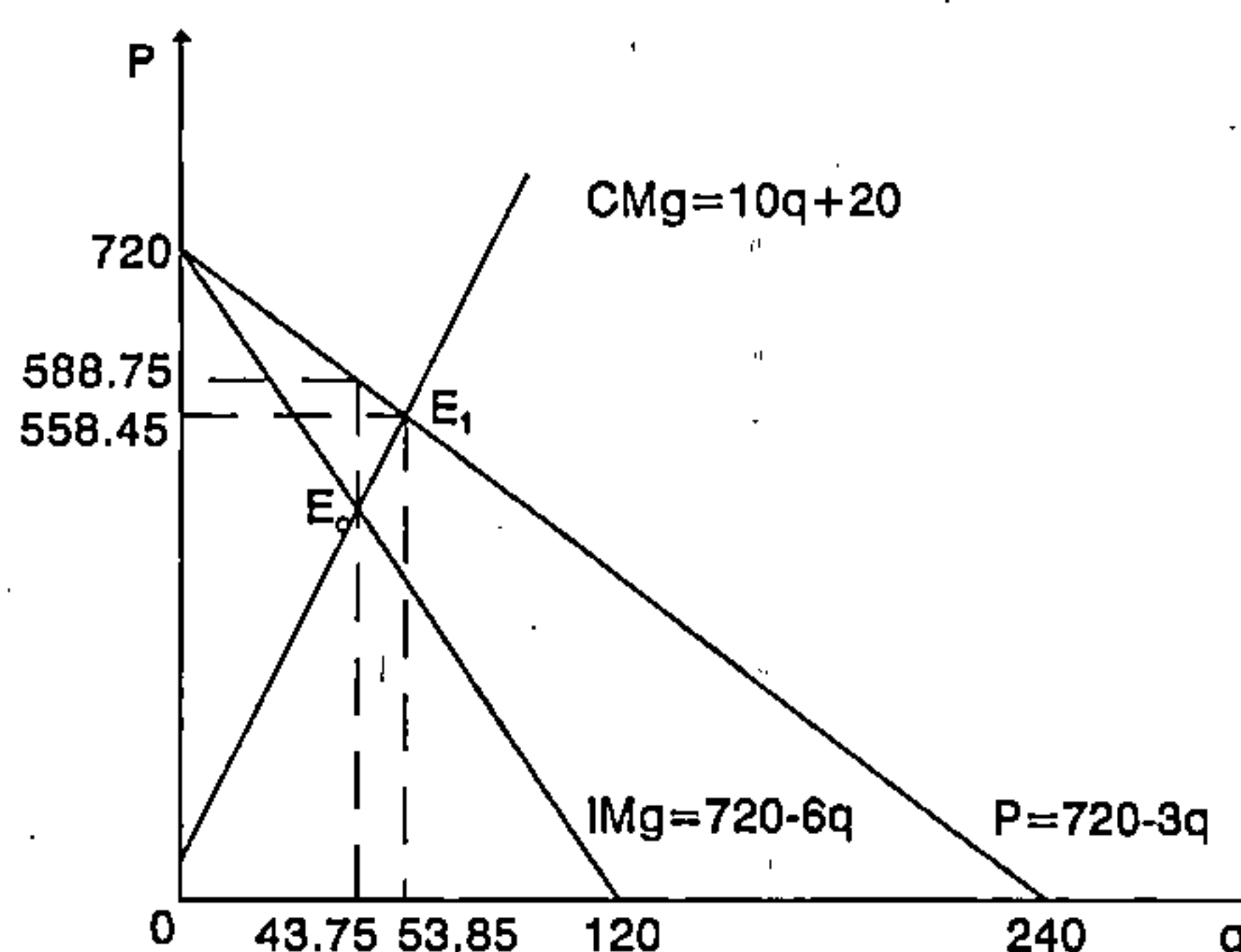
$$\pi' = 30,072.532 - 15,756.112$$

$$\pi' = 14,316.42$$

Al establecerse que el monopolista iguale el precio al CMg, éste se ve inducido a incrementar sus ventas, y por ende a reducir el precio. La autoridad, al establecer la regla, pretende que el monopolista se acerque al criterio de eficiencia económica

y bienestar que señala que la última unidad vendida debe proporcionar al consumidor el mismo nivel de satisfacción o beneficio –aproximado por el precio pagado– que el costo que para la sociedad tienen los recursos utilizados en ella aproximado por el costo marginal.

Gráfico N° VI.6.2



3. La demanda por cierto producto está representada por la siguiente ecuación:

$$q^d = 200 - \frac{P}{2}$$

mientras que la única empresa que abastece este mercado tiene la siguiente ecuación de costos totales:

$$CT = 3q^2 + 45q + 500$$

Se pide determinar los precios de equilibrio cuando la empresa maximiza sus beneficios y cuando es obligada por la autoridad económica a producir como si rigieran condiciones de competencia perfecta. Asimismo se pide calcular la ganancia en eficiencia económica para la sociedad que esta regulación conlleva.

Respuesta:**a) Maximización de los beneficios no regulados:**

En este caso el monopolista igualará sus ingresos y costo marginales.

El ingreso marginal:

$$IT = Pq$$

$$q^d = 200 - \frac{P}{2}$$

$$Pd = 400 - 2q$$

$$IT = (400 - 2q)q$$

$$IT = 400q - 2q^2$$

$$IMg \equiv \frac{dIT}{dq} = 400 - 4q$$

El costo marginal:

$$CMg \equiv \frac{dCT}{dq} = 45 + 6q$$

Igualando $IMg = CMg$

$$400 - 4q = 45 + 6q$$

$$10q = 355$$

$$q = 35.5$$

El precio:

$$P = 400 - 2(35.5)$$

$$P = 329$$

El beneficio no regulado:

$$\pi = Pq - CT$$

$$\pi = [(329)(35.5)] - [3(35.5)^2 + 45(35.5) + 500]$$

$$\pi = 11,679.5 - 5,878.25$$

$$\pi = 5,801.25$$

b) Maximización de beneficios regulados:

En este caso, se establecerá un precio que obligue al monopolista a producir y vender una cantidad tal que el costo marginal respectivo iguale a tal precio. Es decir:

$$P = CMg$$

$$400 - 2q = 45 + 69$$

$$8q = 355$$

$$q' = 44.375$$

El precio:

$$P' = 400 - 2(44.375)$$

$$P' = 311.25$$

El beneficio:

$$\pi' = [(311.25)(44.375)] - [3(44.375)^2 + 45(44.375) + 500]$$

$$\pi' = 13,811.718 - 8,404.2968$$

$$\pi' = 5,407.422$$

Como resultado de la medida, la firma monopolista debe incrementar sus ventas y reducir el precio, de tal manera que la última unidad vendida tenga un costo igual al precio (44.375).

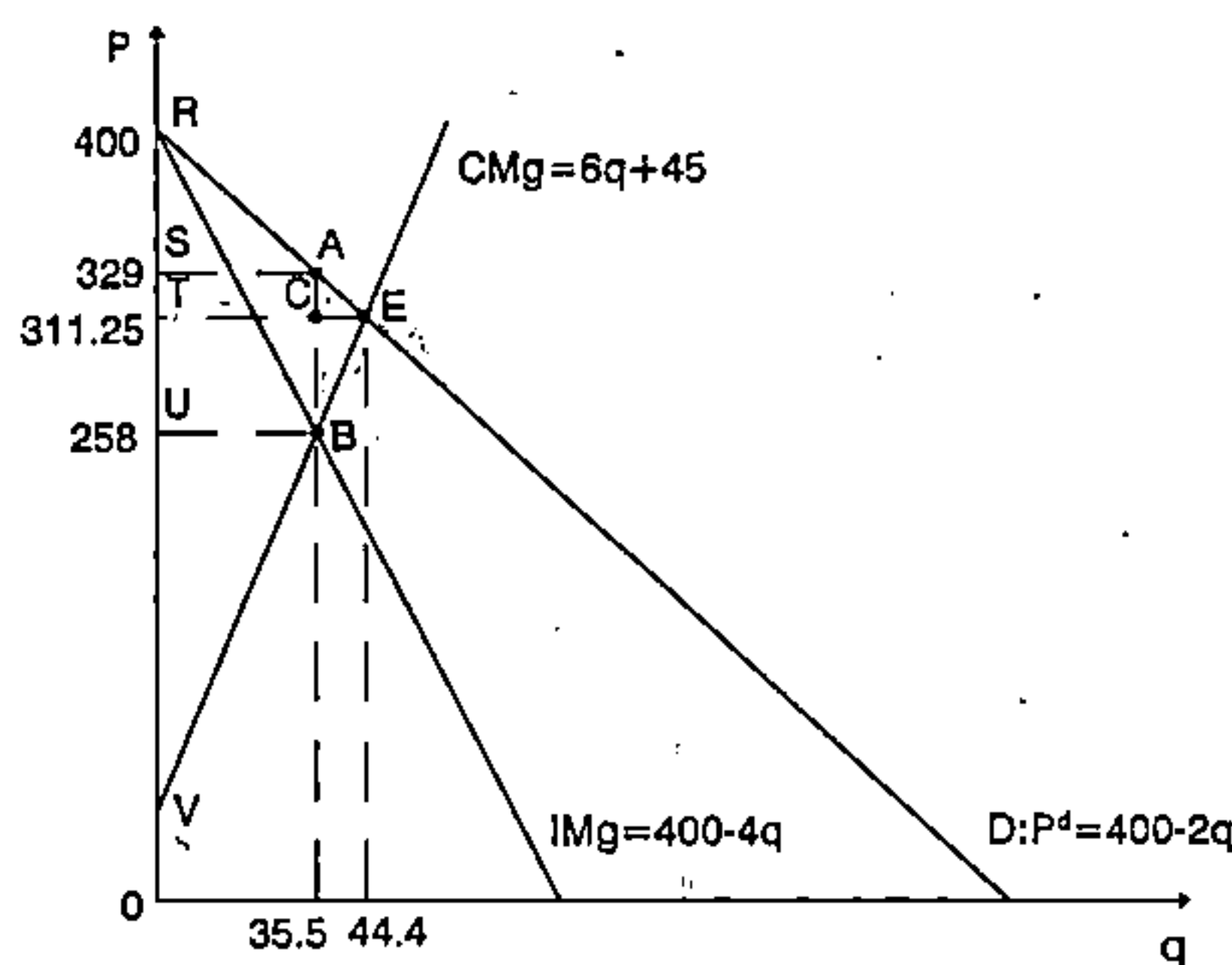
c) La ganancia en eficiencia social:

La solución monopólica pura representa una pérdida de eficiencia social porque la última unidad vendida (35.5) es valorada por los consumidores –están dispuestos a pagar por ella– en un monto de 329. Pero el costo de producir dicha última unidad es menor:

$$CMg(35.5) = 45 + 6(35.5) = 258.$$

Por lo tanto el monopolista cesa la producción y ventas en un monto que no corresponde a los deseos de los consumidores; es decir, a pesar que los consumidores están libremente dispuestos a pagar los costos de producción de unidades adicionales, el monopolista no las ofrece. En tal sentido, ocurre una pérdida de eficiencia social. Geométricamente, tal pérdida se refleja en el área del triángulo AEB del gráfico siguiente:

Gráfico N° VI.6.3



Cuando el precio iguala el costo marginal, la última unidad vendida insume recursos que la sociedad valora en el mismo monto que el precio que está dispuesto a pagar por ella. Por lo tanto, la producción y ventas se han llevado hasta su límite eficiente (punto E). En este caso, los consumidores gozan de un excedente igual al área del triángulo RET. El productor por su parte goza de un excedente igual al área del triángulo TEV.

Al monopolizarse la industria, la producción y ventas cae al punto A. El excedente de los consumidores se reduce en el área SAET, mientras que el del monopolista crece en el área SACT. Es decir, del total del excedente perdido por los consumidores, sólo una parte (SACT) pasa al monopolista en la forma de mayores ingresos, perdiéndose el área AEC. Asimismo, debido a la reducción en la producción, el monopolista pierde parte de su excedente original, según el área CEB. Ello ocurre obviamente porque el monto del excedente extraído de los consumidores es mayor que la pérdida del excedente que le significa reducir las ventas.

La sociedad, entonces, pierde excedentes por el área del triángulo AEB, que representa la pérdida de bienestar social que se origina debido a la producción insuficiente del producto por parte del monopolista ($P > CMg$).

En el ejercicio, el cálculo de la pérdida de eficiencia social –y ganancia– en caso se lleve las ventas hasta donde $P = CMg$ es:

Pérdida del excedente de los consumidores:

$$\text{Área AEC} = \frac{(AC)(CE)}{2}$$

$$AC = 329 - 311.25 = 17.75$$

$$CE = 44.375 - 35.5 = 8.875$$

$$\text{Área AEC} = \frac{(17.75)(8.875)}{2} = 78.77$$

Pérdida del excedente del monopolista:

$$\text{Área CEB} = \frac{(CB)(CE)}{2}$$

$$CB = 311.25 - 258 = 53.25$$

$$\text{Área CEB} = \frac{(53.25)(8.875)}{2} = 236.30$$

Entonces, la pérdida social será de:

$$\text{Área AEC} + \text{Área CEB}$$

$$\text{Área AEB} = 78.77 + 236.30 = 315.07$$

Área que justamente representa la ganancia en eficiencia económica que esta clase de regulación conlleva al ser aplicada al monopolista.

VII

Teoría del oligopolio

VII.1 Firmas líderes y seguidoras

1. En el mercado de un bien homogéneo, cuya ecuación de demanda es:

$$P^d = 22 - 1.1q$$

Existen dos vendedores cuyas ecuaciones de costo son:

$$CT_1 = 0.0625q_1^2 + 3q_1 + 3$$

$$CT_2 = 0.1q_2^2 + 4q_2 + 2$$

Se pide determinar las cantidades que venderán para maximizar sus beneficios, el precio que regirá en el mercado, los beneficios óptimos de cada vendedor, bajo el supuesto de conducta de Cournot.

Respuesta:

- a) **Determinación de las ventas óptimas:**

Bajo el supuesto de conducta de Cournot, los duopolistas procederán a maximizar sus beneficios, asumiendo que el otro vendedor no modificará el nivel de ventas que haya seleccionado. Entonces, para

El duopolista 1:

$$\pi_1 = IT_1 - CT_1$$

$$\pi_1 = [22 - 1.1(q_1 + q_2)]q_1 - [0.0625q_1^2 + 3q_1 + 3]$$

$$\pi_1 = 19q_1 - 1.1625q_1^2 - 1.1q_1q_2 - 3$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 19 - 2.325q_1 - 1.1q_2 = 0$$

$$2.325q_1 + 1.1q_2 = 19$$

Función de reacción del primer duopolista:

$$q_1 = 8.172 - 0.4731q_2 \quad \checkmark$$

El duopolista 2:

$$\pi_2 = IT_2 - CT_2$$

$$\pi_2 = [22 - 1.1(q_1 + q_2)]q_2 - [0.1q_2^2 + 4q_2 + 2]$$

$$\pi_2 = 22q_2 - 1.1q_1q_2 - 1.1q_2^2 - 0.1q_2^2 - 4q_2 - 2$$

$$\pi_2 = 18q_2 - 1.2q_2^2 - 1.1q_1q_2 - 2$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 18 - 2.4q_2 - 1.1q_1 = 0$$

$$2.4q_2 + 1.1q_1 = 18$$

Función de reacción del segundo duopolista:

$$q_2 = 7.5 - 0.4583q_1 \quad \checkmark$$

El par de valores q_1 y q_2 que satisfacen las dos funciones de reacción simultáneamente corresponden a las ventas físicas óptimas de cada duopolista.

Reemplazando la función de reacción de 2 en la del primer duopolista:

$$q_1 = 8.172 - 0.4731q_2$$

$$q_1 = 8.172 - 0.4731[7.5 - 0.4583q_1]$$

$$q_1 = 8.172 - 3.54825 + 0.2168q_1$$

$$0.7832q_1 = 4.62375$$

$$q_1 \cong 5.9$$

En consecuencia, las ventas óptimas del segundo duopolista

$$q_2 = 7.5 - 0.4583[5.9]$$

$$q_2 \cong 4.8$$

Obsérvese que el duopolista con los costos menores logra abastecer una fracción mayor del mercado. Las ventas físicas totales serán:

$$q = 5.9 + 4.8$$

$$q \cong 10.7$$

El gráfico N° VII.1.1 muestra la intersección de las funciones de reacción donde se encuentran las cantidades óptimas de venta de cada duopolista.

b) Determinación del precio de mercado:

En la ecuación de demanda:

$$P^d = 22 - 1.1q$$

$$P^d = 22 - 1.1(10.7)$$

$$P^d = 10.23$$

c) Cálculo de los beneficios óptimos:

Primer duopolista:

$$\pi_1 = IT_1 - CT_1$$

$$\pi_1 = [(10.23)(5.9)] - [0.0625(5.9)^2 + 3(5.9) + 3]$$

$$\pi_1 = 60.357 - 22.876$$

$$\pi_1 = 37.481$$

Segundo duopolista:

$$\pi_2 = IT_2 - CT_2$$

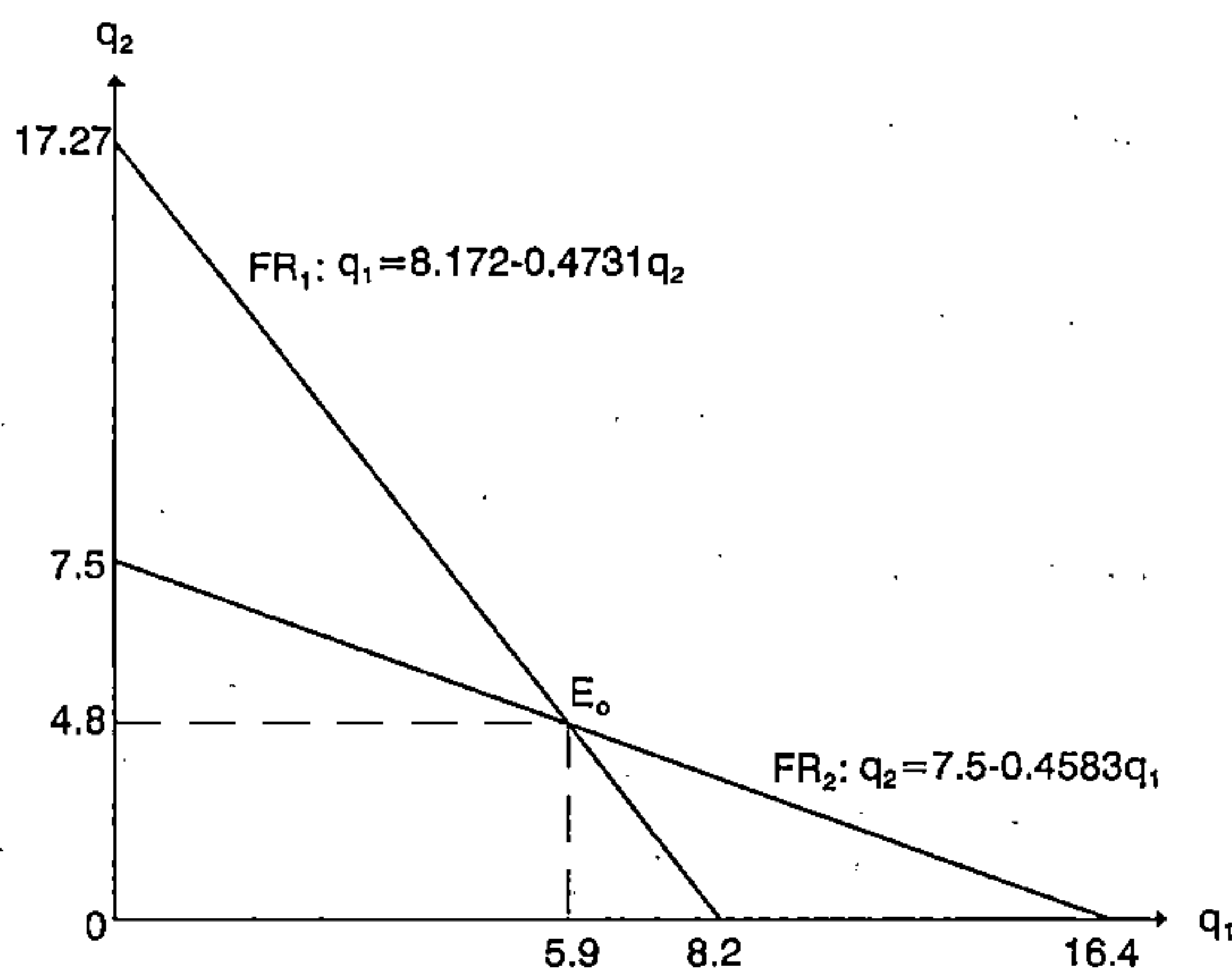
$$\pi_2 = [(10.23)(4.8)] - [0.1(4.8)^2 + 4(4.8) + 2]$$

$$\pi_2 = 49.104 - 23.504$$

$$\pi_2 = 25.60$$

El duopolista más eficiente obtiene los mayores beneficios.

Gráfico N° VII.1.1



2. En un mercado oligopólico, las dos únicas firmas que operan presentan las siguientes funciones de costos:

$$C_1 = 5q_1$$

$$C_2 = 0.5q_2^2$$

y abastecen la siguiente demanda:

$$P = 100 - 0.5(q_1 + q_2)$$

Determine la conveniencia para cada firma de ser líder o seguidora. Asuma que las firmas se comportan según el postulado de conducta de Cournot.

Respuesta:

Primero se deben determinar las funciones de reacción, recurriendo para ello al modelo de Cournot:

$$\pi_1 = IT_1 - CT_1$$

$$\pi_1 = [100 - 0.5(q_1 + q_2)]q_1 - 5q_1$$

$$\pi_1 = 100q_1 - 0.5q_1^2 - 0.5q_2q_1 - 5q_1$$

$$\pi_1 = 95q_1 - 0.5q_1^2 - 0.5q_2q_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 95 - 1q_1 - 0.5q_2 = 0$$

$$q_1 = 95 - 0.5q_2$$

función de reacción de 1

La ecuación de reacción de 1 determina las ventas del primer oligopolista para maximizar sus beneficios, cuando el segundo escoge un monto de ventas. Lo mismo ocurre con la ecuación de reacción de 2.

$$\pi_2 = IT_2 - CT_2$$

$$\pi_2 = [100 - 0.5(q_1 + q_2)]q_2 - 0.5q_2^2$$

$$\pi_2 = 100q_2 - 0.5q_2^2 - 0.5q_1q_2 - 0.5q_2^2$$

$$\pi_2 = 100q_2 - 0.5q_1q_2 - 1q_2^2$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 100 - 0.5q_1 - 2q_2 = 0$$

$$q_2 = 50 - 0.25q_1$$

Función de reacción de 2

Con ambas funciones se puede desarrollar el modelo de Stackellberg:

1 es líder y 2 es seguidora:

La firma 1 producirá para maximizar sus beneficios, asumiendo que la otra empresa se conformará con establecer su volumen de ventas después que la primera firma ha decidido sobre la suya.

$$\pi_1 = Pq_1 - C_1$$

$$\pi_1 = [100 - 0.5(q_1 + q_2)]q_1 - [5q_1]$$

$$\pi_1 = 100q_1 - 0.5q_1^2 - 0.5q_1q_2 - 5q_1$$

$$\pi_1 = 95q_1 - 0.5q_1^2 - 0.5q_1[50 - 0.25q_1]$$

Incorporando la función de reacción de 2

$$\pi_1 = 95q_1 - 0.5q_1^2 - 25q_1 + 0.125q_1^2$$

$$\pi_1 = 70q_1 - 0.375q_1^2$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 70 - 0.75q_1 = 0$$

$$q_1 = 93.33$$

$$\pi_1 = 70(93.33) - 0.375(93.33)^2$$

$$\pi_1 = 3,266.67$$

Entonces:

$$q_2 = 50 - 0.25(93.33)$$

Reemplazando el valor de q_1 en la función de reacción de 2

$$q_2 = 26.67$$

El total producido:

$$q = q_1 + q_2$$

$$q = 93.33 + 26.67$$

$$q = 120$$

Luego, el precio de mercado:

$$P = 100 - 0.5(120)$$

$$P = 40$$

El beneficio de 2 como seguidora:

$$\pi_2 = Pq_2 - C_2$$

$$\pi_2 = (40)(26.67) - 0.5(26.67)^2$$

$$\pi_2 = 1,066.664 - 355.55$$

$$\pi_2 = 711.11$$

2 es líder y 1 seguidora:

$$\pi_2 = [100 - 0.5(q_1 + q_2)]q_2 - 0.5q_2^2$$

$$\pi_2 = 100q_2 - 0.5q_1q_2 - 0.5q_2^2 - 0.5q_2^2$$

$$\pi_2 = 100q_2 - 0.5q_1q_2 - 1q_2^2$$

$$\pi_2 = 100q_2 - 0.5q_2[95 - 0.5q_2] - 1q_2^2$$

Incorporando la función de reacción de 1

$$\pi_2 = 100q_2 - 47.5q_2 + 0.25q_2^2 - 1q_2^2$$

$$\pi_2 = 52.5q_2 - 0.75q_2^2$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 52.5 - 1.5q_2 = 0$$

$$q_2 = 35$$

$$\pi_2 = 52.5(35) - 0.75(35)^2$$

$$\pi_2 = 1,837.5 - 918.75$$

$$\pi_2 = 918.75$$

Entonces, lo producido por la primera firma será:

$$q_1 = 95 - 0.5(35)$$

$$q_1 = 77.5$$

y el total ofertado:

$$q = q_1 + q_2$$

$$q = 35 + 77.5$$

$$q = 112.5$$

Luego, el precio de mercado:

$$P = 100 - 0.5(112.5)$$

$$P = 43.75$$

Utilidades de 1 como seguidora:

$$\pi_1 = 43.75(77.5) - 5(77.5)$$

$$\pi_1 = 3,390.625 - 387.5$$

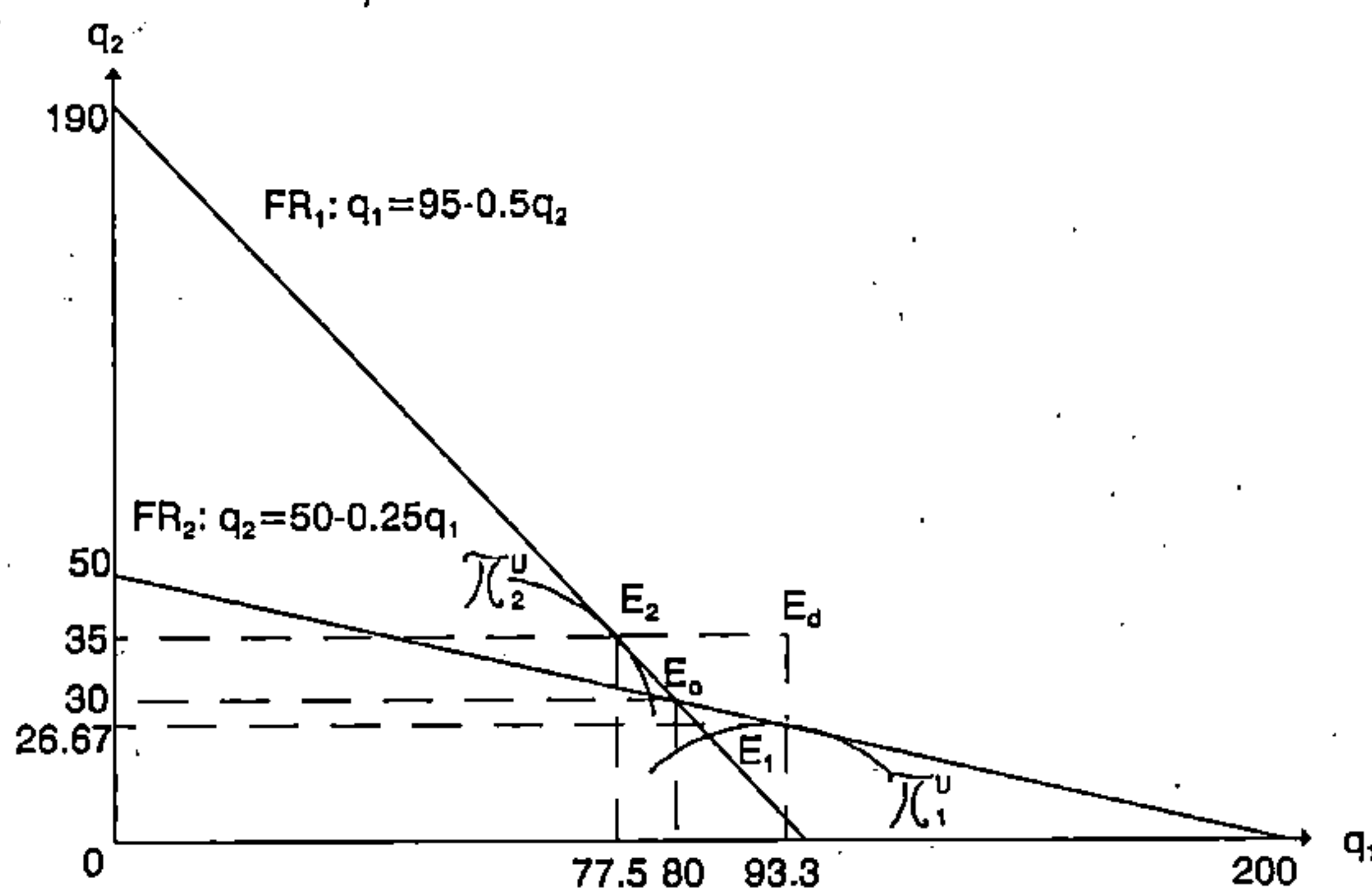
$$\pi_1 = 3,003.125$$

Conclusión:

Categoría	Utilidad de 1	Utilidad de 2
Líder	3,266.67	3,003.125
Seguidora	918.75	711.1

Dado que a las dos firmas les conviene ser líderes, se producirá entonces el desequilibrio de Stackelberg. En el siguiente gráfico, el punto E_0 muestra el equilibrio de Cournot. El punto E_1 muestra el equilibrio cuando 1 es líder, mientras que en el punto E_2 se observa el equilibrio cuando 2 es líder. E_d es el desequilibrio de Stackelberg.

Gráfico N° VII.1.2



3. Dada la siguiente función de demanda:

$$P_1 = 80 - 2q_1 - q_2$$

Así como la función de costos de la primera firma:

$$C_1 = 2q_1^2$$

Se solicita determinar la cantidad óptima y el precio de venta que maximizan el beneficio de la firma, si la segunda firma asume ser seguidora y se conforma con participar con el 10% de las ventas totales.

Respuesta:

La participación en el mercado de la segunda firma se deriva de:

$$q_2 = c(q_1 + q_2)$$

$$q_2 = cq_1 + cq_2$$

$$q_2 = \frac{cq_1}{1-c} \quad \text{donde } c = 0.1$$

Porcentaje de participación de la segunda firma en el mercado.

Por lo tanto: $q_2 = \frac{0.1}{0.9}q_1 = \frac{1}{9}q_1$

Se trata en realidad de la función o ecuación de reacción de la segunda firma. Por lo tanto, la primera empresa procede a maximizar su beneficio:

$$\pi_1 = [(80 - 2q_1 - q_2)q_1] - 2q_1^2$$

$$\pi_1 = \left[80 - 2q_1 - \frac{1}{9}q_1 \right] q_1 - 2q_1^2$$

$$\pi_1 = 80q_1 - 2q_1^2 - \frac{1}{9}q_1^2 - 2q_1^2$$

$$\pi_1 = 80q_1 - \frac{37}{9}q_1^2$$

$$\frac{d\pi}{dq_1} = 80 - \frac{(37)(2)}{9}q_1 = 0$$

$$720 - 74q_1 = 0$$

$$q_1 = 9.7297$$

$$q_2 = \frac{1}{9}(9.7297)$$

$$q_2 = 1.08108$$

Ventas de la segunda firma de acuerdo a su función de reacción. La cantidad total vendida:

$$q = q_1 + q_2 = 10.81081$$

El precio de mercado:

$$P_1 = 80 - 2[9.7297] - [1.08108]$$

$$P_1 = 80 - 19.4594 - 1.08108$$

$$P_1 = 59.459$$

El beneficio de la primera firma será:

$$\pi_1 = 80(9.7297) - \frac{37}{9}(9.7297)^2$$

Reemplazando el valor de q_1

$$\pi_1 = 778.376 - 389.1868$$

$$\pi_1 = 389.1892$$

VII.2 Curva de demanda quebrada

1. Dos oligopolistas han diferenciado sus productos y han establecido las curvas de demanda siguientes:

$$P_1 = 80 - 2q_1 - q_2$$

$$P_2 = 76 - q_1 - 3q_2$$

Mientras que sus funciones de costo son:

$$C_1 = 2q_1^2$$

$$C_2 = 20q_2$$

Determinar las ecuaciones de la curva de demanda quebrada de 1 así como sus curvas de ingreso marginal respectivas, bajo el supuesto de que 2 no eleva su precio cuando 1 lo hace y que 2 reduce su precio si 1 lo hace, a partir de una situación de equilibrio inicial alcanzada según el postulado de conducta de Cournot.

Respuesta:

a) Solución inicial de Cournot:

Primer oligopolista:

$$\pi_1 = IT_1 - C_1$$

$$\pi_1 = [80 - 2q_1 - q_2]q_1 - 2q_1^2$$

$$\pi_1 = 80q_1 - 2q_1^2 - q_2q_1 - 2q_1^2$$

$$\pi_1 = 80q_1 - 4q_1^2 - q_2q_1$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 80 - 8q_1 - q_2 = 0$$

$$q_1 = 10 - \frac{1}{8}q_2$$

Función de reacción de 1

Segundo oligopolista:

$$\pi_2 = IT_2 - C_2$$

$$\pi_2 = [76 - q_1 - 3q_2]q_2 - 20q_2$$

$$\pi_2 = 76q_2 - q_1q_2 - 3q_2^2 - 20q_2$$

$$\pi_2 = 56q_2 - q_1q_2 - 3q_2^2$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 56 - q_1 - 6q_2 = 0$$

$$q_2 = \frac{28}{3} - \frac{1}{6}q_1$$

Función de reacción de 2

Entonces, resolviendo el sistema:

$$q_1 + \frac{1}{8}q_2 = 10$$

$$\frac{1}{6}q_1 + q_2 = \frac{28}{3}$$

Multiplicando la primera ecuación por 8 y la segunda por 6:

$$8q_1 + q_2 = 80$$

$$q_1 + 6q_2 = 56$$

$$q_1 = 56 - 6q_2$$

Reemplazando:

$$8[56 - 6q_2] + q_2 = 80$$

$$-47q_2 = -38$$

$$q_2 = 7.83$$

Entonces:

$$q_1 = 56 - 6\left[\frac{368}{47}\right]$$

$$q_1 = 9.02$$

El precio al que responde la primera firma:

$$P_1 = 80 - 2(9.02) - 7.83$$

$$P_1 = 54.13$$

El precio al que responde la segunda firma:

$$P_2 = 76 - 9.02 - 3(7.83)$$

$$P_2 = 43.49$$

La solución de Cournot:

$$P_1 = 54.13$$

$$P_2 = 43.49$$

$$q_1 = 9.02$$

$$q_2 = 7.832$$

Y los ingresos y costos marginales respectivos:

$$IMg_1 = 36.08$$

$$IMg_2 = 20$$

$$CMg_1 = 36.08$$

$$CMg_2 = 20$$

b) Curva de demanda quebrada:

1 sube su precio por encima de 54.13. 2 mantiene el suyo. ¿Qué cantidades podrá vender 2 ante los incrementos del precio de 1?

$$P_2 = 76 - q_1 - 3q_2$$

$$43.49 = 76 - q_1 - 3q_2$$

$$-43.49 + 76 - q_1 = 3q_2$$

$$q_2 = \frac{32.51 - q_1}{3}$$

Función de reacción de 2 cuando $P_1 > 54.13$

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{1}{3} < 0$$

Por cada unidad no vendida por 1, 2 incrementa las suyas en 0.333 unidades. En este caso 2 "reacciona" pasivamente.

Curva de demanda de 1 cuando 2 no lo sigue (debido a un alza de precios de 1):

$$P_1 = 80 - 2q_1 - q_2$$

$$P_1 = 80 - 2q_1 - \left[\frac{32.51 - q_1}{3} \right]$$

Reemplazando q_2 por su función de reacción cuando $P_1 > 54.13$

$$3P_1 = 240 - 6q_1 - 32.51 + q_1$$

$$3P_1 = 207.49 - 5q_1$$

$$P_1 = \frac{207.49 - 5q_1}{3}$$

$$P_1 = 69.16 - 1.67q_1$$

Cuando $\bar{P}_2 = 43.49$, es decir, 2 no varía su precio (no lo aumenta):

$$\frac{dP_1}{dq_1} = -1.67 \quad \text{o} \quad \frac{dq_1}{dP_1} = -0.599$$

Por cada unidad que eleve el precio (y dado que 2 no eleva el suyo), 1 pierde 0.599 unidades en ventas.

Cálculo del IMg para $P_1 > 54.13$.

$$IT_1 = P_1 q_1$$

$$IT_1 = \left[\frac{207.49 - 5q_1}{3} \right] q_1$$

Se utiliza la curva de demanda válida para el alza de precios de 1.

$$IT_1 = \frac{207.49q_1 - 5q_1^2}{3}$$

$$IMg_1 = \frac{207.49 - 10q_1}{3}$$

$$IMg_1 = 69.16 - 3.34q_1$$

Cuando $q_1 = 9.02$:

$$IMg_1 = \frac{207.49 - 10(9.02)}{3} = 39.06$$

En el punto de solución inicial (según el postulado de Cournot).

Si 1 reduce su precio, 2 lo seguirá para mantener su proporción del mercado.

Es decir mantener la proporción de equilibrio inicial: $\frac{q_1}{q_2} = \frac{9.02}{7.83} = 0.8681$

Reemplazando esta relación en la función de demanda de 1:

$$P_1 = 80 - 2q_1 - q_2$$

$$q_2 = \frac{7.83}{9.02} q_1$$

$$P_1 = 80 - 2q_1 - \frac{7.83}{9.02} q_1$$

$$P_1 = 80 - 2.868q_1$$

Ecuación de demanda de 1 cuando reduce su precio por debajo de 54.13 o vende más de 9.02 unidades. Por cada reducción en una unidad del precio de 1, éste vende 0.35 unidades más.

$$\frac{dP_1}{dq_1} = -2.868 \quad \text{o} \quad \frac{dq_1}{dP_1} = -0.35$$

La pendiente de la curva de demanda de 1 para alzas de precios por encima de 54.13 es de 1.67; es decir, la segunda curva es más empinada o menos elástica.

IMg para $P_1 < 54.13$

$$IT_1 = (80 - 2.868q_1)q_1$$

$$IT_1 = 80q_1 - 2.868q_1^2$$

$$\frac{dIT_1}{dq_1} = IMg_1 = 80 - 5.736q_1$$

Cuando $q_1 = 9.02$:

$$IMg_1' = 80 - 5.736(9.02)$$

$$IMg_1' = 28.26$$

Para reducciones de P_1 a partir de $P = 54.13$.

Se observa que existe una brecha o discontinuidad entre las curvas de IMg de las dos curvas de demanda de 1. El IMg para una elevación marginal de precio a partir de su nivel de equilibrio inicial es de 39.06. Para una reducción marginal de precios es de 28.26. Ello debido a que las dos curvas de demanda (para un alza y baja del precio) se intersectan en el punto de equilibrio inicial formando un ángulo por la diferencia de sus pendientes.

El costo de la primera firma en el punto de equilibrio inicial:

$$C_1 = 2q_1^2$$

$$CMg = 4q_1$$

$$q_1 = 9.02$$

$$CMg = 4(9.02)$$

$$CMg = 36.08$$

Por lo tanto, el CMg cuando $q_1 = 9.02$ se encuentra entre los valores:

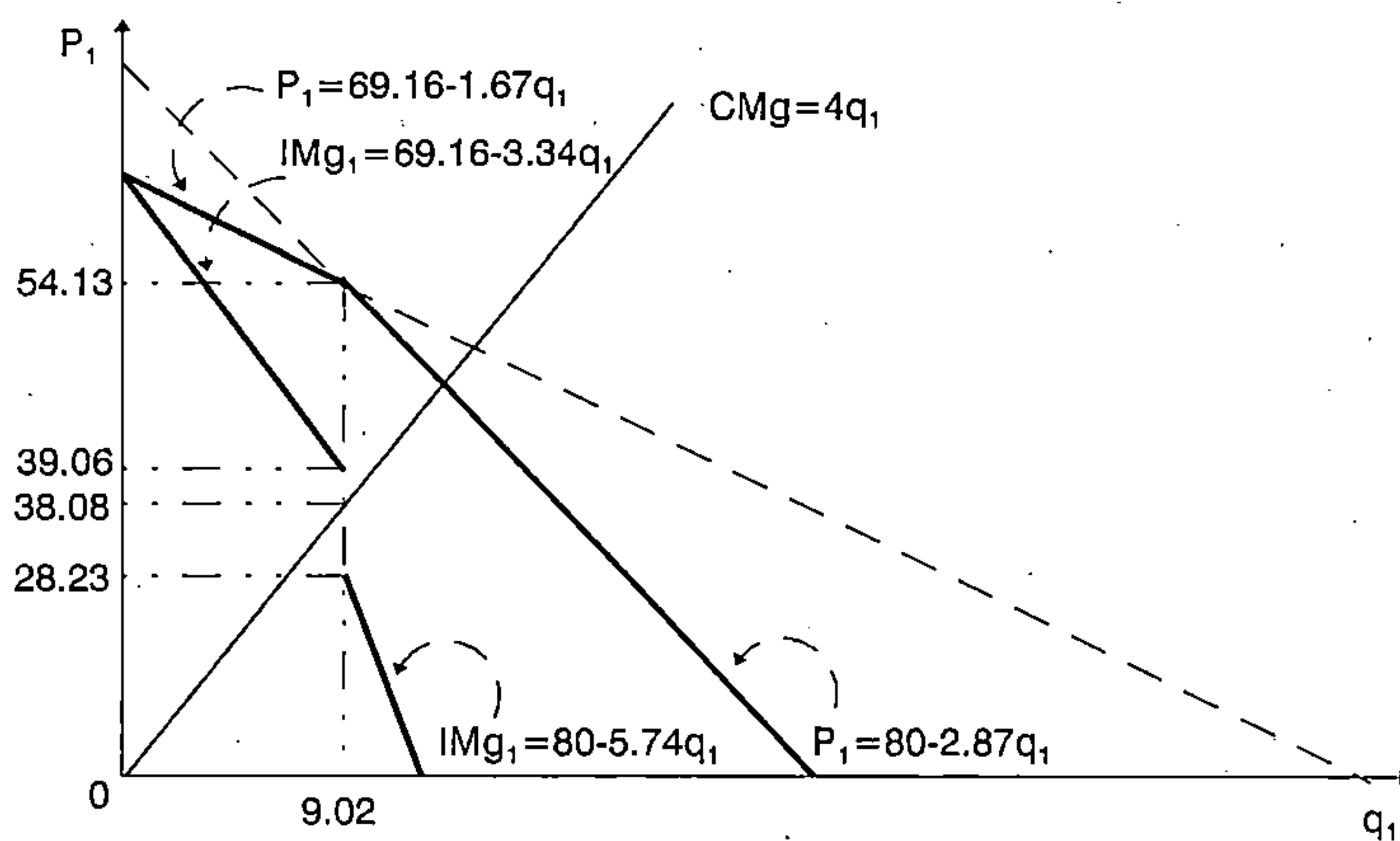
$$IMg_1 = 39.06$$

$$CMg = 36.08$$

$$IMg_1' = 28.26$$

Lo cual significa que la función de CMg podría modificarse, es decir, la curva de CMg podría subir o bajar, y no por ello el productor 1 se verá en la conveniencia de modificar la cantidad y el precio iniciales establecidos según el postulado de Cournot. El valor del CMg podría incrementarse hasta en 0.98 unidades y reducirse hasta en 9.85 unidades sin alterar su equilibrio inicial.

Gráfico N° VII.2.1



VII.3 Colusión oligopólica

1. En un mercado sólo existen dos vendedores de un cierto bien homogéneo, cuyas respectivas plantas tienen las siguientes ecuaciones de costos:

$$CT_1 = \frac{1}{4}q_1^2 + 9q_1 + 18$$

$$CT_2 = \frac{1}{3}q_2^2 + 7q_2 + 16$$

El mercado está representado por la ecuación de demanda:

$$P = 35 - Q \quad \text{donde} \quad Q = q_1 + q_2$$

Suponga primero que las plantas no han sido construidas todavía y que los duopolistas reconocen su interdependencia y deciden coludirse para estudiar y decidir si les conviene construir las dos plantas o una sola. En este caso, ¿qué opción elegirán y cuáles serán el precio, unidades vendidas y beneficio máximo?

En segundo término, suponga que las plantas ya existen. Al respecto, determine la decisión de los duopolistas sobre la conveniencia de operar con ambas plantas o una sola.

Respuesta:**a) Las plantas aún no han sido construidas:**

Para tomar la decisión más conveniente, los duopolistas deberán calcular los beneficios estimados de la operación de ambas plantas y de cada una de ellas por separado.

En el caso de que se construyan ambas plantas, la solución corresponde al caso del monopolista multiplanta.

$$\pi = \pi_1 + \pi_2$$

Donde:

$$\pi_1 = IT_1 - CT_1$$

$$IT_1 = Pq_1$$

$$IT_1 = [35 - (q_1 + q_2)]q_1$$

$$IT_1 = 35q_1 - q_1^2 - q_1q_2$$

Por lo tanto:

$$\pi_1 = [35q_1 - q_1^2 - q_1q_2] - \left[\frac{1}{4}q_1^2 + 9q_1 + 18 \right]$$

$$\pi_1 = -\frac{5}{4}q_1^2 + 26q_1 - q_1q_2 - 18$$

Por otra parte:

$$\pi_2 = IT_2 - CT_2$$

$$IT_2 = Pq_2$$

$$IT_2 = [35 - (q_1 + q_2)]q_2$$

$$IT_2 = 35q_2 - q_1q_2 - q_2^2$$

Por lo tanto:

$$\pi_2 = [35q_2 - q_1q_2 - q_2^2] - \left[\frac{1}{3}q_2^2 + 7q_2 + 16 \right]$$

$$\pi_2 = -\frac{4}{3}q_2^2 + 28q_2 - q_1q_2 - 16$$

El beneficio conjunto:

$$\pi = \left[-\frac{5}{4}q_1^2 + 26q_1 - q_1q_2 - 18 \right] + \left[-\frac{4}{3}q_2^2 + 28q_2 - q_1q_2 - 16 \right]$$

$$\pi = -\frac{5}{4}q_1^2 - \frac{4}{3}q_2^2 + 26q_1 + 28q_2 - 2q_1q_2 - 34$$

Para un máximo de beneficio conjunto:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = -\frac{10}{4}q_1 + 26 - 2q_2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = -\frac{8}{3}q_2 + 28 - 2q_1 = 0$$

$$\frac{10}{4}q_1 + 2q_2 = 26$$

$$2q_1 + \frac{8}{3}q_2 = 28$$

Sistema de ecuaciones simultáneas cuya solución es:

$$q_1 = 6.75$$

$$q_2 = 5.0$$

Por lo tanto:

$$q = 6.75 + 5.0$$

$$q = 11.75$$

Y el precio de equilibrio:

$$P = 35 - (11.75)$$

$$P = 23.25$$

El beneficio global:

$$\pi = [IT_1 + IT_2] - [CT_1 + CT_2]$$

Los ingresos en cada mercado:

$$IT_1 = (23.75)(6.75)$$

$$IT_1 = 156.94$$

$$IT_2 = (23.75)(5.0)$$

$$IT_2 = 116.25$$

Los costos en cada planta:

$$CT_1 = \frac{1}{4}(6.75)^2 + 9(6.75) + 18$$

$$CT_1 = 11.39 + 60.75 + 18$$

$$CT_1 = 90.14$$

$$CT_2 = \frac{1}{3}(5.0)^2 + 7(5.0) + 16$$

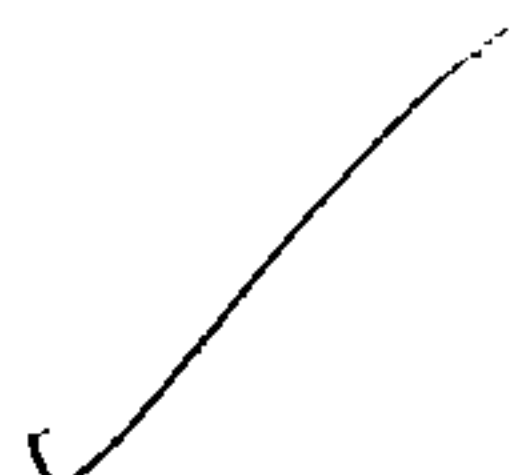
$$CT_2 = 8.33 + 35 + 16$$

$$CT_2 = 59.33$$

El beneficio:

$$\pi = [156.94 + 116.25] - [90.14 + 59.33]$$

$$\pi = 273.19 - 149.47$$

$$\pi = 123.72$$


Para determinar si es más conveniente construir una sola planta, se deberá determinar los beneficios respectivos:

Planta 1:

$$P = 35 - q_1$$

$$IT_1 = (35 - q_1)q_1$$

$$IT_2 = 35q_1 - q_1^2$$

El beneficio:

$$\pi_1 = [35q_1 - q_1^2] - \left[\frac{1}{4}q_1^2 + 9q_1 + 18 \right]$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 35 - 2q_1 - \frac{1}{2}q_1 - 9 = 0$$

$$24 - 2.5q_1 = 0$$

$$q_1 = 9.6$$

El precio:

$$P = 35 - 9.6$$

$$P = 25.4$$

El beneficio correspondiente a la planta 1:

$$p_1 = IT_1 - CT_1$$

$$\pi_1 = [(25.4)(9.6)] - \left[\frac{1}{4}(9.6)^2 + 9(9.6) + 18 \right]$$

$$p_1 = 116.40$$

Planta 2:

$$IT_2 = (35 - q_2)q_2$$

$$IT_2 = 35q_2 - q_2^2$$

$$\pi_2 = [35q_2 - q_2^2] - \left[\frac{1}{3}q_2^2 + 9q_2 + 16 \right]$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 35 - 2q_2 - \frac{2}{3}q_2 - 9 = 0$$

$$28 - \frac{8}{3}q_2 = 0$$

$$q_2 = 10.5$$

$$P = 35 - 10.5$$

$$P = 24.5$$

Por lo tanto, el beneficio de la planta 2:

$$\pi_2 = IT_2 - CT_2$$

$$\pi_2 = [(24.5)(10.5)] - \left[\frac{1}{3}(10.5)^2 + (10.5) + 16 \right]$$

$$\pi_2 = 257.25 - 131$$

$$\pi_2 = 126.25$$

En base a los tres beneficios, se determina que a los duopolistas les conviene construir solamente la planta 2, ya que de esa manera el beneficio es el máximo. La dificultad práctica radicarán en la determinación de las participaciones relativas de cada uno en dicho beneficio.

b) Plantas en operación:

Si las plantas ya han sido construidas, se deberá analizar la conveniencia de cerrar algunas de ellas. Si sólo funcionase la planta 1, a los beneficios de esta planta deberá restársele los costos fijos de la planta 2. Por lo tanto:

$$\pi^1 = \pi_1 - CF_2$$

$$\pi^1 = 116.40 - 16$$

$$\pi^1 = 100.40$$

En el otro caso:

$$\pi^2 = \pi_2 - CF_1$$

$$\pi^2 = 126.25 - 18$$

$$\pi^2 = 108.25$$

Cuando funcionan ambas plantas, el beneficio:

$$\pi = 123.72$$

excede el beneficio neto de cada una cuando la otra no opera. Convendrá a los duopolistas seguir operando ambas plantas.

VIII

Teoría del mercado de factores

VIII.1 Elasticidad de sustitución de los factores de producción

1. ¿Cuál es la elasticidad de sustitución para la función de producción?:

$$Q = \frac{KL}{K+L}$$

Respuesta:

Primero se debe determinar el grado de homogeneidad. Si es homogénea de primer grado, entonces, la elasticidad de sustitución (σ) se puede calcular más fácilmente aplicando la siguiente fórmula:

$$\sigma = \frac{f_L f_K}{f_{LK} Q}$$

$$tQ = \frac{(tK)(tL)}{(tK+tL)} = \frac{t^2LK}{t(K+L)} = t \cdot \frac{KL}{K+L}$$

Es homogénea de primer grado, entonces:

$$f_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{(K+L)(K) - KL}{(K+L)^2} = \frac{K^2 + KL - KL}{(K+L)^2} = \frac{K^2}{(K+L)^2}$$

$$f_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{(K+L)(L) - KL}{(K+L)^2} = \frac{KL + L^2 - KL}{(K+L)^2} = \frac{L^2}{(K+L)^2}$$

$$f_{LK} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} = \frac{(K+L)^2(2K) - K^2(2(K+L))}{(K+L)^4}$$

$$f_{LK} = \frac{(K^2 + 2KL + L^2)2K - 2K^3 - 2K^2L}{(K+L)^4}$$

$$f_{LK} = \frac{2K^3 + 4K^2L + 2KL^2 - 2K^3 - 2K^2L}{(K+L)^4}$$

$$f_{LK} = \frac{2K^2L + 2KL^2}{(K+L)^4}$$

$$f_{LK} = \frac{2KL(K+L)}{(K+L)^4}$$

$$f_{LK} = \frac{2KL}{(K+L)^3}$$

Por lo tanto:

$$\sigma = \frac{f_L f_K}{f_{LK} Q} = \frac{\left(\frac{K^2}{(K+L)^2} \right) \left(\frac{L^2}{(K+L)^2} \right)}{\left(\frac{2KL}{(K+L)^3} \right) \left(\frac{KL}{(K+L)} \right)} = \frac{\frac{K^2 L^2}{(K+L)^4}}{\frac{2K^2 L^2}{(K+L)^4}} = \frac{1}{2}$$

Esta función, homogénea de primer grado, tiene una elasticidad de sustitución constante que no varía a lo largo de la isocuanta.

2. ¿Cuál es la elasticidad de sustitución de la función de producción Cobb-Douglas?

$$Q = AL^{\alpha}K^{1-\alpha} \quad \text{donde } 0 < \alpha < 1 \quad \text{y} \quad A > 0$$

Respuesta:

Esta función de producción es homogénea de primer grado. Por ello:

$$\sigma = \frac{f_L f_K}{f_{LK} Q}$$

$$f_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = A\alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha} = \alpha \frac{Q}{L}$$

$$f_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = A(1-\alpha)L^{\alpha}K^{1-\alpha-1} = (1-\alpha) \frac{Q}{K}$$

$$f_{LK} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} = A\alpha L^{\alpha-1}(1-\alpha)K^{1-\alpha-1}$$

$$f_{LK} = \alpha(1-\alpha)A \left(\frac{L^{\alpha}}{L} \right) \left(\frac{K^{1-\alpha}}{K} \right)$$

$$f_{LK} = \alpha(1-\alpha) \frac{Q}{LK}$$

Reemplazando:

$$\sigma = \frac{\alpha \frac{Q}{L} (1-\alpha) \frac{Q}{K}}{\alpha(1-\alpha) \frac{Q}{LK} Q} = \frac{\alpha(1-\alpha) \frac{Q^2}{LK}}{\alpha(1-\alpha) \frac{Q^2}{LK}} = 1$$

3. Demuestre que la participación relativa del trabajo respecto de la del capital $\left(\frac{P_L L}{P_K K}\right)$ en el valor del producto (PQ), es igual a $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ cuando la función de producción es:

$$Q = AL^\alpha K^{1-\alpha} \quad \text{donde } 0 < \alpha < 1 \quad \text{y} \quad A > 0$$

Respuesta:

Es necesario recordar que en equilibrio, la firma eficiente opera a lo largo de su senda de expansión.

$$\frac{P_L^0}{P_K^0} = \frac{f_L}{f_K}$$

Entonces:

$$f_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = A\alpha L^{\alpha-1} K^{1-\alpha} = \alpha \frac{Q}{L}$$

$$f_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = AL^\alpha (1-\alpha) K^{-\alpha} = (1-\alpha) \frac{Q}{K}$$

$$\frac{P_L^0}{P_K^0} = \left(\frac{\alpha Q}{L}\right) \left(\frac{K}{(1-\alpha)Q}\right) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \left(\frac{K}{L}\right)$$

$$\left(\frac{P_L^0}{P_K^0}\right) \left(\frac{L}{K}\right) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$$

$$\frac{P_L^0 L}{P_K^0 K} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Adicionalmente:

$$f_L L + f_K K = Q$$

Por el teorema de Euler

$$\alpha \frac{Q}{L} L + (1 - \alpha) \frac{Q}{K} K = Q$$

$$\alpha Q + (1 - \alpha) Q = Q$$

El producto se reparte entre L y K en las fracciones α y $(1 - \alpha)$.

Por lo tanto:

$$f_L L = \alpha Q$$

Participación de L en el valor de lo producido.

Condición para que el empresario maximice su beneficio ($VPMg_L = P_L^0$)

$$P^0 f_L = P_L^0$$

$$f_L = \frac{P_L^0}{P^0}$$

$$\frac{P_L^0}{P^0} L = \alpha Q$$

$$\frac{P_L^0 L}{P^0 Q} = \alpha$$

α es la participación de L en el valor de lo producido.

Participación de K en el valor de lo producido

$$f_K K = (1 - \alpha)Q$$

Como:

$$P^0 f_K = P_K^0$$

$$f_K = \frac{P_K^0}{P^0}$$

Reemplazando: $\left(\frac{P_K^0}{P^0} \right) K = (1 - \alpha)Q$

Por lo tanto: $\frac{P_K^0 K}{P^0 Q} = (1 - \alpha)$

Participación de K en el valor de lo producido. Entonces, la participación relativa de L respecto a K será:

$$\frac{\frac{P_L^0 L}{P^0 Q}}{\frac{P_K^0 K}{P^0 Q}} = \frac{P_L^0 L}{P_K^0 K} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

4. Demuestre que para una empresa competitiva que trabaja con una función de producción Cobb-Douglas, el monto de la planilla de salarios sólo depende del costo del capital, y no del precio del bien final.

Respuesta:

$$Q = AL^\alpha K^{1-\alpha} \quad \text{donde } 0 < \alpha < 1 \quad \text{y} \quad A > 0$$

Equilibrio para la empresa eficiente: $\frac{f_L}{f_K} = \frac{P_L^0}{P_K^0}$

$$f_L = \alpha \frac{Q}{L}$$

$$f_K = (1 - \alpha) \frac{Q}{K}$$

Reemplazando en: $\frac{f_L}{f_K} = \frac{P_L^0}{P_K^0}$

Entonces:

$$\left(\alpha \frac{Q}{L} \right) \left(\frac{K}{(1 - \alpha)Q} \right) = \frac{P_L^0}{P_K^0}$$

$$\frac{\alpha K}{(1 - \alpha)L} = \frac{P_L^0}{P_K^0}$$

$$P_L^0 L = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} K P_K^0$$

El valor total de la planilla depende del gasto total en el insumo capital, según el coeficiente $\frac{\alpha}{1 - \alpha}$ de participación relativa de L con relación a la del K.

5. Cuando un empresario produce Q^0 utiliza 20 unidades de K y 5 unidades de L, dado los precios de $P_K^0 = 2$ y $P_L^0 = 4$. Pero al subir el precio de L a 6, el empresario, para minimizar su costo, contrata 22 unidades de K y 4 unidades de L. Muestre que la participación relativa del trabajo respecto a la del capital mejoró y determine la elasticidad de sustitución.

Respuesta:

$$\frac{P_L^0}{P_K^0} = \frac{4}{2} \quad \frac{K^0}{L^0} = \frac{20}{5} \quad CT = [(4)(5) + (2)(20)] = 60$$

$$\frac{P_L^1}{P_K^1} = \frac{6}{2} \quad \frac{K^1}{L^1} = \frac{22}{4} \quad CT' = [(6)(4) + (2)(22)] = 68$$

Participación relativa inicial: $\frac{(4)(5)}{(2)(20)} = \frac{20}{40} = 0.5$

Participación relativa final: $\frac{(6)(4)}{(2)(22)} = \frac{24}{44} = 0.545$

La participación relativa del trabajo $\left(\frac{P_L^0}{P_K^0} \right)$ mejoró. Esto es así porque $\sigma < 1$:

*elasticidad
de sustitución*

$$\sigma = \frac{\left[\frac{d(K/L)}{K/L} \right]}{\left[\frac{d(P_L/P_K)}{P_L/P_K} \right]} = \left[\frac{d(K/L)}{d(P_L/P_K)} \right] \left[\frac{P_L/P_K}{K/L} \right]$$

$$\left(\frac{P_L}{P_K} \right)^0 = \frac{4}{2} = 2$$

$$\left(\frac{K}{L}\right)^0 = \frac{20}{5} = 4$$

$$d\left(\frac{K}{L}\right) = \left(\frac{K}{L}\right)' - \left(\frac{K}{L}\right)^0$$

$$d\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{22}{4} - \frac{20}{5} = 1.5$$

$$d\left(\frac{P_L}{P_K}\right) = \left(\frac{P_L}{P_K}\right)' - \left(\frac{P_L}{P_K}\right)^0$$

$$d\left(\frac{P_L}{P_K}\right) = \frac{6}{2} - \frac{4}{2} = 1$$

Reemplazando en la fórmula:

$$\sigma = \left(\frac{1.5}{1}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{3}{4} < 1$$

El alza en el precio relativo del factor trabajo (L), mejora su participación relativa en el valor del producto: el empresario no consigue cancelar la apreciación relativa de P_L con una sustitución de L por K.

VIII.2 Mercado de factores

1. Un empresario utiliza un insumo L que adquiere a un precio fijo $P_L^0 = 5$ para producir Q . Las funciones de demanda y de producción son:

$$P = 85 - 3Q$$

$$Q = 2\sqrt{L}$$

Determinar los valores de P , Q y L que maximizan el beneficio cuando el empresario es:

- a) Competitivo en el mercado de factores y competitivo en el mercado de bienes.
- b) Monopolista en el mercado de bienes y competitivo en el mercado de factores.

Respuesta:

- a) **Mercado de bienes: competencia**
Mercado de factores: competencia

$$VPMg_L = P_L^0$$

$$VPMg_L = f_L P$$

Sus componentes:

$$f_L = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

$$P = 85 - 3Q$$

Reemplazando la función de producción:

$$P = 85 - 3(2\sqrt{L})$$

$$P = 85 - 6\sqrt{L}$$

Por lo tanto:

$$VPMg_L = \frac{1}{\sqrt{L}}(85 - 6\sqrt{L})$$

Entonces:

$$VPMg_L = P_L^0$$

$$\frac{1}{\sqrt{L}}(85 - 6\sqrt{L}) = 5$$

$$85 - 6\sqrt{L} = 5\sqrt{L}$$

$$85 = 11\sqrt{L}$$

$$\sqrt{L} = \frac{85}{11}$$

$$L = 59.71$$

Reemplazando:

$$P_L^0 = \frac{1}{\sqrt{59.71}}(85 - 6\sqrt{59.71}) = 5$$

Dado que $f_L P = P_L^0$ en equilibrio

$$Q = 2\sqrt{L}$$

$$Q = 2\sqrt{59.71}$$

$$Q = 15.45$$

$$P = 85 - 3Q$$

$$P = 85 - 3(15.45)$$

$$P = 38.64$$

Los beneficios:

$$\pi = IT - CT$$

$$\pi = [(38.64)(15.45)] - [(5)(59.71)]$$

$$\pi = 596.99 - 298.55$$

$$\pi = 298.44$$

b) Mercado de bienes: monopolio

Mercado de factores: competencia

$$P_L^0 = \text{PRIMA}_L$$

donde:

$$\text{PRIMA}_L = f_L \text{IMg}$$

$$f_L \equiv \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

$$IMg \equiv \frac{\partial IT}{\partial Q}$$

$$IT = 85Q - 3Q^2$$

$$IMg = 85 - 6Q$$

$$IMg = 85 - 6(2\sqrt{L})$$

$$IMg = 85 - 12\sqrt{L}$$

Reemplazando: $PRIMA_L = \frac{1}{\sqrt{L}}(85 - 12\sqrt{L})$

$$PRIMA_L = \frac{85}{\sqrt{L}} - 12$$

$$PRIMA_L = P_L^0$$

$$\frac{85}{\sqrt{L}} - 12 = 5$$

$$\frac{85}{\sqrt{L}} = 17$$

$$\sqrt{L} = 5$$

$$L = 25$$

Con el empleo óptimo de L se puede hallar el precio del factor, la cantidad de Q , el precio de venta del bien final así como el beneficio.

$$P_L^0 = \frac{1}{\sqrt{25}} (85 - 12\sqrt{25}) = 5$$

$$Q = 2\sqrt{L}$$

$$Q = 2\sqrt{25}$$

$$Q = 10$$

$$P = 85 - 3Q$$

$$P = 85 - 3(10)$$

$$P = 55$$

$$\pi = IT - CT$$

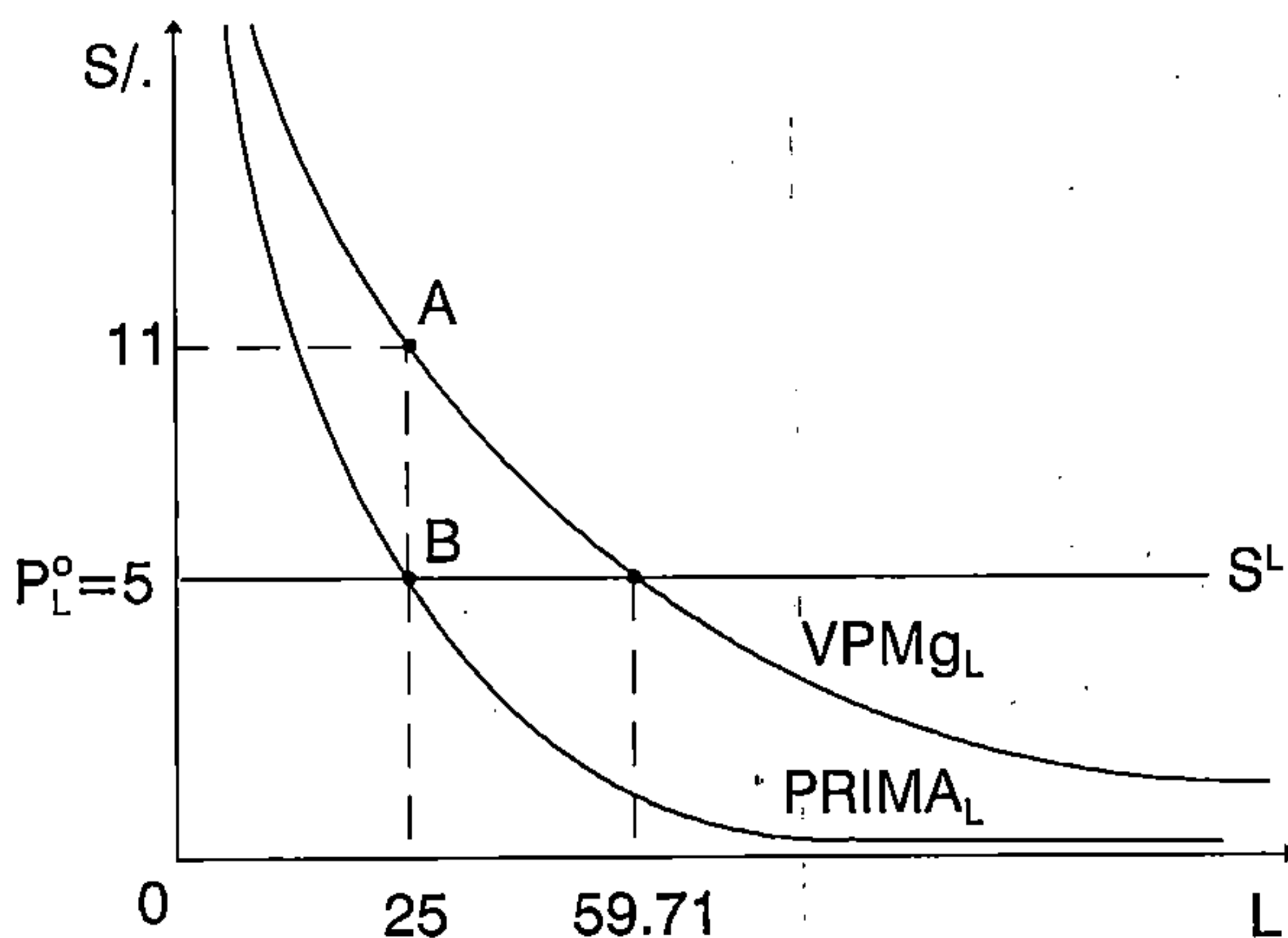
$$\pi = [(55)(10)] - [(5)(25)]$$

$$\pi = 550 - 125$$

$$\pi = 425$$

La firma monopólica reduce la producción respecto a la de la competencia y consecuentemente reduce también el empleo del factor. Esta reducción es una medida de ineficiencia social del monopolio, pero no de ineficiencia privada puesto que el beneficio del productor se incrementa. Ver gráfico N° VIII.2.1.

Gráfico N° VIII.2.1



$\overline{AB}$: Explotación monopólica del factor L

2. Un monopsonista tiene las siguientes funciones de producción y de oferta de trabajo:

$$Q = 15L^2 - 0.2L^3$$

$$P_L = 144 + 23.4L$$

Si vende su producto en un mercado competitivo, donde $P^o = 3$; ¿cuáles serán los valores de Q, L y P_L que maximizan su beneficio?

Respuesta:

$$VPMg_L = \frac{dQ}{dL} \cdot P^o = GAMI_L$$

Condición de equilibrio del monopsonista que vende su producto en mercados competitivos.

El valor del producto marginal:

$$VPMg_L = P^0 f_L$$

$$f_L \equiv \frac{dQ}{dL} = 30L - 0.6L^2$$

$$P^0 = 3$$

$$VPMg_L = 90L - 1.8L^2$$

El gasto marginal:

$$GAMI_L \equiv \frac{dCV}{dL}$$

Definición del gasto marginal en el insumo L donde:

$$CV = P_L L$$

$$CV = (144 + 23.4L)(L)$$

$$CV = 144L + 23.4L^2$$

$$\frac{\partial CV}{\partial L} = GAMI_L = 144 + 46.8L$$

Reemplazando en la igualdad:

$$VPMg_L = GAMI_L$$

$$90L - 1.8L^2 = 144 + 46.8L$$

$$1.8L^2 - 43.2L + 144 = 0$$

$$L^2 - 24L + 80 = 0$$

$$L = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 320}}{2}$$

$$L = \frac{24 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{24 \pm 16}{2}$$

$$L_1 = 20$$

$$L_2 = 4$$

La condición de segundo orden:

$$GAMI'_L > VPMg'_L$$

Donde: $\frac{d^2 CV}{dL^2} \equiv GAMI'_L$ y $\frac{d^2 VPMg_L}{dL^2} \equiv VPMg'_L$

$$GAMI'_L = 46.8$$

$$VPMg'_L = 90 - 3.6L$$

$$\text{si } L = 4: VPMg'_L = 75.6$$

$$\text{si } L = 20: VPMg'_L = 18.0 \text{ y } GAMI'_L > VPMg'_L$$

El beneficio máximo se cumple cuando $L = 20$ ($L = 4$ da el beneficio mínimo). Reemplazando el valor de L en la función de producción para obtener los valores de equilibrio en el mercado de bienes:

$$Q = 15(20)^2 - 0.2(20)^3$$

$$Q = 4,400$$

$$P_L = 144 + 23.4(20)$$

$$P_L = 612$$

El beneficio del empresario:

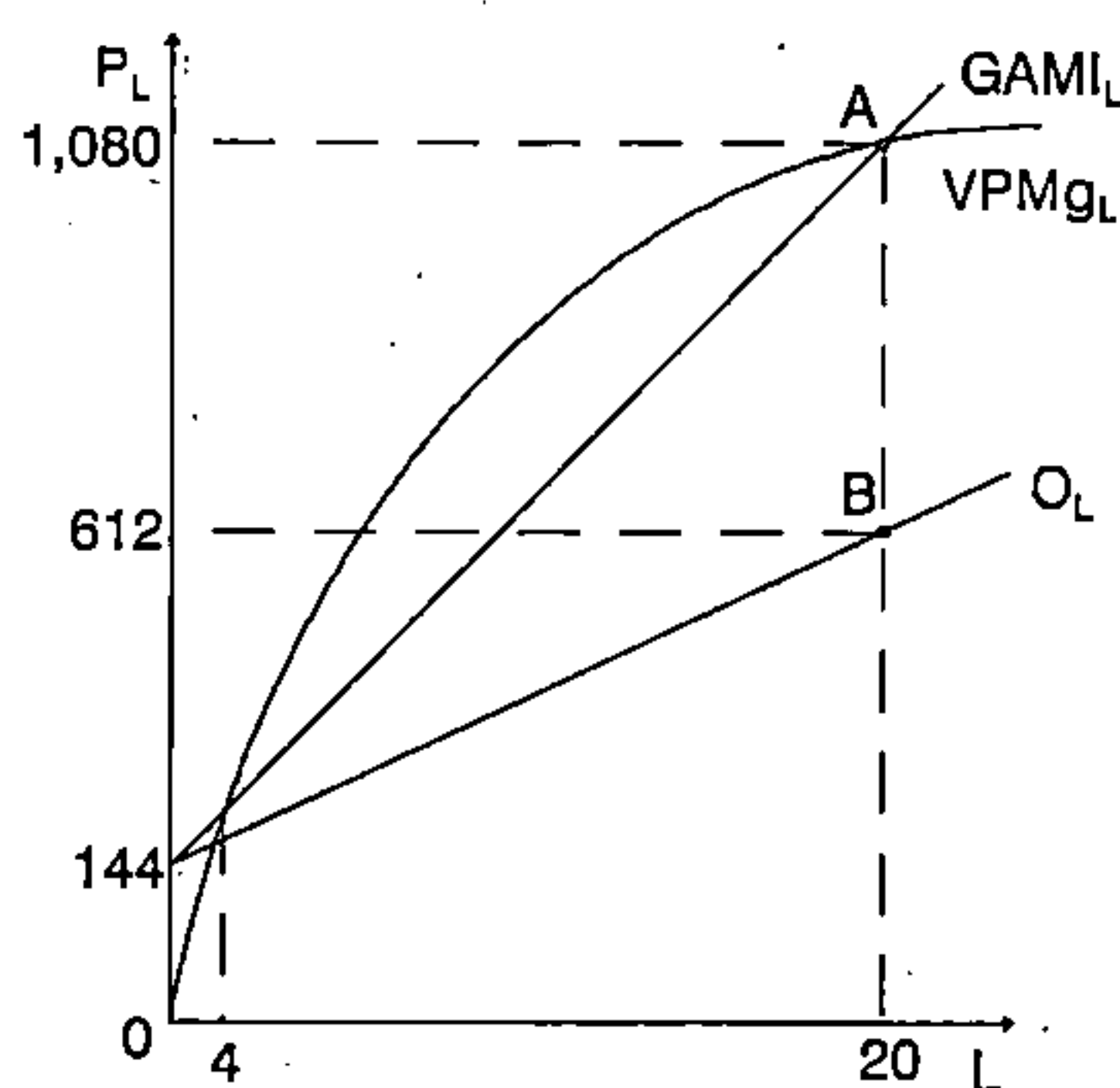
$$\pi = PQ - CT$$

$$\pi = [(3)(4,400)] - [(612)(20)]$$

$$\pi = 960$$

Obsérvese que en el punto A del gráfico siguiente, el $VPMg_L$ aún no ha llegado a su valor máximo. Luego, a este empresario monopsonista le convendría operar en la primera etapa de la producción, donde el PMg_L es mayor al PMe_L , lo cual señala lo ineficiente que resulta la vigencia de un mercado monopsónico.

Gráfico Nº VIII.2.2



$\overline{AB}$: Explotación monopsonica del factor L

3. Dada la siguiente función de producción: $Q = 3L$, la función de oferta laboral:

$$P_L = 16 + 2L$$

y la función de demanda en el mercado de bienes finales:

$$P = 30 - 2.5Q$$

Determine el equilibrio del mercado de factores y el mercado de bienes si el empresario es monopolista en el mercado de bienes y monopsonista en el mercado de factores.

Respuesta:

Condición de equilibrio: $PRIMA_L = GAMI_L$

El producto del ingreso marginal:

$$PRIMA_L = f_L IMg$$

donde:

$$f_L \equiv \frac{dQ}{dL} = 3$$

$$IMg = 30 - 5Q$$

$$IMg = 30 - 5(3L)$$

$$IMg = 30 - 15L$$

Reemplazando: $PRIMA_L = 3(30 - 15L)$

$$PRIMA_L = 90 - 45L$$

El gasto marginal:

$$GAMI_L \equiv \frac{dCV}{dL} = 16 + 4L$$

Porque:

$$CV = P_L L$$

$$CV = (144 + 23.4L)(L)$$

$$CV = 144L + 23.4L^2$$

Reemplazando en la igualdad:

$$PRIMA_L = GAMI_L$$

$$90 - 45L = 16 + 4L$$

$$74 = 49L$$

$$L = 1.51$$

El salario se halla reemplazando el número de unidades del servicio-trabajo en la función de oferta laboral:

$$P_L = 16 + 2(1.51)$$

$$P_L = 19.02$$

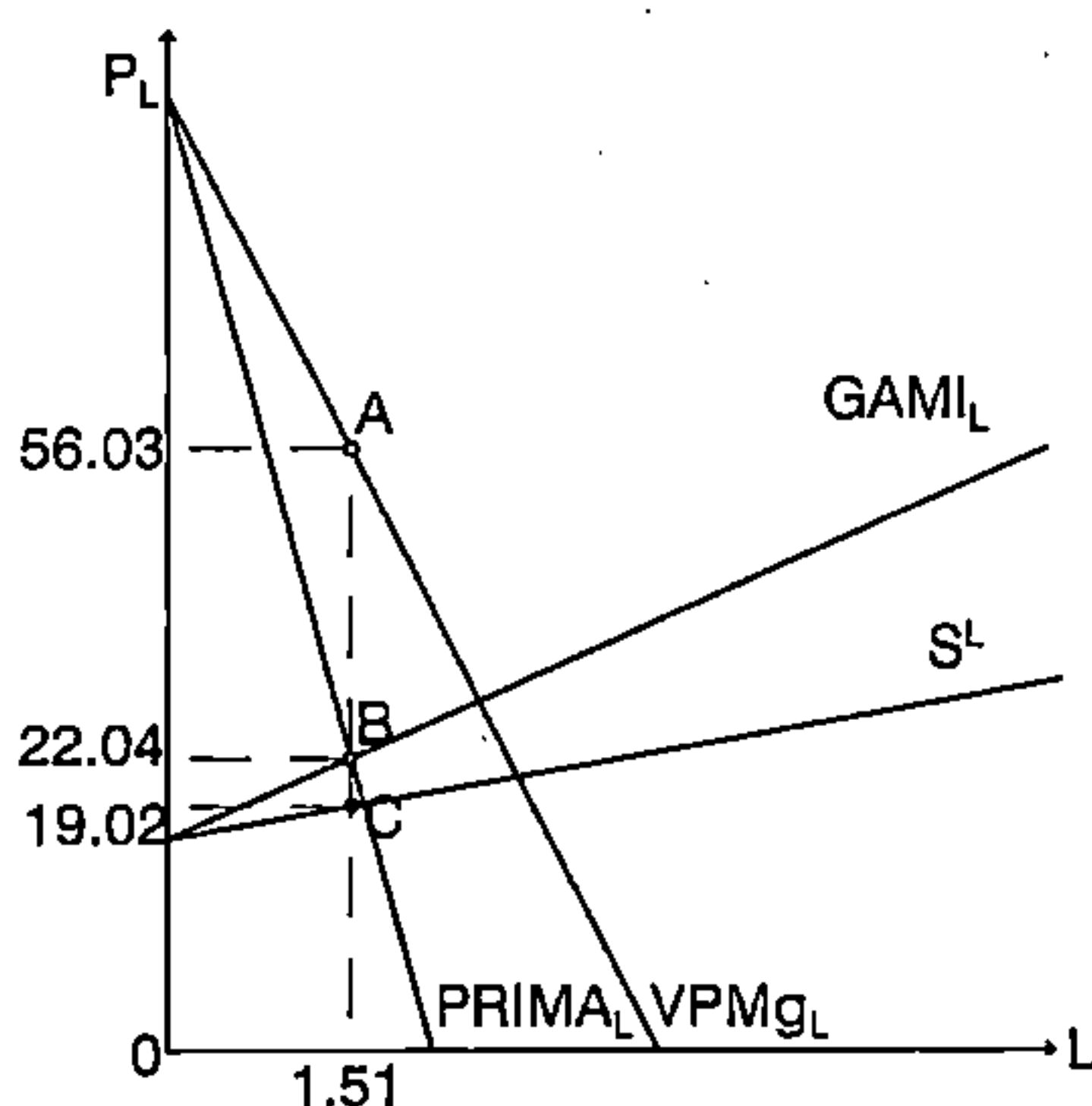
La producción total para el mercado de bienes será:

$$Q = 3(1.51)$$

$$Q = 4.53$$

El equilibrio del monopolista-monopsonista se observa en el gráfico N° VIII.2.3.

Gráfico N° VIII.2.3



$\overline{AB}$: Explotación monopólica del factor L

$\overline{BC}$: Explotación monopsonía del factor L

4. Un monopsonista utiliza un insumo L para producir Q, cuyo precio es $P^0 = 2.8$ (determinado por el mercado). Las funciones de producción y oferta del insumo son:

$$Q = 5L + 3L^2 - 0.03L^3$$

$$P_L = 40 + 2L$$

Determinar los valores de L, Q y P_L para los cuales el beneficio es máximo. ¿Es la función de producción del monopsonista estrictamente cóncava en un entorno del punto de equilibrio de la producción?

Respuesta:

$$VPMg_L = GAMI_L$$

Condición para maximizar el beneficio.

El valor del producto marginal:

$$VPMg_L = P^0 f_L$$

Donde: $f_L \equiv \frac{dQ}{dL} = 5 + 6L - 0.09L^2$

$$P^0 = 2.8$$

$$VPMg_L = 14 + 16.8L - 0.252L^2$$

El gasto marginal:

$$GAMI_L \equiv \frac{dCV}{dL}$$

Donde: $CV = P_L L$

$$CV = (40 + 2L)L$$

$$CV = 40L + 2L^2$$

$$GAMI_L = 40 + 4L$$

Reemplazando en la igualdad:

$$VPMg_L = GAMI_L$$

$$14 + 16.8L - 0.252L^2 = 40 + 4L$$

$$0.252L^2 - 12.8L - 26 = 0$$

$$L = \frac{128 \pm \sqrt{(12.8)^2 - 4(0.252)(26)}}{2(0.252)}$$

$$L = \frac{12.8 \pm \sqrt{137.632}}{0.504}$$

$$L = \frac{12.8 \pm 11.73}{0.504}$$

$$L_1 = 2.123$$

$$L_2 = 48.67$$

Condición de segundo orden:

$$GAMI'_L > VPMg'_L$$

$$GAMI'_L = 4$$

$$VPMg'_L = 16.8 - 0.504L$$

Reemplazando los valores de L:

$$L_1 = 2.123 \Rightarrow VPMg'_L = 15.73$$

$$L_2 = 48.67 \Rightarrow VPMg'_L = -7.73$$

La relación se cumple sólo con $L = 48.67$. Este valor se reemplaza en la función de producción para hallar Q , L y P_L de equilibrio; así como los beneficios del monopsonista.

$$Q = 5(48.67) + 3(48.67)^2 - 0.03(48.67)^3$$

$$Q = 3,891.02$$

$$IT = P^0 Q$$

$$IT = (2.8)(3,891.02)$$

$$IT = 10,894.86$$

$$P_L = 40 + 2(48.67)$$

$$P_L = 137.34$$

$$CV = (137.34)(48.67)$$

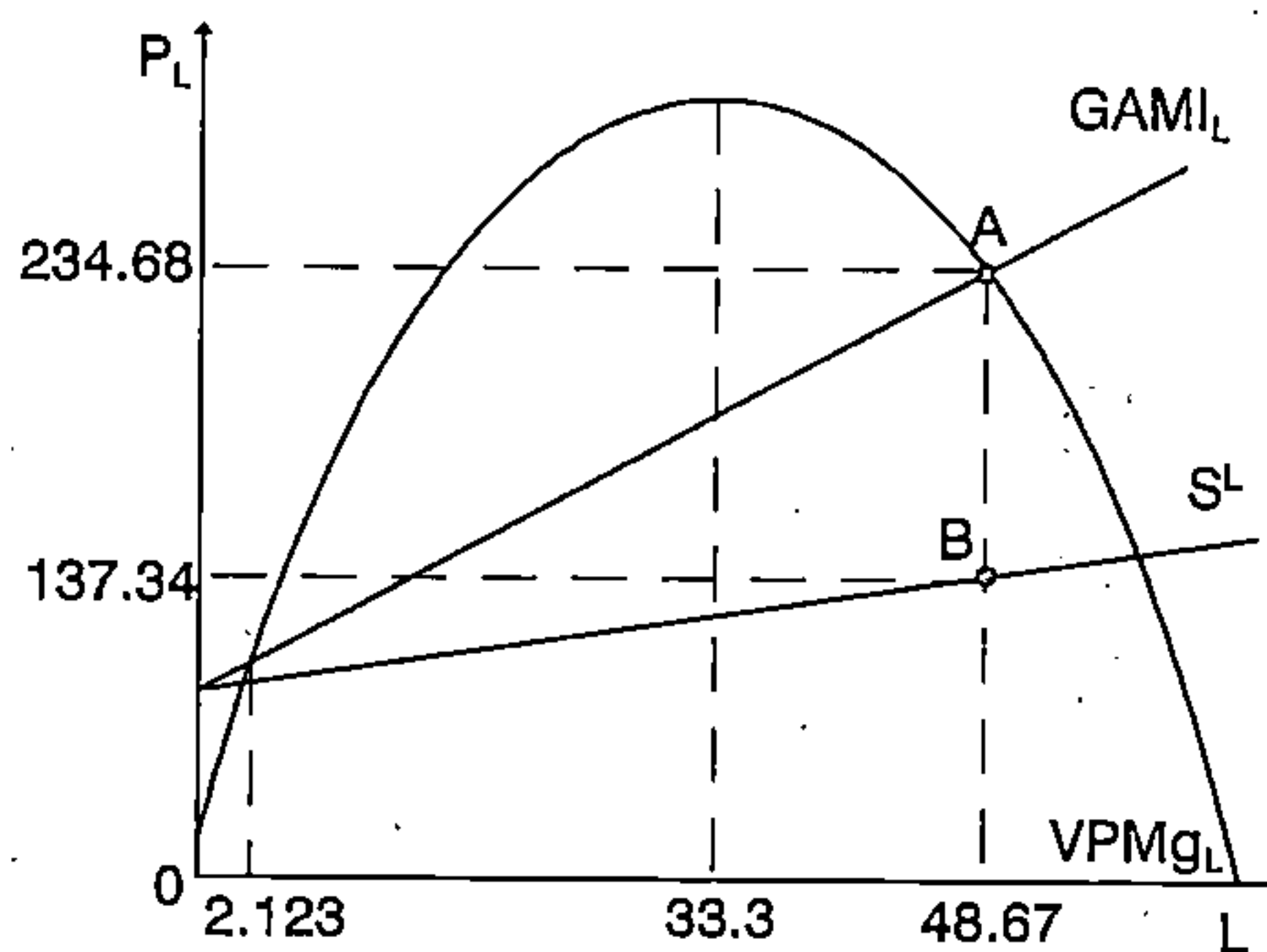
$$CV = 6,684.34$$

$$\pi = 10,894 - 6,684.34$$

$$\pi = 4,210.52$$

El siguiente gráfico muestra el equilibrio del monopsonista.

Gráfico N° VIII.2.4



$\overline{AB}$: Explotación monopsonica del factor L.

Concavidad de la función de producción

En el punto óptimo, el producto marginal del factor:

$$\frac{dQ}{dL} = 5 + 6L - 0.06L^2$$

$$PMgL = 5 + 6(48.67) - 0.09(48.67)^2$$

$$PMgL = 83.83$$

$$\frac{d^2Q}{dL^2} = 6 - 0.18L$$

$$L = 48.67$$

$$6 - 0.18(48.67) - 2 = -2.76 < 0 \quad \checkmark$$

El PMgL es decreciente

El producto medio del factor:

$$PMeL = 5 + 3L - 0.03L^2$$

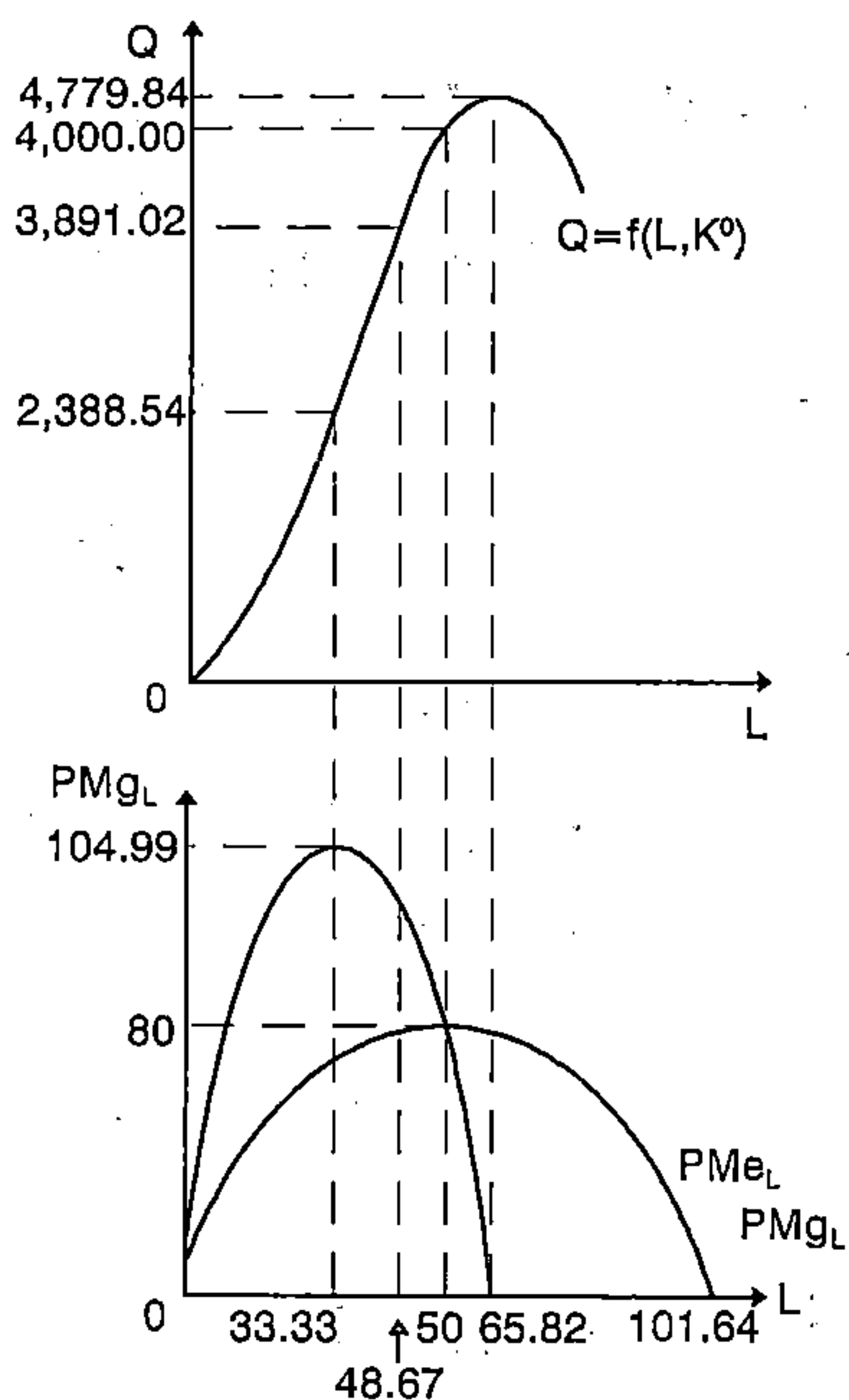
$$PMeL = 5 + 3(48.67) - 0.03(48.67)^2$$

$$PMeL = 79.94$$

El $PMgL > PMeL$ en el punto de equilibrio

Alrededor del punto de producción óptimo, la función de producción es cóncava vista desde abajo porque el PMgL es decreciente. Adicionalmente, el PMgL alcanza su punto máximo con 33.33 unidades de L antes que el PMeL (que es máximo en $L = 50$, después del punto óptimo de operación). Como se observa en el siguiente gráfico, en el punto óptimo de producción, el PMgL es decreciente pero mayor al PMeL. El empresario está operando en la primera etapa de producción, haciendo un uso ineficiente de los recursos.

Gráfico N° VIII.2.5



5. Dos duopsonistas tienen las siguientes funciones de producción:

$$q_1 = 13L_1 - 0.2L_1^2$$

$$q_2 = 12L_2 - 0.1L_2^2$$

Donde L_1 y L_2 son las cantidades de L que utiliza cada duopsonista. La función de oferta de L es:

$$P_L = 2 + 0.1(L_1 + L_2)$$

Los bienes q_1 y q_2 son vendidos en mercados competitivos donde: $P_1^0 = 2$, $P_2^0 = 3$

Determine las funciones de reacción de los duopolistas para los insumos y determine los valores de equilibrio para L_1 , L_2 , q_1 , q_2 , π_1 y π_2 asumiendo que los duopolistas se comportan en sus adquisiciones de insumos de acuerdo al postulado de Cournot.

Respuesta:

$$\pi_1 = P_1 q_1 - C_1$$

$$\pi_2 = P_2 q_2 - C_2$$

En equilibrio (para maximizar π_1 y π_2):

$$VPMg_i^L = GAM_i^L$$

Determinando las funciones de reacción:

$$\pi_1 = [P_1^0 q_1] - [P_L L_1]$$

$$\pi_1 = [2(13L_1 - 0.2L_1^2)] - [(2 + 0.1L_1 + 0.1L_2)L_1]$$

$$\pi_1 = 26L_1 - 0.4L_1^2 - 2L_1 - 0.1L_1^2 - 0.1L_2L_1$$

$$\pi_1 = 24L_1 - 0.5L_1^2 - 0.1L_2L_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial L_1} = 24 - 1L_1 - 0.1L_2 = 0$$

$$L_1 = 24 - 0.1L_2 \quad \text{Función de reacción 1}$$

$$\pi_2 = [P_2^0 q_2] - [P_L L_2]$$

$$\pi_2 = [3(12L_2 - 0.1L_2^2)] - [(2 + 0.1L_1 + 0.1L_2)L_2]$$

$$\pi_2 = 36L_2 - 0.3L_2^2 - 2L_2 - 0.1L_1L_2 - 0.1L_2^2$$

$$\pi_2 = 34L_2 - 0.4L_2^2 - 0.1L_1L_2$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial L_2} = 34 - 0.8L_2 - 0.1L_1 = 0$$

$$L_2 = 42.5 - 0.125L_1 \quad \text{Función de reacción 2}$$

Las funciones de reacción constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$L_1 + 0.1L_2 = 24$$

$$\underline{0.1L_1 + 0.8L_2 = 34}$$

$$0.1L_1 + 0.01L_2 = 2.4$$

$$\underline{-0.1L_1 - 0.8L_2 = -34}$$

$$-.079L_2 = -31.6$$

$$L_2 = 40 \quad \text{y} \quad L_1 = 20$$

Reemplazando estos datos en las funciones de producción:

$$q_1 = 13(20) - 0.2(20)^2$$

$$q_1 = 180$$

$$q_2 = 12(40) - 0.1(40)^2$$

$$q_2 = 320$$



El costo de la mano de obra para cada duopolista será:

$$P_L = 2 + 0.1(20 + 40)$$

$$P_L = 8$$

Los beneficios:

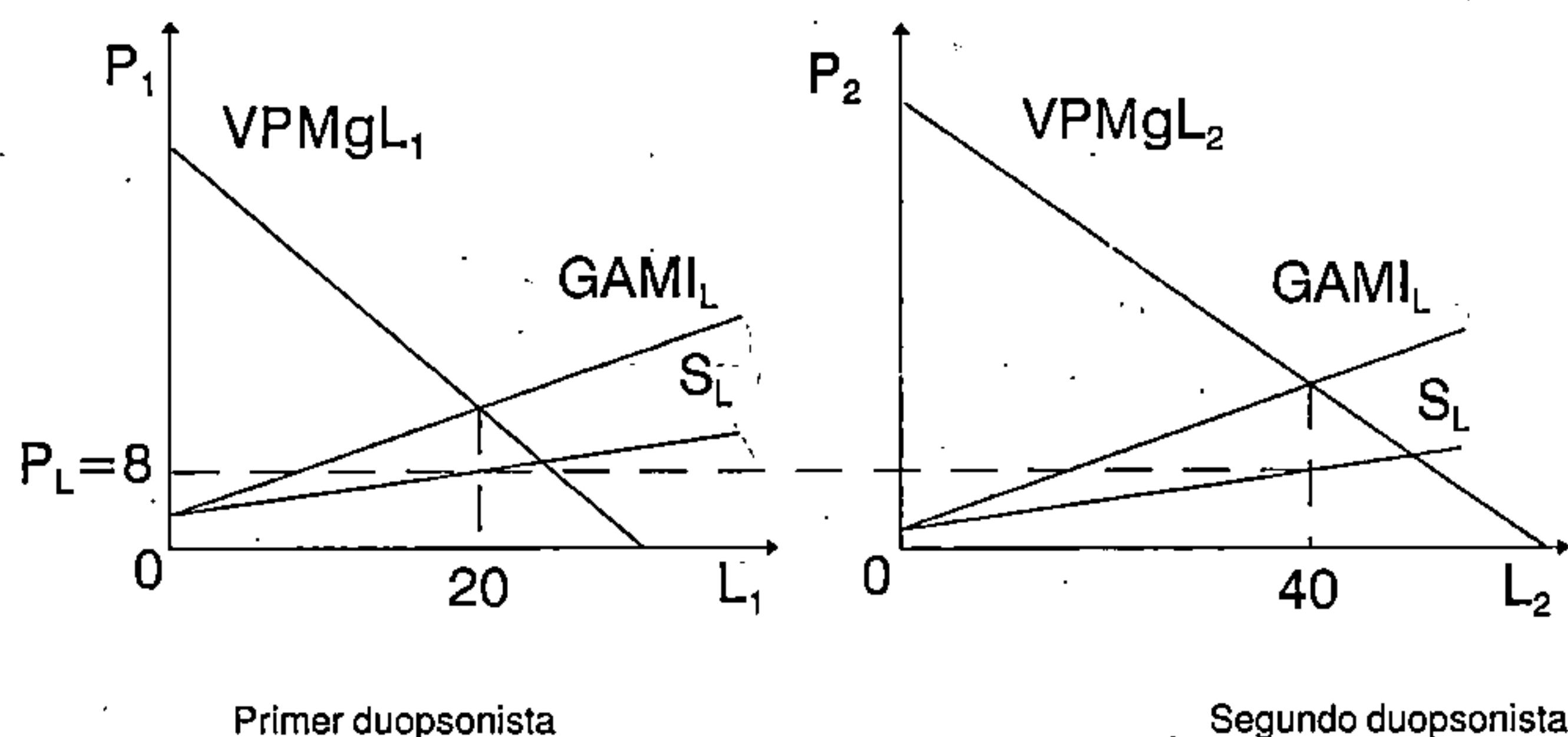
$$\pi_1 = [(2)(180)] - [(8)(20)]$$

$$\pi_1 = 200$$

$$\pi_2 = [(3)(320)] - [(8)(40)]$$

$$\pi_2 = 640$$

Gráfico N° VIII.2.6



6. Una firma estatal ha sido instruida para maximizar sus pagos por trabajador empleado (P_L). La firma produce un bien Q para lo cual opera con una función de producción:

$$Q = f(L, K)$$

y el precio del bien producido está dado en el mercado ($P = P^0$).

En cuanto al otro factor, el capital, éste es ofrecido a la empresa por el Gobierno a un precio:

$$P_K = a + bK \quad (a, b > 0)$$

¿Cuáles son las condiciones de primer orden que la firma debe cumplir para maximizar el salario pagado a cada trabajador ocupado?

Respuesta:

$$IT = P^0 Q$$

$$IT = P^0 [f(L, K)]$$

$$C_K = P_K K$$

$$C_K = (a + bK)K$$

El ingreso del trabajo es:

$$P_L L = P^0[f(L, K)] - P_K K$$

El pago medio al trabajador (salario) es:

$$P_L = \frac{P^0[f(L, K)]}{L} - \frac{P_K K}{L}$$

donde P_L debe maximizarse. (Se debe maximizar la diferencia entre el valor de la productividad media del trabajo y el valor de las remuneraciones al factor capital por trabajador).

Maximizando:

$$\frac{\partial P_L}{\partial L} = P^0 \left[\frac{(L f_L) - f}{L^2} \right] - K^0 \left[\frac{L \frac{dP_K}{dL} - P_K}{L^2} \right]$$

$$\frac{\partial P_K}{\partial L} = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial L} = \frac{P^0 f_L}{L} - \frac{P^0 Q}{L^2} + \frac{P_K K^0}{L^2} = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial L} = P^0 f_L = \left[\frac{P^0 Q}{L} - \frac{P_K K^0}{L} \right]$$

Para un máximo del salario, la firma debe igualar el VPMgL con la remuneración media del trabajo (P_L): $VPMgL = P_L$, es decir:

$$P^0 f_L = P_L$$

Ya que:

$$\frac{P^0 Q}{L} - \frac{P_K K}{L} = \frac{P^0 Q - P_K K}{L} = \frac{P_L L}{L}$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial P_L}{\partial K} = \frac{1}{L^0} [P^0 f_K] - \frac{1}{L^0} \left[P_K + K \frac{dP_K}{dK} \right]$$

$$\frac{P^0 f_K}{L^0} - \frac{P_K}{L^0} - \left(\frac{K}{L^0} \right) \left(\frac{dP_K}{dK} \right) = 0$$

$$P^0 f_K = P_K + K \frac{dP_K}{dK}$$

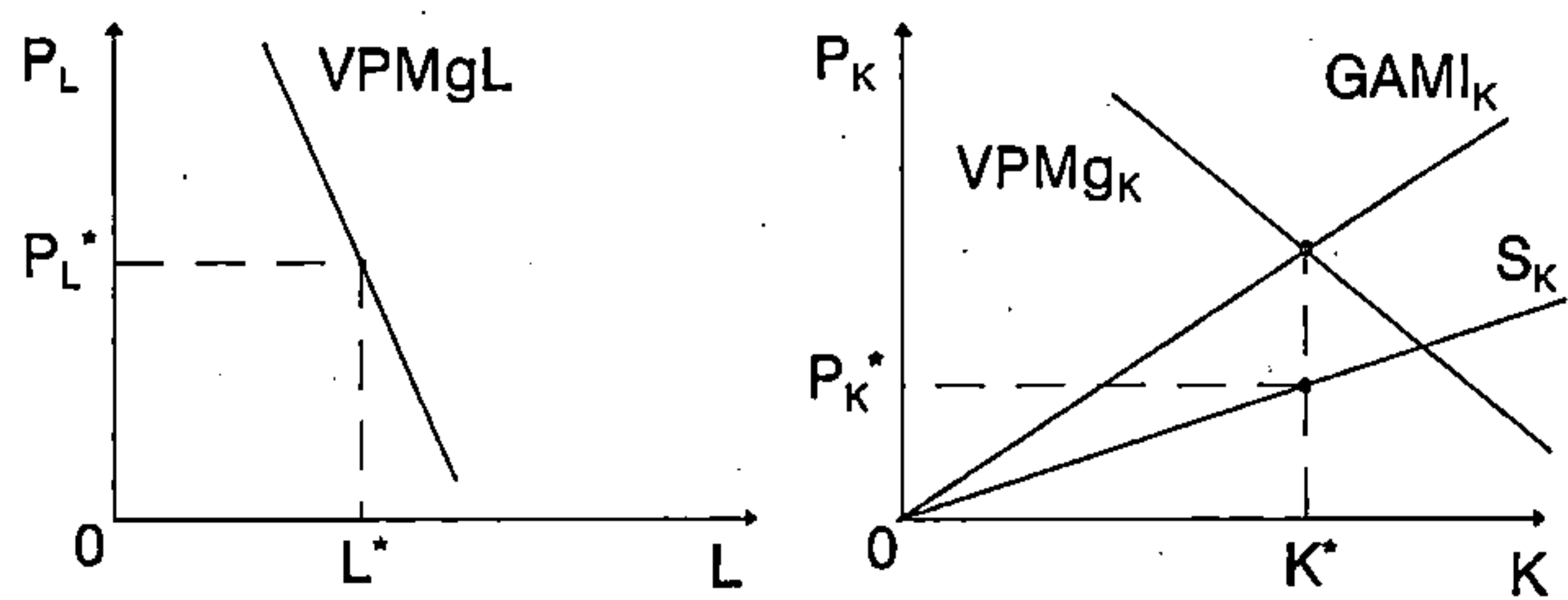
$$VPMgK = GAMI_K$$

Ya que:

$$C_K = P_K K \quad y \quad \frac{dC_K}{dK} = P_K + K \frac{dP_K}{dK}$$

La firma utiliza máquinas hasta igualar el valor de su producto marginal con su costo marginal o $GAMI_L$.

Gráfico Nº VIII.2.7



IX

Teoría del equilibrio general

IX.1 Equilibrio general en el consumo

1. En una economía hay dos consumidores con sus respectivas funciones de utilidad que consumen dos bienes:

$$U_1 = q_{11}q_{12}$$

$$U_2 = q_{21}q_{22}^2$$

Donde:

q_{ij} i : consumidor

j : bien

Al principio, el consumidor 1 tiene 20 de q_{11} y 160 de q_{12} , mientras que el segundo consumidor dispone de $q_{21} = 180$ y $q_{22} = 60$.

Determinar las cantidades consumidas por cada consumidor después de haberse realizado un intercambio libre que les permita incrementar su nivel de satisfacción.

Respuesta:

La dotación inicialmente asignada constituye el total de los productos existentes.

$$q_{11} + q_{21} = q_1^0$$

$$q_{12} + q_{22} = q_2^0$$

Cada consumidor se encuentra en un punto en el espacio de bienes o Caja de Edgeworth donde no existe igualdad entre los bienes asignados y los que ellos quisieran consumir para maximizar su bienestar.

El presupuesto que tiene cada uno (el valor de mercado de las asignaciones iniciales) es el límite al que deben ajustarse para maximizar sus respectivas utilidades. Por lo tanto, el valor de las dotaciones iniciales debe ser igual al valor de los consumos óptimos:

El consumidor 1:

$$P_1 q_{11} + P_2 q_{12} = P_1 q_{11}^0 + P_2 q_{12}^0$$

$$P_1 q_{11} - P_1 q_{11}^0 + P_2 q_{12} - P_2 q_{12}^0 = 0$$

$$P_1 [q_{11} - q_{11}^0] + P_2 [q_{12} - q_{12}^0] = 0$$

Restricción presupuestal del primer consumidor en términos de sus excesos de demanda.

El consumidor 2:

$$P_1 q_{21} + P_2 q_{22} = P_1 q_{21}^0 + P_2 q_{22}^0$$

$$P_1 q_{21} - P_1 q_{21}^0 + P_2 q_{22} - P_2 q_{22}^0 = 0$$

$$P_1 [q_{21} - q_{21}^0] + P_2 [q_{22} - q_{22}^0] = 0$$

Restricción presupuestal del segundo consumidor en términos de sus excesos de demanda, donde q_{ij} es la tenencia óptima de cada bien para cada consumidor y cuyo consumo maximiza su bienestar.

Al agrupar las cantidades según los precios, se ha encontrado el exceso de demanda y el exceso de oferta existente para cada bien. Los consumidores deben deshacerse o adquirir más unidades de dicho bien para lograr el equilibrio.

Adicionalmente, se conoce que para un bien, el exceso de demanda de un consumidor es el exceso de oferta del otro consumidor. Por ello la suma de ambos debe anularse, y la dotación inicial total de cada bien debe permanecer inalterada.

$$q_{11}^0 + q_{21}^0 = q_1^0$$

$$q_{11} + q_{21} = q_1^0$$

$$q_{11} + q_{21} = q_{11}^0 + q_{21}^0$$

$$(q_{11} - q_{11}^0) + (q_{21} - q_{21}^0) = 0$$

$$q_{12}^0 + q_{22}^0 = q_2^0$$

$$q_{12} + q_{22} = q_2^0$$

$$q_{12} + q_{22} = q_{12}^0 + q_{22}^0$$

$$(q_{12} - q_{12}^0) + (q_{22} - q_{22}^0) = 0$$

Construyendo la función de Lagrange, se maximiza la función de utilidad de cada consumidor, sujeto a su restricción presupuestal expresada en términos de la suma de sus excesos de oferta y/o demanda, igualada a cero.

Para el primer consumidor:

$$L_1 = f(q_{11}, q_{12}) + \lambda_1 [P_1(q_{11} - q_{11}^0) + P_2(q_{12} - q_{12}^0)]$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial q_{11}} = f_{11} + \lambda_1 P_1 = 0$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial q_{12}} = f_{12} + \lambda_1 P_2 = 0$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_1} = P_1(q_{11} - q_{11}^0) + P_2(q_{12} - q_{12}^0) = 0$$

De las dos primeras derivadas se puede extraer la condición de primer orden para maximizar la utilidad del primer consumidor.

$$\frac{f_{11}}{f_{12}} = \frac{P_1}{P_2}$$

Reemplazando en la tercera ecuación que previamente se divide entre $P_2 > 0$:

$$P_1(q_{11} - q_{11}^0) + P_2(q_{12} - q_{12}^0) = 0$$

$$\frac{P_1}{P_2}(q_{11} - q_{11}^0) + \frac{P_2}{P_2}(q_{12} - q_{12}^0) = \frac{0}{P_2}$$

$$\frac{f_{11}}{f_{12}}(q_{11} - q_{11}^0) + (q_{12} - q_{12}^0) = 0$$

$$f_{11}(q_{11} - q_{11}^0) + f_{12}(q_{12} - q_{12}^0) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

Se repite el procedimiento para el otro consumidor:

$$L_2 = f(q_{21}, q_{22}) + \lambda_2 [P_1(q_{21} - q_{21}^0) + P_2(q_{22} - q_{22}^0)]$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial q_{21}} = f_{21} + \lambda_2 P_1 = 0$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial q_{22}} = f_{22} + \lambda_2 P_2 = 0$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_2} = P_1(q_{21} - q_{21}^0) + P_2(q_{22} - q_{22}^0) = 0$$

De las primeras ecuaciones se obtiene:

$$\frac{P_1}{P_2}(q_{21} - q_{21}^0) + \frac{P_2}{P_2}(q_{22} - q_{22}^0) = \frac{0}{P_2}$$

Como: $\frac{f_{21}}{f_{22}} = \frac{P_1}{P_2}$

$$\frac{f_{21}}{f_{22}}(q_{21} - q_{21}^0) + (q_{22} - q_{22}^0) = 0$$

$$f_{21}(q_{21} - q_{21}^0) + f_{22}(q_{22} - q_{22}^0) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

Se tienen cuatro incógnitas y dos ecuaciones. Las restantes ecuaciones se pueden obtener de las relaciones iniciales:

$$(q_{11} - q_{11}^0) + (q_{21} - q_{21}^0) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$(q_{12} - q_{12}^0) + (q_{22} - q_{22}^0) = 0 \dots\dots\dots (4)$$

La solución de las cuatro ecuaciones permitirá encontrar las cantidades óptimas para cada individuo. Utilizando las ecuaciones, y los datos del problema, se hallan primero las derivadas parciales de cada función de utilidad respecto de cada bien:

$$f_{11} = q_{12}$$

$$f_{12} = q_{11}$$

$$f_{21} = q_{22}^2$$

$$f_{22} = 2q_{21}q_{22}$$

Estos resultados se reemplazan en las ecuaciones (1) a (4), recordando que:

$$q_{11}^0 = 20$$

$$q_{12}^0 = 120$$

$$q_{21}^0 = 180$$

$$q_{22}^0 = 60$$

$$(1) \quad f_{11}(q_{11} - q_{11}^0) + f_{12}(q_{12} - q_{12}^0) = 0$$

$$q_{12}(q_{11} - 20) + q_{11}(q_{12} - 120) = 0$$

$$(2) \quad f_{21}(q_{21} - q_{21}^0) + f_{22}(q_{22} - q_{22}^0) = 0$$

$$q_{22}^2(q_{21} - 180) + 2q_{21}q_{22}(q_{22} - 60) = 0$$

$$(3) \quad (q_{11} - q_{11}^0) + (q_{21} - q_{21}^0) = 0$$

$$(q_{11} - 20) + (q_{21} - 180) = 0$$

$$q_{11} + q_{21} = q_1 = 200$$

$$(4) \quad (q_{12} - q_{12}^0) + (q_{22} - q_{22}^0) = 0$$

$$(q_{12} - 120) + (q_{22} - 60) = 0$$

$$q_{12} + q_{22} = q_2 = 180$$

Reemplazando (3) y (4) en (1):

$$(180 - q_{22})(180 - q_{21}) + (200 - q_{21})(60 - q_{22}) = 0$$

De donde:
$$q_{21} = \frac{22,200 - 190q_{22}}{120 - q_{22}} \dots\dots\dots (6)$$

Partiendo de (2):

$$q_{22}^2(q_{21} - 180) + 2q_{21}q_{22}(q_{22} - 60) = 0$$

$$q_{22}^2q_{21} - 180q_{22}^2 + 2q_{21}q_{22}^2 - 120q_{21}q_{22} = 0$$

$$3q_{22}^2q_{21} - 180q_{22}^2 - 120q_{21}q_{22} = 0$$

$$3q_{21}q_{22}(q_{22} - 40) = 180q_{22}^2$$

$$q_{21} = \frac{180q_{22}^2}{3q_{22}(q_{22} - 40)}$$

$$q_{21} = \frac{60q_{22}}{q_{22} - 40} \dots\dots\dots (7)$$

Igualando (6) a (7):

$$\frac{22,200 - 190q_{22}}{120 - q_{22}} = \frac{60q_{22}}{q_{22} - 40}$$

Se obtiene la ecuación:

$$130q_{22}^2 - 22,600q_{22} + 888,000 = 0$$

$$0.13q_{22}^2 - 22.6q_{22} + 888 = 0$$

Cuya solución:

$$q_{22} = \frac{22.6 \pm \sqrt{(22.6)^2 - (4)(0.13)(888)}}{2(0.13)}$$

$$q_{22} = \frac{22.6 \pm 7}{2(0.13)}$$

$$q_{22}' = 113.85$$

$$q_{22}'' = 60$$

satisface al sistema de ecuaciones de (1) a (4).

Sustituyendo esta cantidad en la ecuación (6):

$$q_{21} = \frac{22,200 - 190(113.85)}{120 - 113.85} = 92.44$$

Ambas cantidades se reemplazan en las ecuaciones (3) y (4) para encontrar el consumo óptimo del primer individuo. Así:

$$q_{11} = 107.56$$

$$q_{12} = 66.15$$

Las cantidades de solución encontradas deben haber llevado a ambos consumidores a la curva de contrato en el consumo. Por lo tanto, las tasas marginales de sustitución de q_2 por q_1 de cada consumidor deben ser iguales en el nuevo punto de consumo de los bienes:

$$U_1 = q_{11}q_{12}$$

$$dU_1^0 = q_{11}dq_{12} + q_{12}dq_{11} = 0$$

$$TMgS_{q_2/q_1}^1 \equiv -\frac{dq_{12}}{dq_{11}} = \frac{q_{12}}{q_{11}}$$

$$TMgS_{q_2/q_1}^1 \equiv -\frac{66.15}{107.56} = -0.615$$

$$U_2 = q_{21}q_{22}^2$$

$$dU_2^0 = q_{21}2q_{22}dq_{22} + q_{22}^2dq_{21} = 0$$

$$TMgS_{q_2/q_1}^2 \equiv -\frac{dq_{22}}{dq_{21}} = -\frac{q_{22}^2}{2q_{21}q_{22}}$$

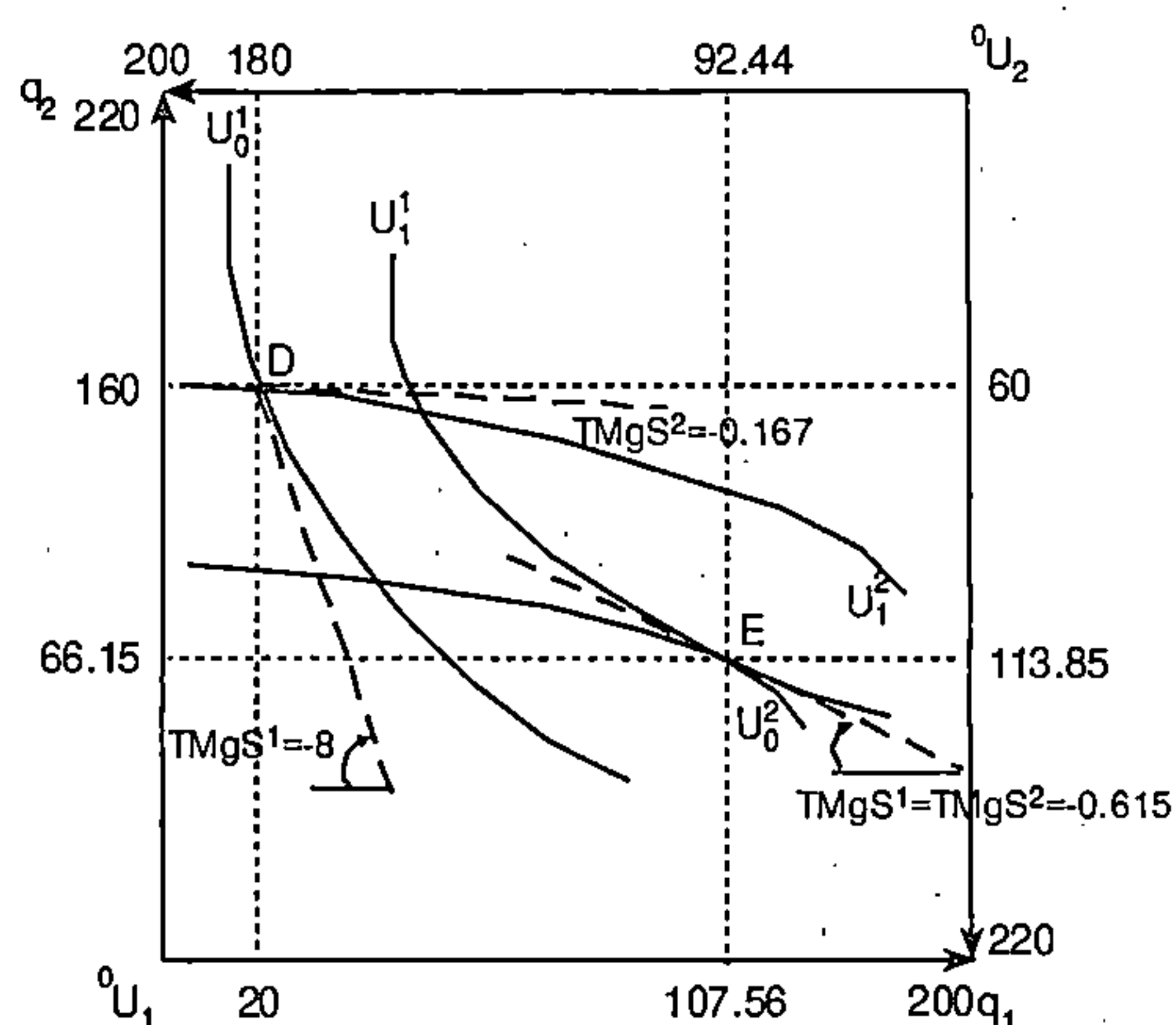
$$TMgS_{q_2/q_1}^2 \equiv -\frac{(113.85)^2}{2(92.44)(113.85)} = \frac{12,961.822}{21,048.588} = -0.615$$

El equilibrio se observa en el siguiente diagrama de Edgeworth donde D es la distribución inicial de bienes y E el punto de equilibrio sobre la curva de contrato donde :

$$TMgS_{q_2/q_1}^1 = TMgS_{q_2/q_1}^2$$

La libre negociación ha permitido incrementar el bienestar de ambos consumidores.

Gráfico N° IX.1.1



IX.2 Equilibrio general en la producción

1. Una economía produce dos bienes q_1 y q_2 utilizando dos factores de producción (L y K), siendo las respectivas funciones de producción:

$$q_1 = a_1 L_1^{0.6} K_1^{0.4}$$

$$q_2 = a_2 L_2^{0.6} K_2^{0.4} \quad \text{donde } a_1 \text{ y } a_2 > 0$$

La dotación de factores es fija:

$$L_1 + L_2 = L$$

$$K_1 + K_2 = K$$

- a) Encuentre la ecuación de la curva de contrato en la producción.
- b) Hallar la función de transformación o curva de posibilidades de producción

Respuesta:

- a) **Curva de contrato en la producción:** Condición de equilibrio:

$$TMgST_{K/L}^1 = TMgST_{K/L}^2$$

Luego:

$$f_L^1 = 0.6a_1L_1^{-0.4}K_1^{0.4}$$

$$f_K^1 = 0.4a_1L_1^{0.6}K_1^{-0.6}$$

$$f_L^2 = 0.6a_2L_2^{-0.4}K_2^{0.4}$$

$$f_K^2 = 0.4a_2L_2^{0.6}K_2^{-0.6}$$

Reemplazándolas en la igualdad inicial:

$$TMgST_{K/L}^1 = \frac{0.6a_1K_1^{0.4}L_1^{-0.4}}{0.4a_1K_1^{-0.6}L_1^{0.6}} = \frac{0.6K_1}{0.4L_1}$$

$$TMgST_{K/L}^2 = \frac{0.6a_2K_2^{0.4}L_2^{-0.4}}{0.4a_2K_2^{-0.6}L_2^{0.6}} = \frac{0.6K_2}{0.4L_2}$$

Igualando los resultados:

$$\frac{f_L^1}{f_K^1} = \frac{f_L^2}{f_K^2}$$

$$\frac{0.6K_1}{0.4L_1} = \frac{0.6K_2}{0.4L_2}$$

$$\frac{K_1}{L_1} = \frac{K_2}{L_2}$$

Pero, de acuerdo a los datos del problema:

$$K_2 = K - K_1$$

$$L_2 = L - L_1$$

Reemplazando en la relación:

$$\frac{K_1}{L_1} = \frac{K - K_1}{L - L_1}$$

$$K_1 L - K_1 L_1 = K L_1 - K_1 L_1$$

$$L_1 = \frac{L}{K} K_1$$

Curva de contrato

Y también:

$$L_2 = \frac{L}{K} K_2$$

Curva de contrato

Ya que:

$$K_1 = K - K_2$$

$$L_1 = L - L_2$$

La curva de contrato es una recta que coincide con la diagonal del diagrama de Edgeworth. Su pendiente es L/K o K/L , dependiendo de la numeración de los ejes. Es un caso especial donde:

$$\frac{K_1}{L_1} = \frac{K_2}{L_2} = \frac{K}{L}$$

b) Frontera de posibilidades de producción: Se ha determinado que:

$$L_1 = \frac{L}{K} K_1 \quad y \quad K_2 = \frac{K}{L} L_2$$

Que se reemplaza en las funciones de producción:

$$q_1 = a_1 L_1^{0.4} K_1^{0.6} = a_1 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6} K_1^{0.6} L_1^{0.4} = a_1 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6} K_1$$

$$q_2 = a_2 L_2^{0.6} K_2^{0.4} = a_2 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6} K_2^{0.6} K_2^{0.4} = a_2 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6} K_2$$

Pero: $K_2 = K - K_1$, por lo tanto:

$$q_2 = a_2 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6} (K - K_1)$$

$$q_2 = a_2 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6} K - a_2 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6} K_1$$

De donde:

$$K_1 = \frac{q_2 - a_2 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6} K}{-a_2 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6}}$$

Que se reemplaza en q_1 :

$$q_1 = a_1 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6} \left\{ \frac{q_2 - a_2 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6} K}{-a_2 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6}} \right\}$$

$$q_1 = a_1 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6} \left\{ \frac{q_2}{-a_2 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6}} \right\} + a_1 K \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6}$$

$$q_1 = \frac{a_1 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6} q_2}{-a_2 \left[\frac{L}{K} \right]^{0.6}} + K a_1 L^{0.6} K^{0.4}$$

$$q_1 = -\frac{a_1}{a_2} q_2 + a_1 L^{0.6} K^{0.4}$$

$$q_1 = a_1 L^{0.6} K^{0.4} - \frac{a_1}{a_2} q_2$$

Frontera de posibilidades de producción:

$$q_2 = a_2 L^{0.6} K^{0.4} - \frac{a_2}{a_1} q_1$$

La tasa marginal de transformación de q_2 en q_1 ($TMgT_{q_2/q_1}$) es:

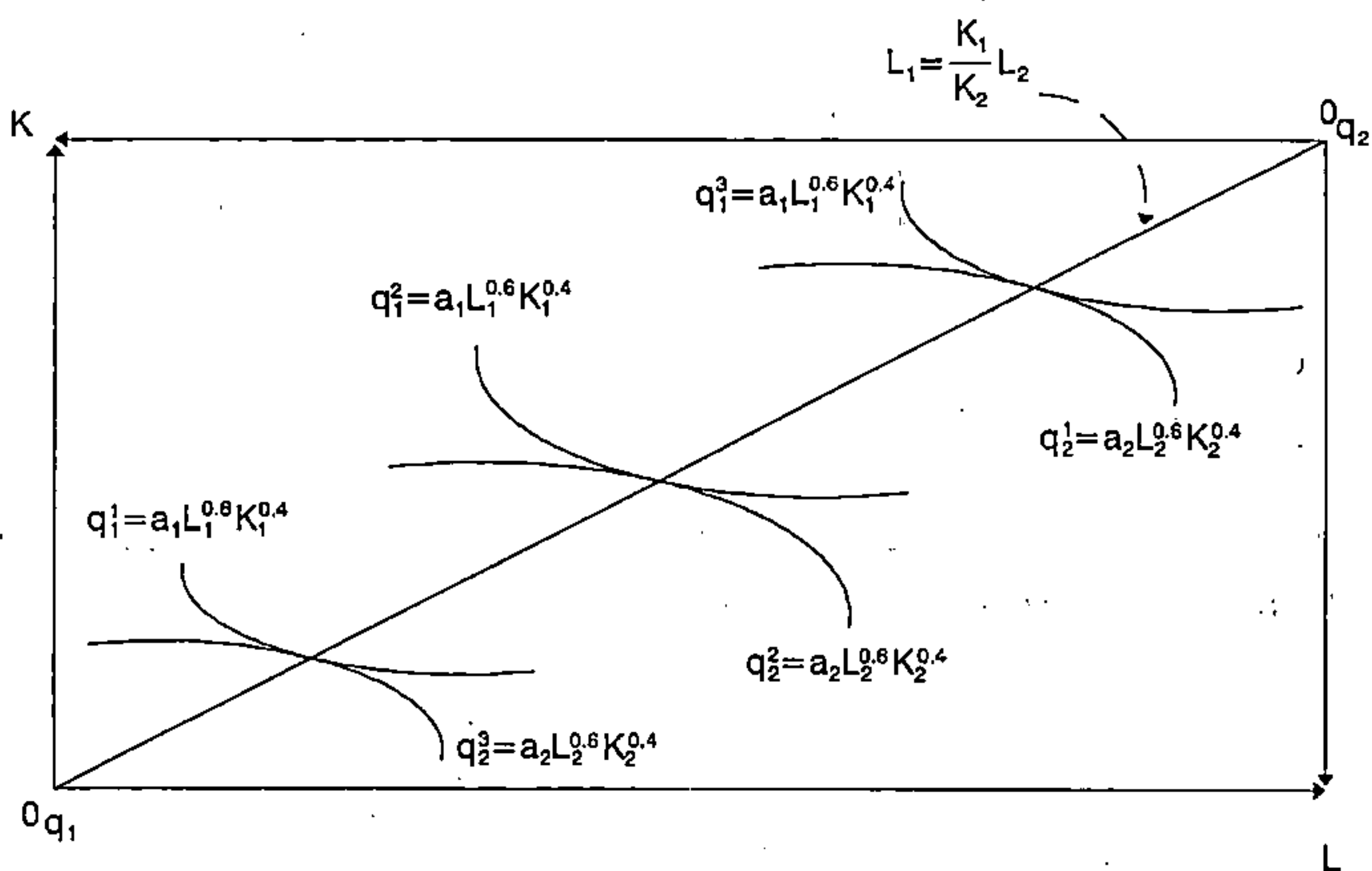
$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{a_2}{a_1} \quad y \quad \frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = 0$$

Que confirman que la función es una línea recta.

Gráfico N° IX.2.1

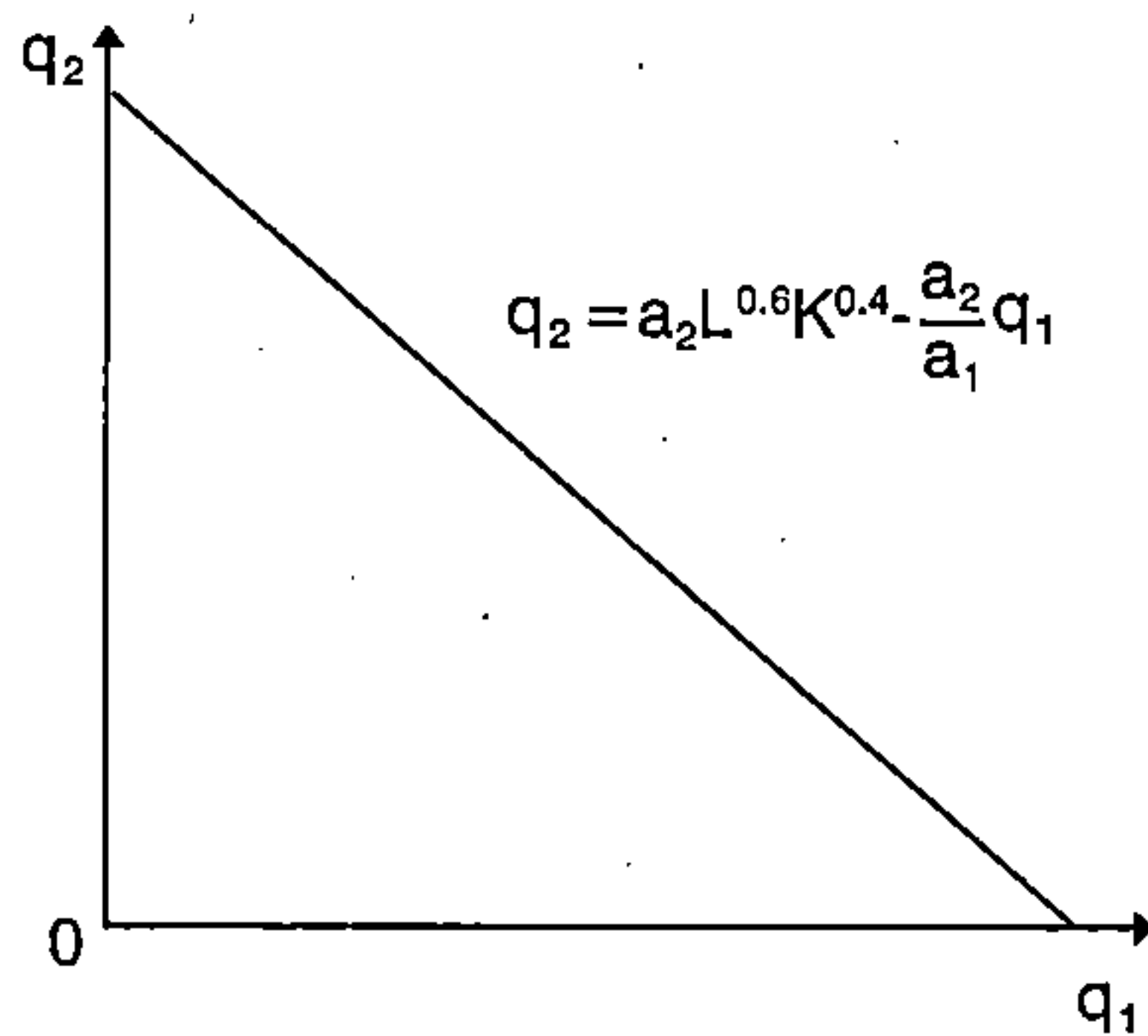
(a)

Caja de Edgeworth



(b)

Frontera de posibilidades de producción



2. Una economía produce dos bienes q_1 y q_2 con dos insumos L y K , siendo las respectivas funciones de producción:

$$q_1 = 2L_1^{0.4}K_1^{0.6}$$

$$q_2 = 10L_2^{0.4}K_2^{0.6}$$

Y la dotación de factores:

$$L = 80$$

$$L = L_1 + L_2$$

$$K = 40$$

$$K = K_1 + K_2$$

Determinar las ecuaciones de la curva de contrato de la producción y de la frontera de posibilidades de producción

Respuesta:

La condición de equilibrio:

$$TMgST_{K/L}^1 = TMgST_{K/L}^2$$

Determinando las derivadas parciales:

$$f_L^1 = 2(0.4)L_1^{-0.6}K_1^{0.6}$$

$$f_K^1 = 2(0.6)L_1^{0.4}K_1^{-0.4}$$

$$f_L^2 = 10(0.4)L_2^{-0.6}K_2^{0.6}$$

$$f_K^2 = 10(0.6)L_2^{0.4}K_2^{-0.4}$$

Reemplazando en la igualdad:

$$\frac{f_L^1}{f_K^1} = \frac{f_L^2}{f_K^2}$$

$$\frac{0.8L_1^{-0.6}K_1^{0.6}}{1.2L_1^{0.4}K_1^{-0.4}} = \frac{4L_2^{-0.6}K_2^{0.6}}{6L_2^{0.4}K_2^{-0.4}}$$

$$\frac{K_1}{L_1} = \frac{K_2}{L_2} \quad \text{ó} \quad \frac{L_1}{K_1} = \frac{L_2}{K_2}$$

De donde:

$$L_1 = \frac{K_1}{K_2}L_2 \quad \text{y} \quad L_2 = \frac{K_2}{K_1}L_1 \quad \text{Curva de contrato (es una recta)}$$

Las dotaciones iniciales:

$$L_2 = L - L_1$$

$$K_2 = K - K_1$$

Se reemplazan en la relación existente:

$$L_1 = \frac{K_1(L - L_1)}{K - K_1}$$

$$KL_1 - K_1L_1 = K_1L - K_1L_1$$

De donde:

$$L_1 = \frac{L}{K}K_1 \quad \text{y} \quad L_2 = \frac{L}{K}K_2$$

Dado:

$$L_1 = L - L_2$$

$$K_1 = K - K_2$$

Estos últimos resultados (diferentes versiones de la curva de contrato) se reemplazan en las funciones de producción. Para el primer producto:

$$q_1 = 2L_1^{0.4}K_1^{0.6} = 2\left[\frac{L}{K}\right]^{0.4} K_1^{0.4}K_1^{0.6} = 2\left[\frac{L}{K}\right]^{0.4} K_1$$

Reemplazando valores de $L = 80$ y $K = 40$.

$$q_1 = 2\left[\frac{80}{40}\right]^{0.4} K_1$$

$$q_1 = 2[2]^{0.4} K_1$$

$$q_1 = 2[1.3195]K_1 \quad \text{ó} \quad K_1 = \frac{q_1}{2.639}$$

Para el segundo producto:

$$q_2 = 10L_2^{0.4}K_2^{0.6} = 10\left[\frac{L}{K}\right]^{0.4} K_2^{0.4}K_2^{0.6} = 10\left[\frac{L}{K}\right]^{0.4} K_2$$

$$q_2 = 10\left[\frac{80}{40}\right]^{0.4} K_2$$

$$q_2 = 10(1.3195)K_2$$

$$q_2 = 13.195K_2$$

$$q_2 = 13.195[K - K_1]$$

$$q_2 = 13.195K - 13.195K_1$$

$$q_2 = 13.195[40] - 13.195\left[\frac{q_1}{2.639}\right]$$

$$q_2 = 527.804 - 5q_1$$

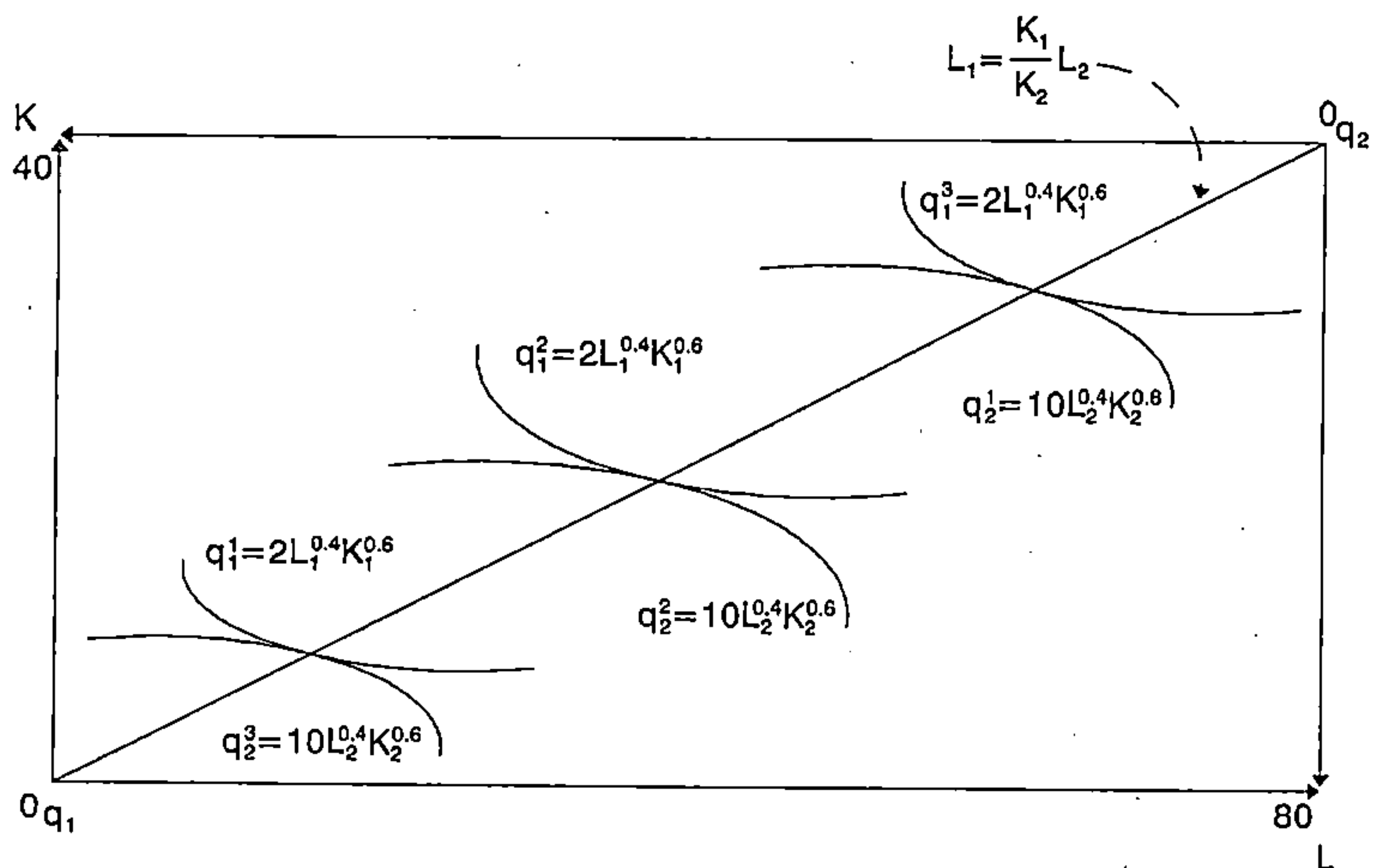
La frontera de posibilidades de producción es una recta cuya pendiente es constante:

$$TMgT_{q_2/q_1} \equiv -\frac{dq_2}{dq_1} = -5$$

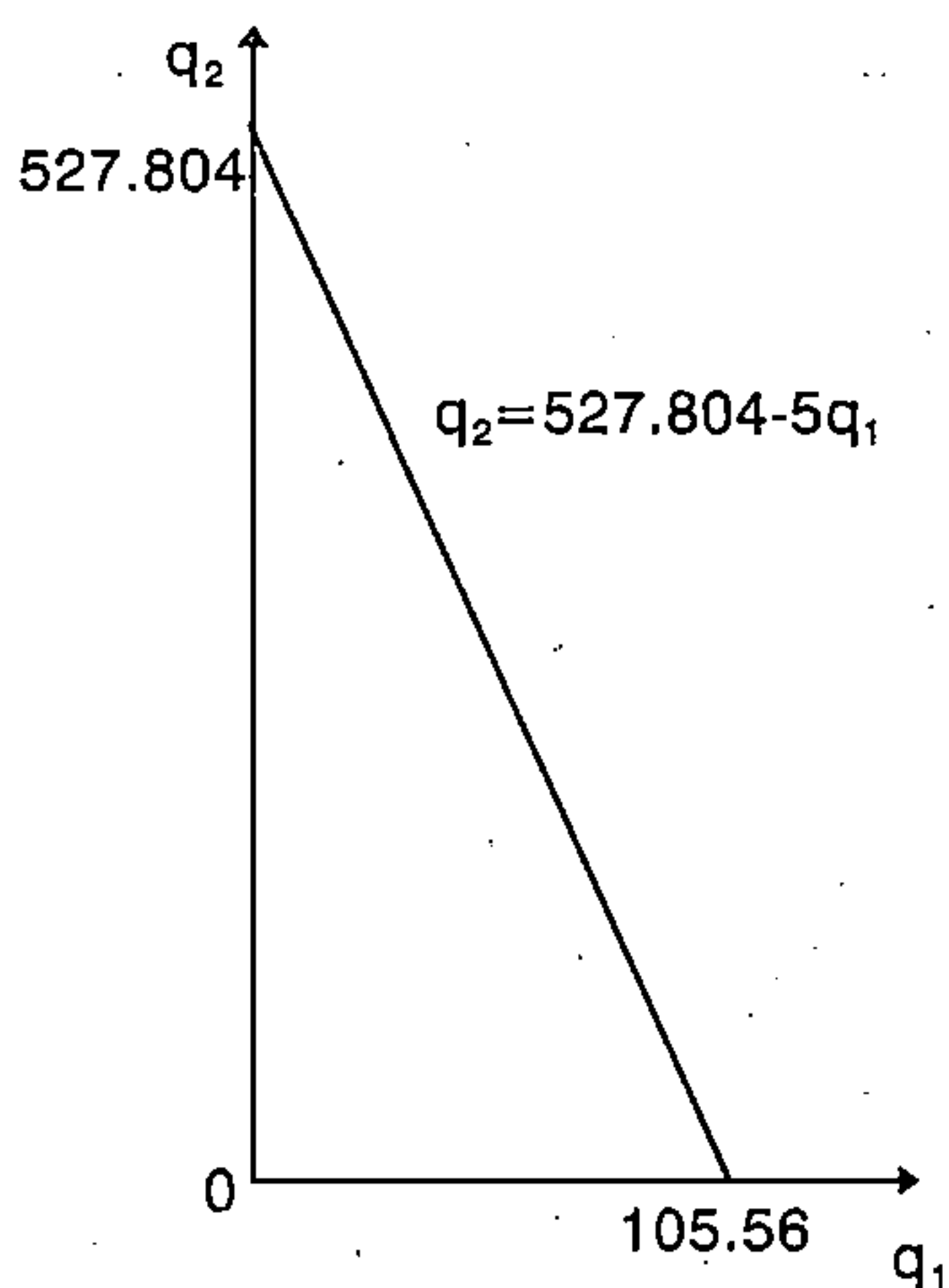
Gráfico N° IX.2.2

(a)

Caja de Edgeworth



(b)

Frontera de posibilidades de producción

3. Una economía tiene las siguientes funciones de producción:

$$q_1 = 4L_1^{1/4}K_1^{1/4}$$

$$q_2 = 4L_2^{1/4}K_2^{1/4}$$

Y se sabe que: $L = 200$; $K = 100$

- a) Determinar las ecuaciones de la curva de contrato y la frontera de posibilidades de producción.

- b) ¿Cuánto se producirá de q_2 si la economía desea producir 20 unidades de q_1 ?
 ¿Cuánto se producirá de q_2 si la economía desea producir 30 unidades de q_1 ?

Respuesta:

- a) **Curva de contrato:** Primero, es necesario hallar los productos marginales de ambos factores en cada función de producción.

$$f_L^1 = 4 \frac{1}{4} L_1^{-3/4} K_1^{1/4}$$

$$f_K^1 = 4 \frac{1}{4} L_1^{1/4} K_1^{-3/4}$$

$$f_L^2 = 4 \frac{1}{4} L_2^{-3/4} K_2^{1/4}$$

$$f_K^2 = 4 \frac{1}{4} L_2^{1/4} K_2^{-3/4}$$

Luego hay que reemplazarlas en la condición de optimización:

$$\frac{f_L^1}{f_K^1} = \frac{K_1}{L_1} \equiv \text{TMgST}_{K/L}^1$$

$$\frac{f_L^2}{f_K^2} = \frac{K_2}{L_2} \equiv \text{TMgST}_{K/L}^2$$

$$\text{TMgST}_{K/L}^1 = \text{TMgST}_{K/L}^2$$

$$\frac{K_1}{L_1} = \frac{K_2}{L_2}$$

$$K_1 L_2 - K_2 L_1 = 0$$

Curva de contrato en la producción

La curva de transformación o frontera de posibilidades de producción:

$$L_1 = \frac{L}{K} K_1 \quad \text{ó} \quad L_2 = \frac{L}{K} K_2$$

Estas relaciones, obtenidas a partir de la curva de contrato, se reemplazan en cada función de producción:

$$q_1 = 4 \left[\frac{L}{K} K_1 \right]^{1/4} K_1^{1/4} = 4 \left[\frac{200}{100} \right]^{1/4} K_1^{1/2}$$

$$q_1^2 = 16(2)^{1/2} K_1$$

$$K_1 = \frac{q_1^2}{22.63}$$

$$q_2 = 4 \left[\frac{L}{K} K_2 \right]^{1/4} K_2^{1/4} = 4 \left[\frac{200}{100} \right]^{1/4} K_2^{1/2} = 4(2)^{1/4} K_2^{1/2}$$

$$q_2^2 = 16(2)^{1/2} K_2$$

$$q_2^2 = 22.63(K - K_1)$$

$$q_2^2 = 22.63(100) - 22.63 \left[\frac{q_1^2}{22.63} \right]$$

$$q_2^2 = 2,263 - q_1^2$$

$$q_2 = (2,263 - q_1^2)^{1/2}$$

$$\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{1}{2} (2,263 - q_1^2)^{-1/2} (-2q_1) = -\frac{q_1}{(2,263 - q_1^2)^{1/2}}$$

$$TMgT_{q_2/q_1} \equiv \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{q_1}{(q_2^2)^{1/2}} = -\frac{q_1}{q_2}$$

La pendiente de la curva indica que es cóncava (o $TMgT_{q_2/q_1}$ creciente) ya que conforme crece la producción de q_1 , debe caer la de q_2 .

b) Si se desea producir $q_1 = 20$: En la frontera de posibilidades de producción

$$q_2 = (2,263 - (20)^2)^{1/2}$$

$$q_2 = (1,863)^{1/2}$$

$$q_2 = 43.16$$

Si se desea producir $q_1 = 30$. En la frontera de posibilidades de producción

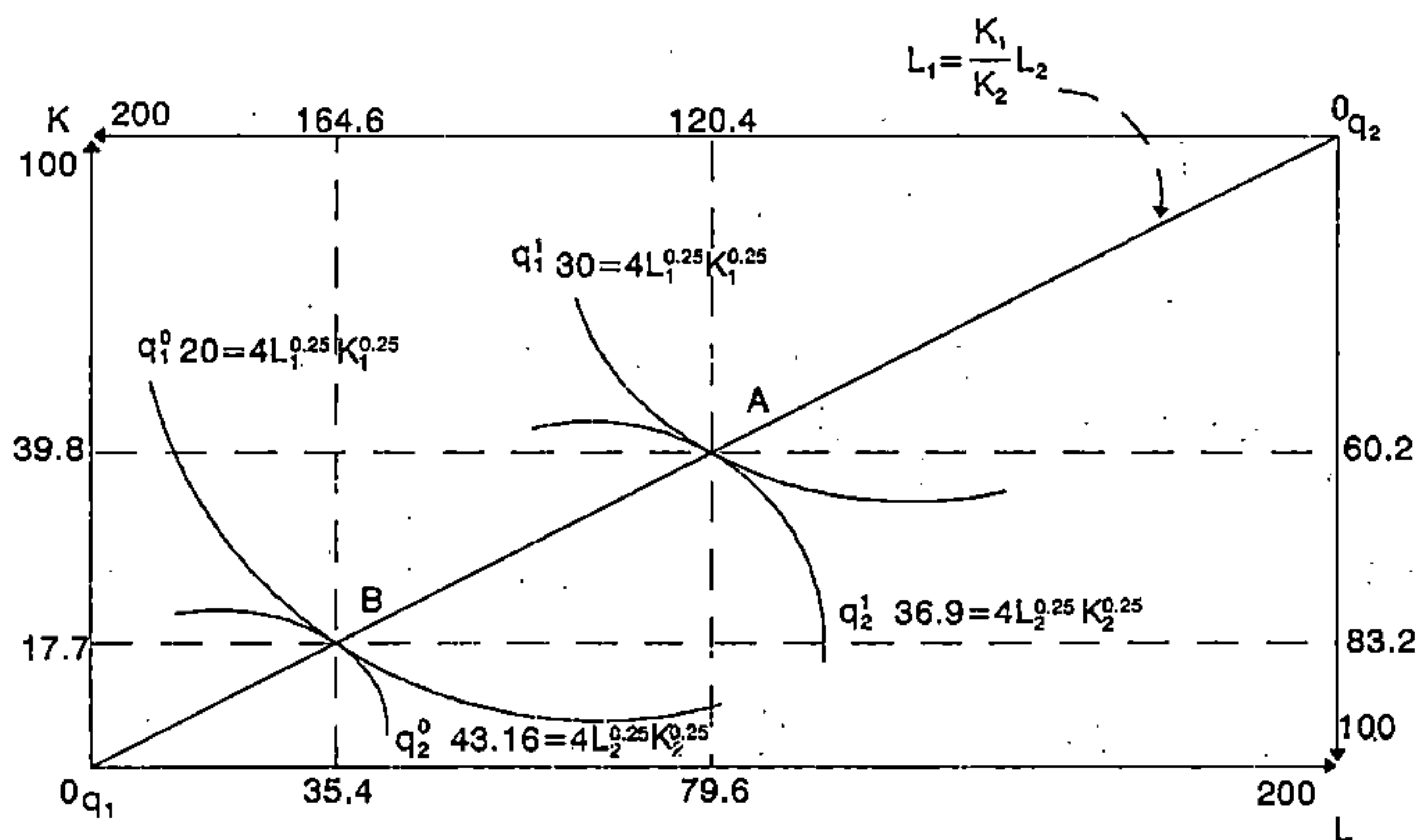
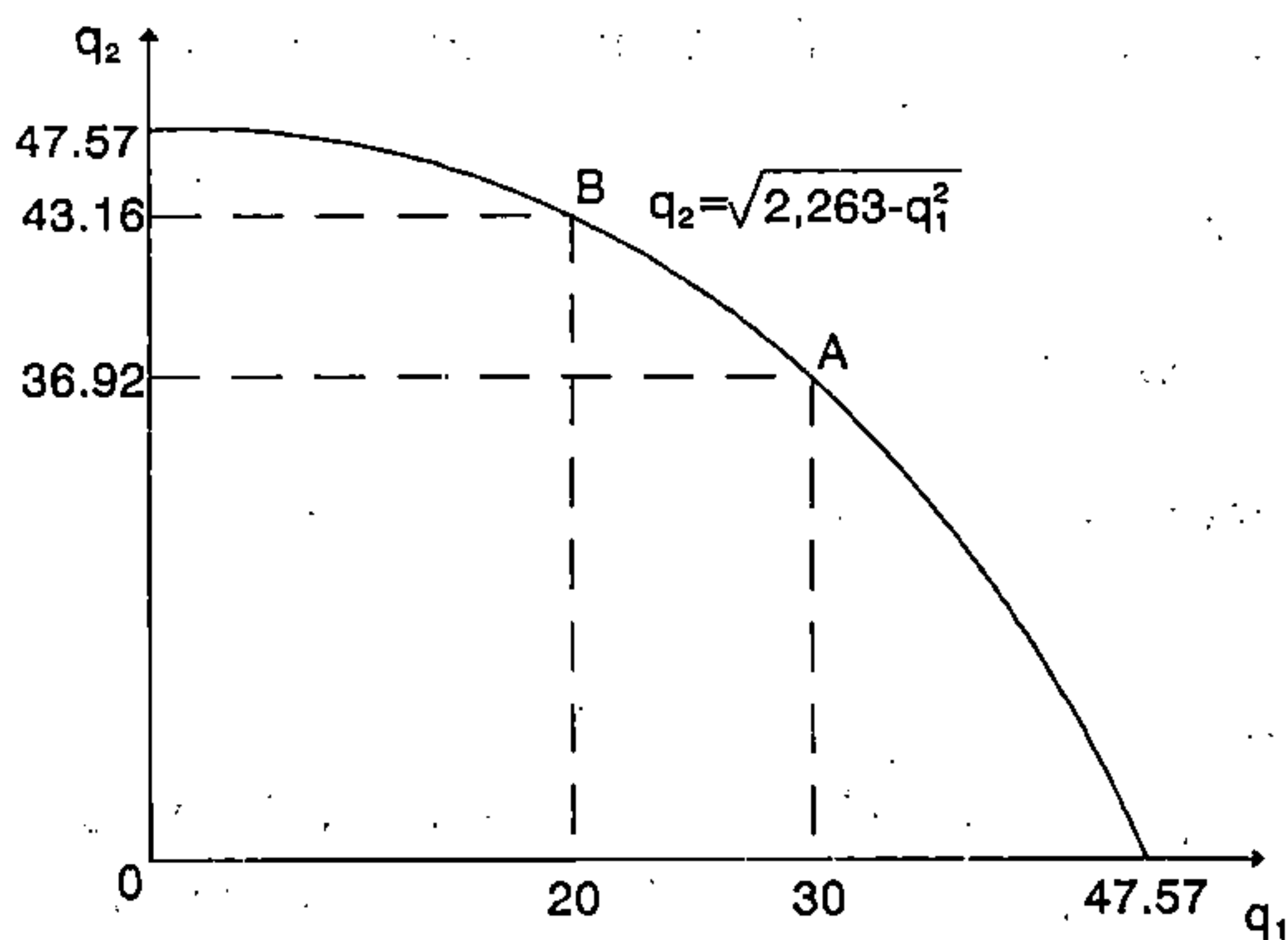
$$q_2 = (2,263 - (30)^2)^{1/2}$$

$$q_2 = (2,263 - 900)^{1/2}$$

$$q_2 = 36.92$$

Estos resultados confirman que en esta economía la producción de un mayor número de unidades de q_1 sólo puede concretarse a expensas de una menor producción de q_2 . El siguiente gráfico muestra el equilibrio en la producción en el diagrama de Edgeworth y la forma de la frontera de posibilidades de producción.

Gráfico Nº IX.2.3

(a)
Caja de Edgeworth(b)
Frontera de posibilidades de producción

IX.3 Equilibrio general

1. Dadas las siguientes funciones de producción en una economía de dos bienes:

$$q_1 = 2L_1^{0.4}K_1^{0.6}$$

$$q_2 = 10L_2^{0.4}K_2^{0.6}$$

así como las dotaciones de cada factor de producción, las cuales se usan totalmente para ambos procesos:

$$L = 80 = L_1 + L_2$$

$$K = 40 = K_1 + K_2$$

La curva de transformación es:

$$q_2 = 527.804 - 5q_1$$

$$TMgT_{q_2/q_1} = 5$$

Es una línea recta con pendiente -5 .

a) Dado que la función de utilidad de la economía es:

$$U = q_1 q_2^2$$

¿Cuál será la producción óptima de q_1 y q_2 ? ¿Cuál es la asignación óptima de los recursos en cada industria?

b) Supóngase que los gustos y preferencias de los consumidores varían a:

$$U' = (q_1 + 7)q_2^2$$

y supóngase que los factores K y L son reasignables. ¿Cuál será la nueva producción que maximiza utilidades? ¿Cuál será la nueva asignación de recursos?

Respuesta:

a) Se deberá maximizar la utilidad social, sujeta a la restricción que impone la frontera de posibilidades de producción.

$$L = q_1 q_2^2 + \lambda [527.804 - 5q_1 - q_2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = q_2^2 - 5\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = 2q_1 q_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 527.804 - 5q_1 - q_2 = 0$$

De las dos primeras derivadas se iguala λ :

$$\lambda = \frac{q_2^2}{5} = 2q_1 q_2$$

$$q_2 = 10q_1$$

Reemplazándolo en la tercera ecuación:

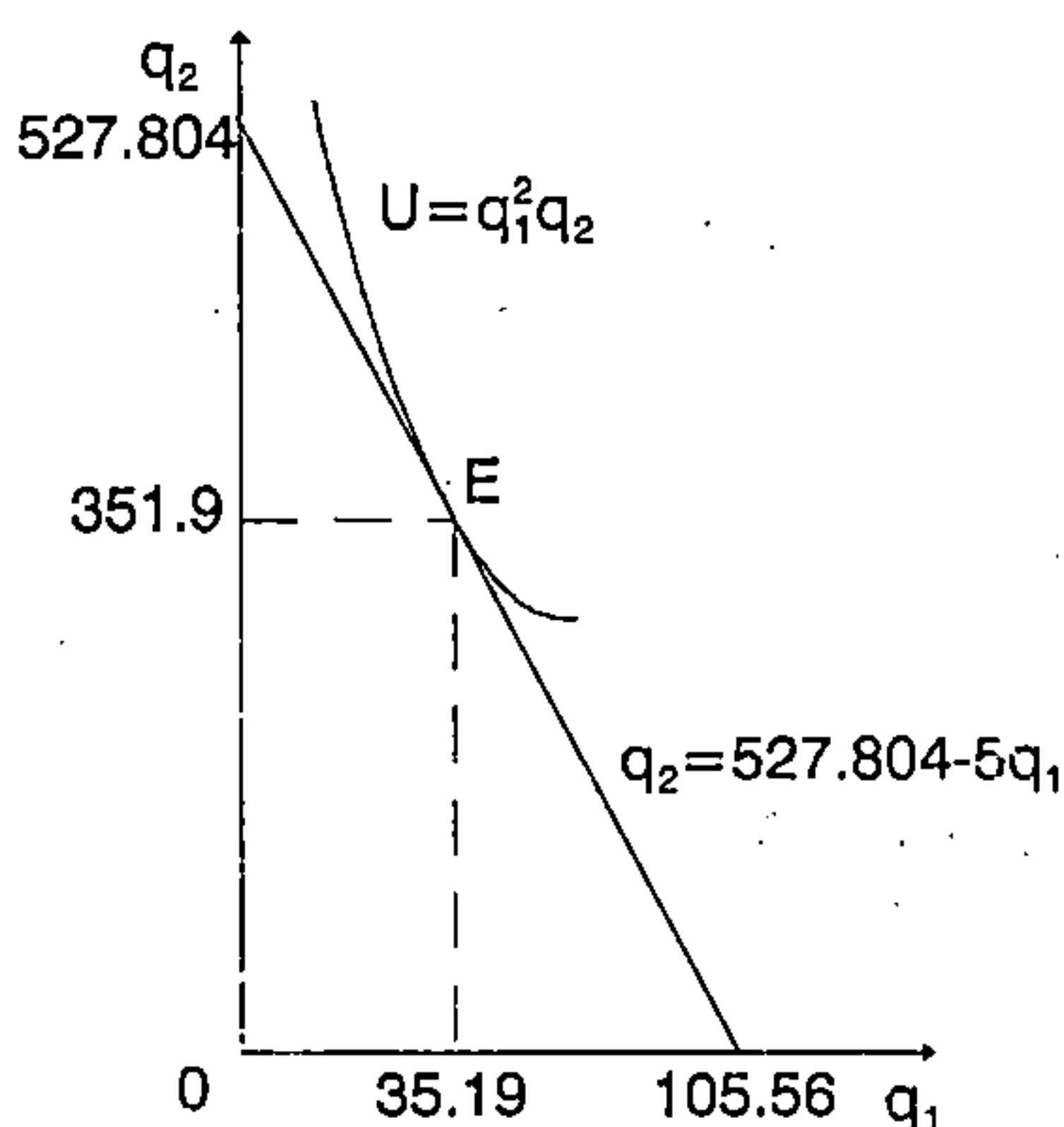
$$527.804 - 5q_1 - 10q_1 = 0$$

$$527.804 = 15q_1$$

$$q_1 = 35.19$$

$$q_2 = 351.9$$

Gráfico N° IX.3.1



En el punto E debe igualarse la $TMgS_{q_2/q_1}$ y la $TMgT_{q_2/q_1}$ entre ambos bienes:

$$TMgS_{q_2/q_1} = TMgT_{q_2/q_1} = -\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{q_2^2}{2q_1 q_2} = \frac{(351.9)^2}{2(35.19)(351.9)} = 5$$

Habiéndose determinado la solución para las cantidades óptimas de q_1 y q_2 , se procede a la determinación de la más eficiente asignación de recursos L y K entre las dos industrias. En equilibrio, las $TMgST_{K/L}$ deben ser las mismas en ambas industrias:

$$q_1 = 2L_1^{0.4}K_1^{0.6}$$

$$\frac{35.19}{2} = L_1^{0.4}K_1^{0.6}$$

Diferenciando:

$$d\left(\frac{35.19}{2}\right) = L_1^{0.4}(0.6)K_1^{-0.4}dK_1 + K_1^{0.6}(0.4)L_1^{-0.6}dL_1 = 0$$

$$-\frac{dK_1}{dL_1} \equiv TMgST_{K/L}^1 = \frac{2K_1}{3L_1}$$

Y

$$q_2 = 10L_2^{0.4}K_2^{0.6}$$

$$\frac{351.9}{10} = L_2^{0.4}K_2^{0.6}$$

Diferenciando:

$$d\left(\frac{351.9}{10}\right) = L_2^{0.4}(0.6)K_2^{-0.4}dK_2 + K_2^{0.6}(0.4)L_2^{-0.6}dL_2 = 0$$

$$-\frac{dK_2}{dL_2} \equiv TMgST_{K/L}^2 = \frac{2K_2}{3L_2}$$

Por lo tanto las $TMgST_{K/L}$ son iguales en equilibrio

$$\frac{2K_1}{3L_1} = \frac{2K_2}{3L_2}$$

De donde:

$$K_1 = \frac{K_2}{L_2} L_1$$

$$K_1 = \frac{(K - K_1)}{(L - L_1)} L_1$$

$$K_1 L - K_1 L_1 = K L_1 - K_1 L_1$$

$$L_1 = \frac{L}{K} K_1$$

Esta relación se reemplaza en la función de producción de q_1 :

$$35.19 = 2L_1^{0.4} K_1^{0.6}$$

$$17.595 = \left(\frac{L}{K} K_1 \right)^{0.4} K_1^{0.6}$$

$$17.595 = \left(\frac{80}{40} \right)^{0.4} K_1$$

$$K_1 = \frac{17.595}{1.3195079}$$

$$K_1 = 13.33$$

Lo que determina, dado $K = 40$:

$$K_2 = 26.67$$

Y dado: $L_1 = \frac{L}{K} K_1$

$$L_1 = \left(\frac{80}{40}\right)(13.33)$$

$$L_1 = 26.66 \quad \text{que dado } L = 80 \text{ determina:}$$

$$L_2 = 53.34$$

b) Nuevo equilibrio:

$$L' = (q_1 + 7)q_2^2 + [527.804 - 5q_1 - q_2]$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_1} = q_2^2 - 5\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_2} = 2q_1q_2 + 14q_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_1} = 527.804 - 5q_1 - q_2 = 0$$

De la primera y segunda ecuaciones se iguala λ :

$$\lambda = \frac{q_2^2}{5} = 2q_1q_2 + 14q_2$$

De donde:

$$q_1 = \frac{q_2 - 70}{10}$$

Reemplazando esta relación en la tercera ecuación:

$$527.804 = 5 \left[\frac{q_2 - 70}{10} \right] + q_2$$

$$527.04 = 5q_2 - 350 + 10q_2$$

$$q_2 = 375.2 \quad y$$

$$q_1 = 30.37$$

Ante el cambio de preferencias, la producción se ajusta:

$$q_1 = 2L_1^{0.4}K_1^{0.6}$$

$$30.37 = 2L_1^{0.4}K_1^{0.6}$$

Utilizando la relación óptima de empleo de los factores:

$$L_1 = K_1 \left(\frac{L}{K} \right)$$

$$15.185 = \left(\frac{80}{40} \right)^{0.4} K_1$$

$$K_1 = 11.512$$

$$K_2 = 28.49$$

Reemplazando K_1 para determinar L_1 :

$$L_1 = (11.51) \left(\frac{80}{40} \right)$$

$$L_1 = 23.02$$

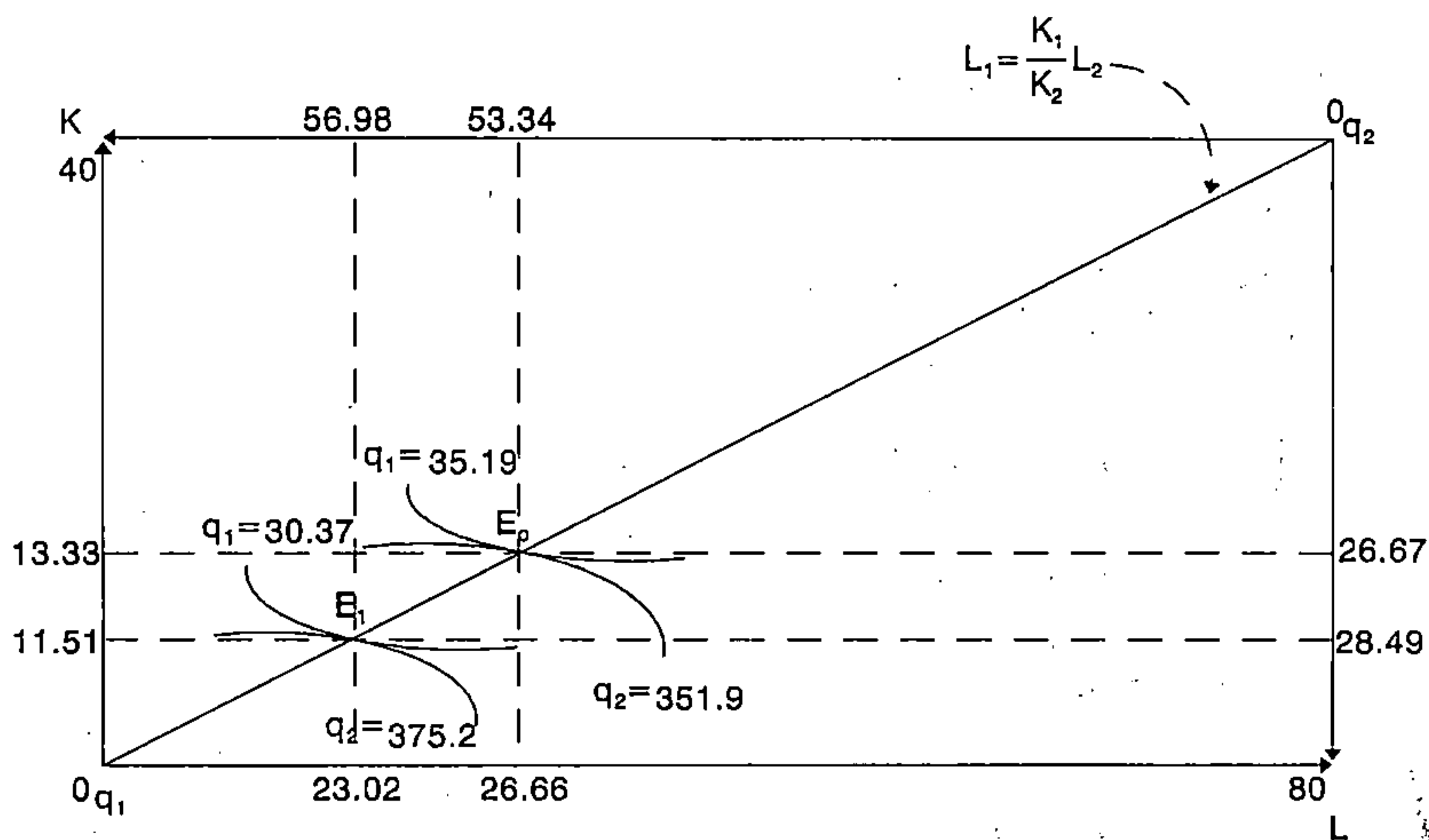
$$L_2 = 56.98$$

Es decir, la primera industria reduce el empleo del factor L de 26.66 a 23.02, incrementándose el empleo de dicho factor en la producción de q_2 en el mismo número. Lo opuesto ocurre en el empleo del factor K , que se reduce de 13.33 a 11.51 en la primera industria, incrementándose su empleo en la otra industria en 1.82 unidades. El siguiente gráfico resume estos cambios.

Gráfico N° IX.3.2

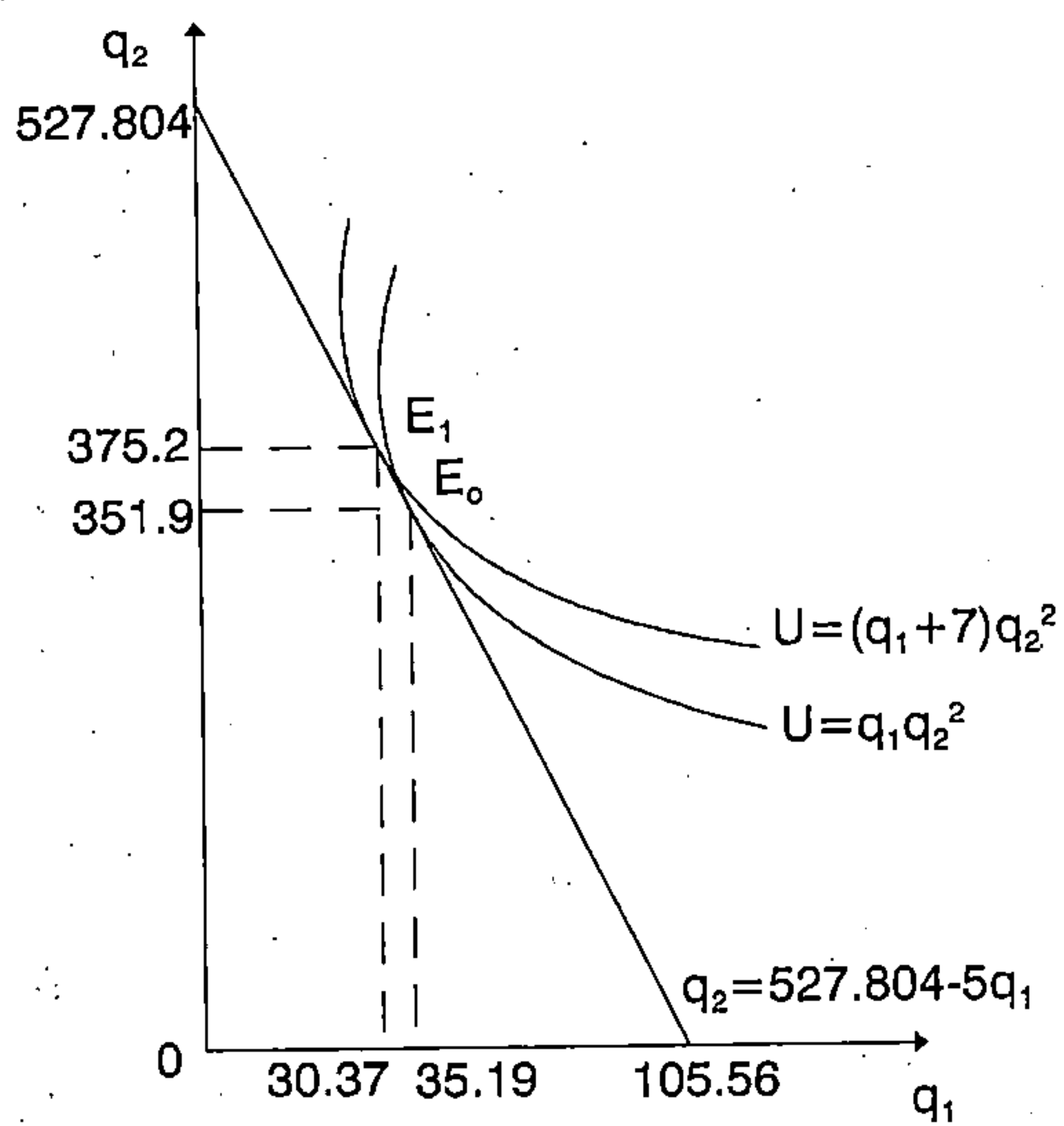
(a)

Caja de Edgeworth



(b)

Frontera de posibilidades de producción



Bibliografía

- Becker, Gary *Teoría microeconómica*. México: Fondo de Cultura Económica, 1977.
- Call, Steven y
William Holahan *Microeconomía*. México: Grupo Editorial Iberoamericana, 1985.
- Ferguson, C.E. y J.P. Gould *Teoría microeconómica*. México: Fondo de Cultura Económica, 1979.
- Frank, Robert *Microeconomía y conducta*. Madrid: Mc GrawHill. Interamericana de España, 1992.
- Henderson, J.M. y
R.E. Quandt *Teoría microeconómica*, 3ª edición. Barcelona: Ediciones Ariel, 1985.
- Hicks, J.R. *Valor y capital*. México: Fondo de Cultura Económica, 1974.
- Hirshleifer, J. *Microeconomía*. México: Prentice-Hall International, 1988.
- Stigler, George *La teoría de los precios*. Madrid: Revista de Derecho Privado, 1968.
- Varian, Hal *Microeconomía intermedia*. Madrid: Antoni Bosch Editor S.A., 1988.
- Vickrey, William *Microeconomía*. Buenos Aires: Amorrortu Editores, 1969.

Ejercicios de aplicación adicionales pueden encontrarse en:

- De Asla Moreno *Microeconomía práctica*. Editorial El Coloquio.
- Diéguez, H. y A. Porto *Problemas de microeconomía*. Buenos Aires: Amorrortu Editores, 1971.

Levenson, A. y B. Solow

Ejercicios y problemas sobre teoría de los precios. Buenos Aires: Amorrortu Editores, 1973.

Ortiz, Álvaro

Microeconomía de la producción y el costo. Lima: Universidad Nacional Agraria La Molina, 1993.

