

# LA ECUACIÓN DE BLACK-SCHOLES

## Aspectos matemático-financieros

Víctor Cabanillas Zannini

**E**n los últimos años, los mercados de capitales y derivados han experimentado un enorme auge en el mundo. Esto ha impulsado el estudio de estos mercados mediante herramientas y métodos matemáticos avanzados. Uno de los problemas centrales de las finanzas modernas es el de la valoración de instrumentos financieros, es decir, asignar un precio a productos financieros como opciones, futuros, derivados, *swaps*, etcétera. Este problema y las necesidades de varios otros en finanzas han hecho de la matemática el ingrediente fundamental para el modelaje y la descripción de la dinámica de los mercados modernos.

El objetivo de este proyecto es el estudio de los aspectos matemáticos y financieros de la valoración de opciones por medio del célebre modelo de Black-Scholes. A lo largo del estudio se exponen las herramientas y los métodos matemáticos de la valoración de opciones. Así, en una primera parte, se introducen los conceptos de activos financieros y productos derivados. Luego se presentan las definiciones y la clasificación de

las opciones financieras con una serie de ejemplos, así como la interpretación geométrica de las ganancias y pérdidas en las operaciones con opciones. En la segunda, se tratan las probabilidades, las variables aleatorias, las distribuciones y la esperanza matemática desde el punto de vista de la teoría de la medida. Los procesos estocásticos constituyen el lenguaje natural de las finanzas modernas y se presentan en otro acápite. Asimismo, una parte está dedicada al estudio de las martingalas y sus filtraciones, concepto clave en la descripción matemática del problema de valoración de opciones. Enseguida se aborda el movimiento browniano, que nace de la observación de partículas de polen y que utilizó Bachelier en el año 1900 para describir la dinámica de un tipo de acciones de la Bolsa de París. Hoy, el movimiento browniano es la piedra angular del modelaje financiero, en especial el movimiento browniano geométrico introducido por Samuelson en 1965, que se presenta en esta misma parte.

Aunque la investigación revisa una serie de temas, destaca el estudio de la integral estocástica o de Itô, un nuevo tipo de integral. Sin embargo, como se muestra en el estudio, esta integral no se comporta, para efectos de cálculo, como la de Riemann, razón por la cual surge la necesidad de una herramienta análoga a la regla de la cadena del cálculo diferencial: se trata del lema de Itô y de la fórmula de Itô, a las cuales se dedica una sección del trabajo. Allí mismo se introducen las ecuaciones diferenciales estocásticas por medio de un resultado de existencia y unicidad de soluciones, mediante ejemplos provenientes de las finanzas. El final del trabajo se consagra al estudio del modelo de Black-Scholes y Merton para la valoración de opciones financieras. Por medio del teorema de Feynman-Kac, se estudia una solución para el modelo y se obtiene una salida explícita, que luego de pasar por una serie de transformaciones se convierte en la célebre fórmula de Black-Scholes para la valoración de opciones. ❖

**“La integral estocástica no se comporta, para efectos de cálculo, como la de Riemann, razón por la cual surge la necesidad de una herramienta análoga a la regla de la cadena del cálculo diferencial”.**